

ÉNONCÉ

1. Préliminaires.

Soit $x \in]0; 1[$. Dans une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes, de même probabilité d'échec x , on définit deux suites de variables aléatoires $(S_n)_{n \geq 1}$ et $(T_n)_{n \geq 1}$ de la façon suivante :

- pour tout entier naturel non nul n , S_n est la variable aléatoire égale au nombre d'épreuves nécessaire pour obtenir le n -ième succès ;
 - T_1 est la variable aléatoire égale à S_1 et, pour tout entier naturel $n \geq 2$, T_n est la variable aléatoire égale au nombre d'épreuves supplémentaires nécessaires pour obtenir le n -ième succès après le $(n-1)$ -ième succès.
- Ainsi, pour tout $n \geq 2$, $T_n = S_n - S_{n-1}$; et on admet que les variables aléatoires T_1, \dots, T_n sont indépendantes.

1.a. Pour tout entier naturel n non nul, déterminer la loi de T_n et, sans calcul, donner l'espérance et la variance de T_n .

1.b. Exprimer, pour tout entier naturel non nul n , la variable aléatoire S_n en fonction des variables aléatoires T_1, \dots, T_n .

1.c. Pour tout entier naturel non nul n , montrer que la variable aléatoire S_n admet une espérance et une variance, et que l'on a :

$$\mathbb{E}(S_n) = \frac{n}{1-x} \quad ; \quad \mathbb{V}(S_n) = \frac{nx}{(1-x)^2}$$

1.d. Soit n un entier naturel non nul. Déterminer la loi de S_n .

1.e. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} x^k = \frac{x^n}{(1-x)^n}$$

2. Deux joueurs A et B procèdent chacun à une succession de lancers d'une même pièce. A chaque lancer, la probabilité d'obtenir PILE est p (p fixé, $p \in]0; 1[$), et la probabilité d'obtenir FACE est $q = 1 - p$.

- Le joueur A commence et il s'arrête quand il obtient le premier PILE. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués par le joueur A .
- Le joueur B effectue alors autant de lancers que le joueur A et on note Y la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus par le joueur B .

2.a. Rappeler la loi de X et, pour tout $k \geq 1$, déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $[X = k]$.

2.b. Quelles sont les valeurs prises par Y ?

2.c. Montrer :

$$\mathbb{P}([Y = 0]) = \sum_{k=1}^{+\infty} p q^{2k-1} = \frac{q}{1+q}$$

2.d. Soit n un entier naturel non nul. Montrer :

$$\mathbb{P}([Y = n]) = \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} p^{n+1} q^{2k-n-1}$$

puis, en utilisant la question 1.e. :

$$\mathbb{P}([Y = n]) = \frac{1}{(1+q)^2} \left(\frac{q}{1+q} \right)^{n-1}$$

CORRIGÉ

1. Préliminaires.

Soit $x \in]0; 1[$. Dans une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes, de même probabilité d'échec x , on définit deux suites de variables aléatoires $(S_n)_{n \geq 1}$ et $(T_n)_{n \geq 1}$ de la façon suivante :

- pour tout entier naturel non nul n , S_n est la variable aléatoire égale au nombre d'épreuves nécessaire pour obtenir le n -ième succès ;
- T_1 est la variable aléatoire égale à S_1 et, pour tout entier naturel $n \geq 2$, T_n est la variable aléatoire égale au nombre d'épreuves supplémentaires nécessaires pour obtenir le n -ième succès après le $(n-1)$ -ième succès. Ainsi, pour tout $n \geq 2$, $T_n = S_n - S_{n-1}$; et on admet que les variables aléatoires T_1, \dots, T_n sont indépendantes.

1.a. Pour tout entier naturel n non nul, déterminer la loi de T_n et, sans calcul, donner l'espérance et la variance de T_n .

- ✓ Après le tirage ayant permis d'obtenir le $(n-1)$ -ième succès, l'expérience consiste en une infinité de répétitions d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes dont le succès est de probabilité $1-x$.
- ✓ La variable aléatoire T_n prend alors comme valeur le rang du premier succès.

Conclusion : T_n suit la loi géométrique de paramètre $1-x$ et ainsi :

$$T_n(\Omega) = \mathbb{N}^* ; \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}([T_n = k]) = x^{k-1}(1-x) ; \quad \mathbb{E}(T_n) = \frac{1}{1-x} ; \quad \mathbb{V}(T_n) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

1.b. Exprimer, pour tout entier naturel non nul n , la variable aléatoire S_n en fonction des variables aléatoires T_1, \dots, T_n .

Soit $n \in \llbracket 2; +\infty \llbracket$. On a :

$$\forall k \in \llbracket 2; +\infty \llbracket, \quad T_k = S_k - S_{k-1}$$

D'où, en sommant de 2 à n :

$$\sum_{k=2}^n T_k = \sum_{k=2}^n (S_k - S_{k-1})$$

Autrement, par télescopage :

$$\sum_{k=2}^n T_k = S_n - S_1$$

Et comme $S_1 = T_1$, on obtient :

$$S_n = \sum_{k=1}^n T_k$$

On remarque que cette égalité est encore valable si $n = 1$..

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^n T_k$.

1.c. Pour tout entier naturel non nul n , montrer que la variable aléatoire S_n admet une espérance et une variance, et que l'on a :

$$\mathbb{E}(S_n) = \frac{n}{1-x} ; \quad \mathbb{V}(S_n) = \frac{nx}{(1-x)^2}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, S_n est une somme de variables aléatoires admettant une espérance et une variance ; donc S_n admet également une espérance et une variance ; et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_n) &= \mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^n T_k \right) && \left. \begin{array}{l} \text{linéarité de l'espérance} \\ \text{question 1.a.} \end{array} \right\} \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(T_k) \\ &= \frac{n}{1-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(S_n) &= \mathbb{V} \left(\sum_{k=1}^n T_k \right) && \left. \begin{array}{l} T_1, \dots, T_n \text{ sont indépendantes} \\ \text{question 1.a.} \end{array} \right\} \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(T_k) \\ &= \frac{nx}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{E}(S_n) = \frac{n}{1-x} ; \mathbb{V}(S_n) = \frac{nx}{(1-x)^2}.$$

1.d. Soit n un entier naturel non nul. Déterminer la loi de S_n .

- Si $n = 1$:
On sait que $S_1 = T_1$ et T_1 suit la loi géométrique de paramètre $1-x$.
- Si $n \geq 2$:
* On a déjà :

$$S_n(\Omega) = \llbracket n; +\infty \llbracket$$

- * Soit $k \in \llbracket n; +\infty \llbracket$.

$[S_n = k]$ est réalisé si, et seulement si, le n -ième succès a lieu lors de la k -ième épreuve
si, et seulement si, on a obtenu $n-1$ succès sur les épreuves 1 à $k-1$ et un succès à l'épreuve k

Ainsi, en notant :

- × X_{k-1} la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenu sur les épreuves 1 à $k-1$,
- × E_k l'évènement "obtenir un échec à l'épreuve k ",

on a :

$$[S_n = k] = [X_{k-1} = n-1] \cap \overline{E_k}$$

D'où :

$$\mathbb{P}([S_n = k]) = \mathbb{P}([X_{k-1} = n-1] \cap \overline{E_k})$$

Or seules les épreuves 1 à $k-1$ entrent en jeu dans la réalisation de l'évènement $[X_{k-1} = n-1]$; donc, puisque les lancers sont indépendants, les évènements $[X_{k-1} = n-1]$ et $\overline{E_k}$ le sont aussi. Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([S_n = k]) &= \mathbb{P}([X_{k-1} = n-1])\mathbb{P}(\overline{E_k}) \\ &= \binom{k-1}{n-1} (1-x)^{n-1} x^{k-n} \times (1-x) \quad \leftarrow X_{k-1} \hookrightarrow \mathcal{B}(k-1; 1-x) \text{ et } n-1 \in \llbracket 0; k-1 \rrbracket \\ &= \binom{k-1}{n-1} (1-x)^n x^{k-n} \end{aligned}$$

On remarque alors que les deux cas se regroupent...

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n(\Omega) = \llbracket n; +\infty \llbracket ; \forall k \in \llbracket n; +\infty \llbracket, \mathbb{P}([S_n = k]) = \binom{k-1}{n-1} (1-x)^n x^{k-n}$$

Remarque

Puisque la détermination de l'ensemble image ne fait pas l'objet de la question, on se contente de le donner sans le justifier.

★ Pour l'oral d'HEC ★

On peut justifier autrement ce résultat :

- les issues de $[S_n = k]$ sont toutes équiprobables
- chaque issue de $[S_n = k]$ est constituée de n succès et $k-n$ échecs; la probabilité qu'elle apparaisse est donc égale à $(1-x)^n x^{k-n}$
- chaque issue de $[S_n = k]$ se termine par un succès; pour le reste, il suffit de placer $n-1$ succès sur les $k-1$ résultats précédents : il y a $\binom{k-1}{n-1}$ telles possibilités.

1.e. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} x^k = \frac{x^n}{(1-x)^n}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $S_n(\Omega) = \llbracket n; +\infty \llbracket$, on sait que la série $\sum_{k \geq n} \mathbb{P}([S_n = k])$ est convergente et de somme égale à 1.

D'où, d'après la question précédente :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} (1-x)^n x^{k-n} = 1$$

Autrement dit :

$$\frac{(1-x)^n}{x^n} \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} x^k = 1$$

D'où le résultat, puisque $x \neq 0$ et $1-x \neq 0$.

$$\text{Conclusion : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} x^k = \frac{x^n}{(1-x)^n}.$$

2. Deux joueurs A et B procèdent chacun à une succession de lancers d'une même pièce. A chaque lancer, la probabilité d'obtenir PILE est p (p fixé, $p \in]0; 1[$), et la probabilité d'obtenir FACE est $q = 1-p$.

- Le joueur A commence et il s'arrête quand il obtient le premier PILE. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués par le joueur A .
- Le joueur B effectue alors autant de lancers que le joueur A et on note Y la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus par le joueur B .

2.a. Rappeler la loi de X et, pour tout $k \geq 1$, déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $[X = k]$.

- ✓ L'expérience, pour le joueur A , consiste en une infinité de répétitions indépendantes de la même épreuve de Bernoulli dont le succès "obtenir PILE" est de probabilité p .
- ✓ La variable aléatoire X prend alors comme valeur le rang du premier succès.

Conclusion : $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, d'où :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* ; \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}([X = k]) = (1-p)^{k-1}p$$

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons l'évènement $[X = k]$ réalisé ; c'est-à-dire que le joueur A a effectué k lancers. Sous cette hypothèse :
 - ✓ l'expérience, pour le joueur B , consiste en k répétitions indépendantes de la même épreuve de Bernoulli dont le succès "obtenir PILE" est de probabilité p ;
 - ✓ la variable aléatoire Y prend alors comme valeur le nombre de succès obtenus.

Conclusion : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X = k]$ est la loi binomiale de paramètres k et p ; d'où :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}_{[X=k]}([Y = i]) = \begin{cases} \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i} & \text{si } i \in \llbracket 0; k \rrbracket \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque

On conclut en donnant les valeurs pour tout $i \in \mathbb{N}$ pour deux raisons :

- on ne peut faire figurer autrement le support de cette loi, comme on le fait habituellement en précisant l'ensemble image de la variable aléatoire en jeu, qu'en précisant pour quelles valeurs la probabilité est non nulle et pour lesquelles elle est nulle...
- on anticipe ce qui sera fait ensuite : $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et on aura besoin de remplacer $\mathbb{P}_{[X=k]}([Y = i])$ par sa valeur pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$... Il ne faut alors pas se tromper !

2.b. Quelles sont les valeurs prises par Y ?

Démontrons que $Y(\Omega) = \mathbb{N}$. Procédons par double inclusion.

⊂ La variable aléatoire Y prend comme valeurs le nombre de PILE obtenus sur une succession de lancers : Y prend donc des valeurs entières positives. D'où :

$$Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$$

⊃ Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $n \in Y(\Omega)$. Autrement dit, montrons que $[Y = n] \neq \emptyset$.
Considérons l'issue définie par :

- * le joueur A obtient FACE des lancers 1 à $n - 1$, puis PILE au lancer n ;
- * le joueur B (qui lance alors n fois la pièce) obtient n PILE.

Cette issue réalise l'évènement $[Y = n]$... D'où : $n \in Y(\Omega)$ et ainsi :

$$\mathbb{N} \subset Y(\Omega)$$

Conclusion : $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

Attention !

~~$Y(\Omega) = \llbracket 0; k \rrbracket$~~ : ça n'aurait aucun sens ! La variable aléatoire Y ne dépend d'aucun k ... Il ne faut pas confondre la loi conditionnelle de Y sachant $[X = k]$ (qui est la loi binomiale de paramètre k et p , on retrouve bien $\llbracket 0; k \rrbracket$ comme support de cette loi...) et la loi de Y .

2.c. Montrer :

$$\mathbb{P}([Y = 0]) = \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{2k-1} = \frac{q}{1+q}$$

D'après la formule des probabilités totales, avec $([X = k])_{k \in \mathbb{N}^*}$ comme système complet d'évènements, la série $\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = 0])$ est convergente et :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Y = 0]) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = 0]) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k]) \mathbb{P}_{[X=k]}([Y = 0]) && \forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}([X = k]) \neq 0 \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{k-1} p \binom{k}{0} p^0 (1-p)^k && \text{question 1.a.} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{2k-1} \\ &= pq \sum_{k=1}^{+\infty} q^{2k-2} \\ &= pq \sum_{k=1}^{+\infty} (q^2)^{k-1} \\ &= pq \sum_{n=0}^{+\infty} (q^2)^n && \text{changement d'indice } n = k - 1 \end{aligned}$$

Réflexe !

On a la loi conditionnelle, on cherche $\mathbb{P}([Y = 0])$: FPT !

$$\begin{aligned}
&= pq \frac{1}{1-q^2} \\
&= \frac{pq}{(1-q)(1+q)} \\
&= \frac{q}{1+q}
\end{aligned}
\quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right) p=1-q$$

Conclusion : $\mathbb{P}([Y = 0]) = \frac{q}{1+q}$.

2.d. Soit n un entier naturel non nul. Montrer :

$$\mathbb{P}([Y = n]) = \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} p^{n+1} q^{2k-n-1}$$

puis, en utilisant la question 1.e. :

$$\mathbb{P}([Y = n]) = \frac{1}{(1+q)^2} \left(\frac{q}{1+q} \right)^{n-1}$$

D'après la formule des probabilités totales, avec $([X = k])_{k \in \mathbb{N}^*}$ comme système complet d'évènements, la série $\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = n])$ est convergente et :

► Réflexe !
On a la loi conditionnelle, on cherche la loi de Y : FPT !

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Y = n]) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = n]) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k]) \mathbb{P}_{[X=k]}([Y = n]) \\
&= \sum_{k=n}^{+\infty} q^{k-1} p \binom{k}{n} p^n q^{k-n} \\
&= \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} p^{n+1} q^{2k-n-1} \\
&= p^{n+1} \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} q^{2k-n-1} \\
&= p^{n+1} \sum_{j=n+1}^{+\infty} \binom{j-1}{n} q^{2j-n-3} \\
&= \frac{p^{n+1}}{q^{n+3}} \sum_{j=n+1}^{+\infty} \binom{j-1}{(n+1)-1} (q^2)^j \\
&= \frac{p^{n+1}}{q^{n+3}} \frac{(q^2)^{n+1}}{(1-q^2)^{n+1}} \\
&= \frac{p^{n+1}}{q^{n+3}} \frac{q^{2n+2}}{p^{n+1} (1+q)^{n+1}} \\
&= \frac{q^{n-1}}{(1+q)^{n+1}} \\
&= \frac{1}{(1+q)^2} \left(\frac{q}{1+q} \right)^{n-1}
\end{aligned}$$

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}([X = k]) \neq 0$
question 1.a. : $\mathbb{P}_{[X=k]}([Y = n]) = \begin{cases} \binom{k}{n} p^n q^{k-n} & \text{si } k \geq n \\ 0 & \text{si } k < n \end{cases}$
changement d'indice $j = k + 1$
question 1.e., licite car $n+1 \in \mathbb{N}^*$ et $q^2 \in]0, 1[$
 $p = 1 - q$

♥ Astuce du chef ♥
Puisque la somme porte sur k , on change l'écriture des conditions !
Plutôt que d'écrire $n \in \llbracket 0; k \rrbracket$, on écrit seulement $k \geq n$ (car on sait déjà que $n \geq 0$)...

Conclusion : $\mathbb{P}([Y = n]) = \frac{1}{(1+q)^2} \left(\frac{q}{1+q} \right)^{n-1}$.

Remarque
Et cette relation fournit le résultat de la question précédente lorsque l'on prend $n = 0$... C'est normal, car l'hypothèse ' $n > 0$ ' n'a pas servi ici.