ESC 2006 VOIE E
EXERCICE 2

Énoncé

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \mathrm{e}^x - x$.

1. Dresser le tableau de variations de g en précisant ses limites en $\pm\infty$.
2. Montrer que pour tout $n \in [\![2;+\infty[\![$, l'équation $g(x) = n$ possède exactement deux solutions, l'une strictement négative notée α_n et l'autre strictement positive notée β_n.
3. **Approximation de α_2.** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \mathrm{e}^{u_n} - 2 \end{cases}$$

   3.a. Établir : $-2 \leqslant \alpha_2 \leqslant -1$.

   3.b. Justifier que $\mathrm{e}^{\alpha_2} - 2 = \alpha_2$ puis démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_2 \leqslant u_n \leqslant -1$.

   3.c. En utilisant l'inégalité des accroissements finis avec une fonction adéquate, démontrer que pour tous réels a, b tels que $a \leqslant b \leqslant -1$, on a : $0 \leqslant \mathrm{e}^b - \mathrm{e}^a \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}(b-a)$.

   3.d. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - \alpha_2 = \mathrm{e}^{u_n} - \mathrm{e}^{\alpha_2}$, puis $0 \leqslant u_{n+1} - \alpha_2 \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}(u_n - \alpha_2)$.

   En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n - \alpha_2 \leqslant \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^n$.

   3.e. Démontrer alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α_2.

   3.f. Écrire un programme **Python** permettant d'obtenir une valeur approchée de α_2 à 10^{-5} près.

4. **Étude des suites $(\alpha_n)_{n\geqslant 2}$ et $(\beta_n)_{n\geqslant 2}$.**

   4.a. Étudier les variations des suites $(\alpha_n)_{n\geqslant 2}$ et $(\beta_n)_{n\geqslant 2}$ et déterminer leur limite en $+\infty$.

   4.b. Établir : $\forall n \in [\![2;+\infty[\![,\ -n \leqslant \alpha_n \leqslant -n+1$. En déduire un équivalent de α_n lorsque n tend vers $+\infty$.

   4.c. Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$. Démontrer : $1 \leqslant g\big(\ln(n)\big) \leqslant n$. En déduire : $g\big(\ln(2n)\big) \geqslant n$.

   4.d. En déduire : $\forall n \in [\![2;+\infty[\![,\ \ln(n) \leqslant \beta_n \leqslant \ln(2n)$ puis déterminer un équivalent simple de β_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Corrigé

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = e^x - x$.

1. Dresser le tableau de variations de g en précisant ses limites en $\pm\infty$.

   - La fonction g est la somme de deux fonctions usuelles dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
     Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :
     $$g'(x) = e^x - 1$$
     Or :
     $$\begin{aligned} g'(x) \geqslant 0 &\iff e^x \geqslant 1 \\ &\iff x \geqslant 0 \end{aligned} \qquad \text{stricte croissance de ln sur } \mathbb{R}_*^+$$

     ✘ Attention ! La **stricte croissance** est indispensable : c'est ce qui permet de "remonter" l'équivalence ici (car c'est ce qui permet de "désappliquer" une fonction).

     D'où :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

   - Détaillons les limites :
     - En $-\infty$:
       Par opérations, on a :
       $$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$$
     - En $+\infty$:
       Pour tout $x \in \mathbb{R}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a :
       $$\begin{aligned} g(x) &= e^x - x \\ &= e^x\left(1 - \frac{x}{e^x}\right) \end{aligned}$$
       Or, par croissance comparée :
       $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$
       D'où, par opérations :
       $$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

       Important ! Les croissances comparées sont données sous forme de quotient (sauf pour $\lim\limits_{x\uparrow 0} x\ln(x)$) : il est important de les faire apparaître comme tels à l'écrit.

2. Montrer que pour tout $n \in [\![2; +\infty[\![$, l'équation $g(x) = n$ possède exactement deux solutions, l'une strictement négative notée α_n et l'autre strictement positive notée β_n.
   Soit $n \in [\![2; +\infty[\![$.

   - Sur $]0; +\infty[$:
     On a :
     - ✓ la fonction g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$,
     - ✓ la fonction g est continue sur $]0; +\infty[$ (car dérivable).

     Ainsi, par théorème de bijection, la fonction g est bijective de $]0; +\infty[$ dans $g\left(]0; +\infty[\right) =]1; +\infty[$.
     Or $n \geqslant 2$, donc $n \in g\left(]0; +\infty[\right)$.
     Conclusion : l'équation $g(x) = n$ possède une unique solution sur $]0; +\infty[$.

     ☞ Rappel... La continuité de g garantit (TVI) que $g\left(]0; +\infty[\right)$ est un intervalle ; et la stricte croissance de g fournit alors que $g\left(]0; +\infty[\right) =]g(0); \lim\limits_{+\infty} g[$.

   - Sur $]-\infty; 0[$:
     On procède de la même façon.
     Conclusion : l'équation $g(x) = n$ possède une unique solution sur $]-\infty; 0[$.

     ✓ Rigueur ! En se plaçant sur les intervalles ouverts, on évite d'avoir à justifier la stricte positivité / négativité des solutions trouvées. En revanche, l'énoncé demande d'établir que l'équation $g(x) = n$ possède exactement deux solutions. Nous en avons trouvé deux sur $\mathbb{R}^*$, il faut bien mentionner qu'il n'y en a pas d'autre en 0...

   - Puisque $g(0) = 1 \neq n$, l'équation $g(x) = n$ ne possède pas d'autre solution.

   > **Conclusion :** pour tout $n \in [\![2; +\infty[\![$, l'équation $g(x) = n$ possède exactement deux solutions, l'une strictement négative notée α_n et l'autre strictement positive notée β_n.

3. **Approximation de α_2.** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
   $$\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = e^{u_n} - 2 \end{cases}$$

   3.a. Établir : $-2 \leqslant \alpha_2 \leqslant -1$.
   On a :
   - $g(\alpha_2) = 2$, par définition de α_2,
   - puis :
     $$\begin{aligned} g(-2) &= e^{-2} + 2 \\ &\geqslant 2 \end{aligned} \qquad e^{-2} \geqslant 0$$

   ➠ Réflexe ! Dans le cas des suites implicites, on cherche à comparer des antécédents... Pour cela, on compare leurs images !

- et :

$$\begin{aligned} g(-1) &= e^{-1} + 1 \\ &\leqslant 2 \end{aligned}$$

$-1 \leqslant 0$, donc $e^{-1} \leqslant 1$

D'où :

$$g(-1) \leqslant g(\alpha_2) \leqslant g(-2)$$

D'où le résultat, par stricte décroissance de g sur $]-\infty; 0[$.

Conclusion : $-2 \leqslant \alpha_2 \leqslant -1$.

Petite remarque

Ici, on préfère utiliser un argument qui porte sur g... En effet, il y a deux bijections réciproques en jeu : l'une étant la bijection réciproque de la restriction de g sur $]-\infty; 0[$, que l'on peut noter $g_{|]-\infty;0[}$ et l'autre de la restriction de g sur $]0; +\infty[$. En mentionnant toujours un argument sur la bijection, on évite ces considérations...

3.b. Justifier que $e^{\alpha_2} - 2 = \alpha_2$ puis démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_2 \leqslant u_n \leqslant -1$.

- Puisque $g(\alpha_2) = 2$, on a :

$$e^{\alpha_2} - \alpha_2 = 2$$

Conclusion : $e^{\alpha_2} - 2 = \alpha_2$.

- Procédons par récurrence...
  - ⋆ **Initialisation.** Pour $n = 0$:
  On sait que $u_0 = -1$ et $\alpha_2 \leqslant -1$, d'où : $\alpha_2 \leqslant u_0 \leqslant -1$. L'initialisation est vérifiée.
  - ⋆ **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\alpha_2 \leqslant u_n \leqslant -1$ et montrons $\alpha_2 \leqslant u_{n+1} \leqslant -1$.
  Par hypothèse de récurrence, on a :

$$\alpha_2 \leqslant u_n \leqslant -1$$

Puis, par croissance de exp sur $\mathbb{R}$ et en soustrayant 2 :

$$e^{\alpha_2} - 2 \leqslant e^{u_n} - 2 \leqslant e^{-1} - 2$$

Or :
  - ◇ d'après le point précédent, $e^{\alpha_2} - 2 = \alpha_2$;
  - ◇ $e^{u_n} - 2 = u_{n+1}$;
  - ◇ $e^{-1} \leqslant 1$, donc $e^{-1} - 2 \leqslant -1$.

D'où, par transitivité :

$$\alpha_2 \leqslant u_{n+1} \leqslant -1$$

L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_2 \leqslant u_n \leqslant -1$.

➠Réflexe !

On pense à raisonner par récurrence quand on souhaite établir une égalité / un encadrement du terme général d'une suite récurrente.

3.c. En utilisant l'inégalité des accroissements finis avec une fonction adéquate, démontrer que pour tous réels a, b tels que $a \leqslant\ b \leqslant\ -1$, on a : $0 \leqslant e^b - e^a \leqslant \dfrac{1}{e}(b - a)$.

On sait que :

- ✓ la fonction exponentielle est dérivable sur $]-\infty; -1]$;
- ✓ pour tout $x \in]-\infty; -1]$:

$$\begin{aligned} |\exp'(x)| &= \exp(x) \\ &\leqslant e^{-1} = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

$x \leqslant -1$, donc, par croissance de exp sur $\mathbb{R}$: $e^x \leqslant e^{-1}$

Ainsi, par l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall (x, y) \in]-\infty; -1]^2,\ |e^x - e^y| \leqslant \frac{1}{e}|x - y|$$

Soient finalement a, b des réels tels que $a \leqslant b \leqslant -1$.
D'après ce qui précède avec $x = b$ et $y = a$, licite car $a, b \in]-\infty; -1]$, on a :

$$|e^b - e^a| \leqslant \frac{1}{e}|b - a|$$

Et comme $a \leqslant b$, on a :

- $b - a \geqslant 0$, donc $|b - a| = b - a$,
- par croissance de exp sur $\mathbb{R}$: $e^b \geqslant e^a$, donc $e^b - e^a \geqslant 0$ et ainsi $|e^b - e^a| = e^b - e^a$.

D'où :

$$0 \leqslant e^b - e^a \leqslant \frac{1}{e}(b - a)$$

Conclusion : pour tous réels a, b tels que $a \leqslant\ b \leqslant\ -1$, on a : $0 \leqslant e^b - e^a \leqslant \dfrac{1}{e}(b - a)$.

3.d. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - \alpha_2 = e^{u_n} - e^{\alpha_2}$, puis $0 \leqslant u_{n+1} - \alpha_2 \leqslant \frac{1}{e}(u_n - \alpha_2)$.

En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n - \alpha_2 \leqslant \left(\frac{1}{e}\right)^n$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.
  On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \alpha_2 &= e^{u_n} - 2 - \alpha_2 \\ &= e^{u_n} - e^{\alpha_2} \end{aligned}$$

par définition, $2 + \alpha_2 = e^{\alpha_2}$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après le résultat de la question précédente avec $b = u_n$ et $a = \alpha_2$, licite car d'après la question 3.b, on a $\alpha_2 \leqslant u_n \leqslant -1$:

$$0 \leqslant e^{u_n} - e^{\alpha_2} \leqslant \frac{1}{e}(u_n - \alpha_2)$$

  Or $e^{u_n} - e^{\alpha_2} = u_{n+1} - \alpha_2$...
  Conclusion : on a ainsi établi :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_{n+1} - \alpha_2 \leqslant \frac{1}{e}(u_n - \alpha_2)$$

- Démontrons enfin, par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n - \alpha_2 \leqslant \left(\frac{1}{e}\right)^n$$

  ⋆ **Initialisation.** Pour $n = 0$:
  On a :
  ◇ $u_0 = -1$,
  ◇ $-2 \leqslant \alpha_2 \leqslant -1$, d'où : $2 \geqslant -\alpha_2 \geqslant 1$.

  Ainsi : $1 \geqslant u_0 - \alpha_2 \geqslant 0$.
  Or $\left(\frac{1}{e}\right)^0 = 1$. D'où :

$$0 \leqslant u_0 - \alpha_2 \leqslant \left(\frac{1}{e}\right)^0$$

  L'initialisation est ainsi vérifiée.

Petite remarque

Pour ce type de récurrence, c'est toujours l'initialisation qui demande "le plus de travail". L'hérédité est directe avec ce qui a déjà été établi...

  ⋆ **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $0 \leqslant u_n - \alpha_2 \leqslant \left(\frac{1}{e}\right)^n$ et montrons $0 \leqslant u_{n+1} - \alpha_2 \leqslant \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}$.
  Par hypothèse de récurrence, on a :

$$0 \leqslant u_n - \alpha_2 \leqslant \left(\frac{1}{e}\right)^n$$

  D'où, puisque $\frac{1}{e} > 0$:

$$0 \leqslant \frac{1}{e}(u_n - \alpha_2) \leqslant \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}$$

  Or, d'après ce qui précède :

$$0 \leqslant u_{n+1} - \alpha_2 \leqslant \frac{1}{e}(u_n - \alpha_2)$$

  Par transitivité, on a donc :

$$0 \leqslant u_{n+1} - \alpha_2 \leqslant \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}$$

  L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n - \alpha_2 \leqslant \left(\frac{1}{e}\right)^n$.

3.e. Démontrer alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α_2.
On a ainsi :

✓ $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n - \alpha_2 \leqslant \left(\frac{1}{e}\right)^n$,

✓ $\frac{1}{e} \in]-1;1[$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n = 0$.

D'où, par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - \alpha_2 = 0$.

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha_2$; autrement dit, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α_2.

3.f. Écrire un programme **Python** permettant d'obtenir une valeur approchée de α_2 à 10^{-5} près.

On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n - \alpha_2 \leqslant \left(\frac{1}{e}\right)^n$$

Ainsi, dès que $\left(\frac{1}{e}\right)^n \leqslant 10^{-5}$, la valeur de u_n sera proche de α_2 à 10^{-5} près... Proposons donc le programme suivant :

```
import numpy as np

def approx_alpha_2():
    n=0
    u=-1
    while (1/np.exp(1))**n>10**(-5):
        n=n+1
        u=np.exp(u)-2
    return u
```

4. Étude des suites $(\alpha_n)_{n\geqslant 2}$ et $(\beta_n)_{n\geqslant 2}$.

4.a. Étudier les variations des suites $(\alpha_n)_{n\geqslant 2}$ et $(\beta_n)_{n\geqslant 2}$ et déterminer leur limite en $+\infty$.

- Notons g_1 la bijection réciproque de la restriction de la fonction g sur $]-\infty;0[$. Puisque $g(\alpha_n) = n$ et que $\alpha_n \in]-\infty;0[$, on a :

$$\forall n \in [\![2;+\infty[\![,\ \ \alpha_n = g_1(n)$$

  - ⋆ Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$. Puisque $n \leqslant n+1$, par décroissance de g_1 (monotonie identique à g sur $]-\infty;0[$)sur $]1;+\infty[$, on a :

$$g_1(n) \geqslant g_1(n+1)$$

    Autrement dit :

$$\alpha_n \geqslant \alpha_{n+1}$$

    Conclusion : la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante.

  - ⋆ Ensuite :
    - ◇ $\forall n \in [\![2;+\infty[\![,\ \ \alpha_n = g_1(n)$
    - ◇ puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$, on a $\lim\limits_{y\to+\infty} g_1(y) = -\infty$.

    Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = -\infty$.

- On procède de la même façon pour $(\beta_n)_{n\geqslant 2}$.

  Conclusion : la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 2}$ est croissante.

  Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = +\infty$.

Petite remarque

Pour les variations, on pourrait se passer d'introduire g_1 en faisant ainsi :
on a

$$n \leqslant n+1$$

autrement dit $g(\alpha_n) \leqslant g(\alpha_{n+1})$. D'où, par stricte décroissance de g sur $]-\infty;0[$ et comme $\alpha_n, \alpha_{n+1} \in]-\infty;0[$, on a

$$\alpha_n \geqslant \alpha_{n+1}$$

En revanche, pour la limite, pas trop le choix pour faire les choses proprement que de procéder comme je l'ai fait.

4.b. Établir : $\forall n \in [\![2;+\infty[\![,\ -n \leqslant \alpha_n \leqslant -n+1$. En déduire un équivalent de α_n lorsque n tend vers $+\infty$.

- Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$.
  On a :
  - ⋆ $g(\alpha_n) = n$;
  - ⋆ $g(-n) = e^{-n} + n$, donc

$$g(-n) \geqslant n$$

  - ⋆ $g(-n+1) = e^{-n+1} + n - 1$, et $n \geqslant 2$, donc $-n+1 \leqslant -1$ et ainsi $e^{-n+1} \leqslant 1$, d'où :

$$g(-n+1) \leqslant n$$

  D'où :

$$g(-n+1) \leqslant g(\alpha_n) \leqslant g(n)$$

  Et ainsi, par stricte décroissance de g sur $]-\infty;0[$, licite car $-n, \alpha, -n+1 \in]0;+\infty[$:

$$-n+1 \geqslant \alpha_n \geqslant n$$

  Conclusion : $\forall n \in [\![2;+\infty[\![,\ \ -n \leqslant \alpha_n \leqslant -n+1$.

- ⋆ D'après ce qui précède, pour tout $n \in [\![2;+\infty[\![$, on a $-n \neq 0$ et ainsi :

$$1 \geqslant \frac{\alpha_n}{-n} \geqslant 1 - \frac{1}{n}$$

* Or $\lim_{n\to+\infty} 1-\frac{1}{n}=1$.

Donc par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\alpha_n}{-n}=1$$

Conclusion : $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -n$.

4.c. Soit $n\in[\![2;+\infty[\![$. Démontrer : $1\leqslant g\big(\ln(n)\big)\leqslant n$. En déduire : $g\big(\ln(2n)\big)\geqslant n$.

- On a :

$$\begin{aligned} g\big(\ln(n)\big) &= \mathrm{e}^{\ln(n)}-\ln(n)\\ &= n-\ln(n)\end{aligned}$$

Or :

* $n\geqslant 1$, donc $\ln(n)\geqslant 0$;
* la fonction ln est concave, donc sa courbe représentative est partout au-dessous de toutes ses tangentes et en particulier de sa tangente au point d'abscisse 1 dont l'équation réduite est $y=x-1$. Ainsi :

$$\forall x\in\mathbb{R}_*^+,\ \ln(x)\leqslant x-1$$

D'où :

$$\ln(n)\leqslant n-1$$

Et ainsi :

$$n-\ln(n)\geqslant 1$$

Par transitivité, on a ainsi :

$$1\leqslant n-\ln(n)\leqslant n$$

Conclusion : $1\leqslant g\big(\ln(n)\big)\leqslant n$.

- Ensuite :

$$\begin{aligned} g\big(\ln(2n)\big) &= 2n-\ln(2n)\\ &= n-\ln(2)+n-\ln(n)\\ &= n-\ln(2)+g\big(\ln(n)\big)\\ &\geqslant n-\ln(2)+1 \end{aligned}$$

point précédent

Or $2\leqslant \mathrm{e}$, donc $\ln(2)\leqslant 1$... D'où :

$$n-\ln(2)+1\geqslant n$$

Conclusion : par transitivité, $g\big(\ln(n)\big)\geqslant n$.

4.d. En déduire : $\forall n\in[\![2;+\infty[\![,\ \ln(n)\leqslant\beta_n\leqslant\ln(2n)$ puis déterminer un équivalent simple de β_n lorsque n tend vers $+\infty$.

- Soit $n\in[\![2;+\infty[\![$. On a $g(\beta_n)=n$. D'où, d'après la question précédente :

$$g\big(\ln(n)\big)\leqslant g(\beta_n)\leqslant g\big(\ln(2n)\big)$$

Et ainsi, par stricte croissance de g sur $]0;+\infty[$, licite car $\ln(n),\beta,\ln(2n)\in]0;+\infty[$:

$$\ln(n)\leqslant\beta_n\leqslant\ln(2n)$$

Conclusion : $\forall n\in[\![2;+\infty[\![,\ \ln(n)\leqslant\beta_n\leqslant\ln(2n)$.

- * D'après ce qui précède, pour tout $n\in[\![2;+\infty[\![$, on a $\ln(n)\neq 0$ et ainsi :

$$1\geqslant\frac{\beta_n}{\ln(n)}\geqslant 1+\frac{\ln(2)}{\ln(n)}$$

  * Or $\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{\ln(2)}{\ln(n)}=1$.

Donc par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\beta_n}{\ln(n)}=1$$

Conclusion : $\beta_n \underset{n\to+\infty}{\sim}\ln(n)$.