EDHEC 1997 voie E

Exercice 2

Énoncé

Soit p un entier naturel fixé. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \dfrac{1}{\binom{n+p}{p}}$.

1. Montrer que si $p \in \{0; 1\}$, alors la série de terme général u_n diverge.

Dans la suite, on suppose que $p \geqslant 2$ et on note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

2. 2.a. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+p+2)u_{n+2} = (n+2)u_{n+1}$.
   2.b. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = 1 + \dfrac{1}{p-1}\big(1-(n+p+1)u_{n+1}\big)$.
3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = (n+p)u_n$.
   3.a. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   3.b. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ positif ou nul.
   3.c. Montrer que la série de terme général u_n converge et donner sa somme fonction de p et ℓ.
4. On suppose, dans cette question seulement, que $\ell \neq 0$.
   4.a. Établir : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ell}{n}$.
   4.b. En déduire une contradiction avec la question 3.
5. Conclure sur la valeur de ℓ et en déduire, en fonction de p, la somme de la série de terme général u_n.

Corrigé

Soit p un entier naturel fixé. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \dfrac{1}{\binom{n+p}{p}}$.

> **Modification**
> Dans le sujet initial, u_n n'était défini que pour $n \neq 0$; et dans la suite, on étudiait donc $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ et on posait $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.
> Je fais le choix d'étudier le tout dès le rang 0.

1. Montrer que si $p \in \{0; 1\}$, alors la série de terme général u_n diverge.

- Si $p = 0$:
Dans ce cas, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{\binom{n}{0}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Or la série $\sum_{n \geqslant 0} 1$ est grossièrement divergente.

> **☞ Rappel...**
> Si $\sum v_n$ CV alors (v_n) CV vers 0. D'où (contraposée) : si (v_n) ne CV pas vers 0, alors $\sum v_n$ DV.

Conclusion : si $p = 0$, alors $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ est divergente.

- Si $p = 1$:
Dans ce cas, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{\binom{n+1}{1}} \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Or la série $\sum_{n \geqslant 0} \dfrac{1}{n+1}$ est, à décalage d'indice près, la série harmonique ; donc elle est divergente.

> **Petite remarque**
> On pourrait également utiliser un équivalent...

Conclusion : si $p = 1$, alors $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ est divergente.

Dans la suite, on suppose que $p \geqslant 2$ et on note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

2. 2.a. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+p+2)u_{n+2} = (n+2)u_{n+1}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} (n+p+2)u_{n+2} &= (n+p+2)\frac{1}{\binom{n+2+p}{p}} \\ &= (n+p+2)\frac{1}{\frac{(n+p+2)!}{p!(n+2)!}} \\ &= \frac{(n+p+2)p!(n+2)!}{(n+p+2)!} \\ &= \frac{p!(n+2)!}{(n+p+1)!} \qquad n+p+2 \neq 0 \\ &= (n+2)\frac{p!(n+1)!}{(n+p+1)!} \\ &= (n+2)\frac{1}{\frac{(n+p+1)!}{p!(n+1)!}} \\ &= (n+2)\frac{1}{\binom{n+p+1}{p}} \\ &= (n+2)u_{n+1} \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+p+2)u_{n+2} = (n+2)u_{n+1}$.

2.b. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = 1 + \dfrac{1}{p-1}\big(1 - (n+p+1)u_{n+1}\big)$.

> **Petite remarque**
> Dans l'énoncé initial, il était précisé de raisonner par récurrence.

Procédons par récurrence.

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
  - ⋆ D'une part :

$$\begin{aligned} S_0 &= u_0 \\ &= \frac{1}{\binom{p}{p}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

⋆ D'autre part :

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{p-1}\big(1-(p+1)u_1\big) &= 1+\frac{1}{p-1}\left(1-(p+1)\frac{1}{\binom{p+1}{p}}\right)\\ &= 1+\frac{1}{p-1}\left(1-(p+1)\frac{1}{p+1}\right)\\ &= 1\end{aligned}$$

On a finalement $S_0 = 1+\dfrac{1}{p-1}\big(1-(p+1)u_1\big)$: l'initialisation est vérifiée.

- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $S_n = 1+\dfrac{1}{p-1}\big(1-(n+p+1)u_{n+1}\big)$ et montrons $S_{n+1} = 1+\dfrac{1}{p-1}\big(1-(n+p+2)u_{n+2}\big)$.
  On a :

$$\begin{aligned}S_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} u_k\\ &= S_n + u_{n+1}\\ &= 1+\frac{1}{p-1}\big(1-(n+p+1)u_{n+1}\big)+u_{n+1} && \text{hypothèse de récurrence}\\ &= 1+\frac{1}{p-1}\big(1-(n+p+1)u_{n+1}+(p-1)u_{n+1}\big)\\ &= 1+\frac{1}{p-1}\big(1-(n+p+1-p+1)u_{n+1}\big)\\ &= 1+\frac{1}{p-1}\big(1-(n+2)u_{n+1}\big)\\ &= 1+\frac{1}{p-1}\big(1-(n+p+2)u_{n+2}\big) && \text{question précédente}\end{aligned}$$

Petite remarque
Il y a plusieurs façons de s'y prendre pour cette hérédité : on peut également utiliser la question précédente pour remplacer u_{n+1} par $\dfrac{n+p+2}{n+2}u_{n+2}$ lors des premières étapes.

L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = 1+\dfrac{1}{p-1}\big(1-(n+p+1)u_{n+1}\big)$.

3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = (n+p)u_n$.

3.a. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}v_{n+1}-v_n &= (n+p+1)u_{n+1}-(n+p)u_n\\ &= (n+1)u_n-(n+p)u_n && \text{en procédant comme en 2.a}\\ &= (1-p)u_n\\ &\leqslant 0 && u_n>0 \text{ et } p\geqslant 2\end{aligned}$$

Petite remarque
Il est bien entendu possible de détailler l'ensemble du calcul, comme en question 2.a. Mais en examinant ce qui avait été fait, on voit que la relation est encore valable au rang d'avant...

On a établi :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1}-v_n \leqslant 0$$

Conclusion : la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

3.b. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ positif ou nul.
On sait que :

- d'après la question précédente, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ;
- la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée (par 0).

Conclusion : par théorème de convergence monotone, on en déduit que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ.
Puisque $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, on a $\ell \geqslant 0$.

3.c. Montrer que la série de terme général u_n converge et donner sa somme fonction de p et ℓ.
D'après la question précédente :

$$\lim_{n\to+\infty}(n+p)u_n = \ell$$

D'où :

$$\lim_{n\to+\infty}(n+p+1)u_{n+1} = \ell$$

Or, d'après la question 2.b :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = 1+\frac{1}{p-1}\big(1-(n+p+1)u_{n+1}\big)$$

D'où, par opérations sur les limites :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = 1 + \frac{1}{p-1}(1-\ell)$$

Conclusion : la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 1 + \frac{1-\ell}{p-1}$.

4. On suppose, dans cette question seulement, que $\ell \neq 0$.

4.a. Établir : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ell}{n}$.

On sait que :

✓ $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$,

✓ $\ell \neq 0$

D'où :

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell$$

Autrement dit :

$$(n+p)u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell$$

Ainsi :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ell}{n+p}$$

Or $n+p \underset{n\to+\infty}{\sim} p$.

Conclusion : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ell}{n}$.

4.b. En déduire une contradiction avec la question 3.

On a ainsi :

✓ $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ell}{n}$,

✓ $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geqslant 0,\ \frac{\ell}{n} \geqslant 0$ (car $\ell \geqslant 0$),

✓ la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est divergente (série harmonique) donc, puisque $\ell \neq 0$, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ell}{n}$ est également divergente.

Important !
Il est important de mentionner que $\ell \neq 0$, car la série de terme général constant égal à 0 est bien convergente...

Conclusion : par critère de comparaison (par équivalence) sur les séries à termes généraux positifs, on en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est divergente : contradiction avec la question 3.c.

5. Conclure sur la valeur de ℓ et en déduire, en fonction de p, la somme de la série de terme général u_n.

D'après la question précédente, l'hypothèse "$\ell \neq 0$" est fausse.

Par conséquent :

$$\ell = 0$$

Conclusion : d'après la question 3.c, on obtient : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 1 + \frac{1}{p-1} = \frac{p}{p-1}$.