Énoncé

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul. On dispose d'une pièce dont la probabilité de faire PILE est $p \in]0;1[$ et de $n+1$ urnes numérotées de 0 à n.
Pour $k \in [\![0;n]\!]$, l'urne numéro k contient k balles vertes et $n-k$ balles rouges.
L'expérience consiste à lancer n fois la pièce, puis piocher une unique balle dans l'urne dont le numéro correspond au nombre de PILE obtenus.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus lors des n lancers et Y la variable aléatoire qui vaut 1 si une balle verte a été tirée, 0 sinon. Toutes les variables aléatoires de l'exercice sont définies sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

1. 1.a. Reconnaître la loi de X. On précisera en particulier $X(\Omega)$ et, pour tout $k \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}\big([X=k]\big)$. Donner $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
   1.b. Calculer $\mathbb{E}(X^2)$.
2. 2.a. Déterminer $\mathbb{P}_{[X=0]}\big([Y=0]\big)$ et $\mathbb{P}_{[X=n]}\big([Y=0]\big)$. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
   2.b. Justifier que pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, on a $\mathbb{P}_{[X=k]}\big([Y=1]\big) = \dfrac{k}{n}$.
   2.c. En déduire :
   $$\mathbb{P}\big([Y=1]\big) = \frac{\mathbb{E}(X)}{n}$$
   2.d. Donner alors la loi de Y ainsi que son espérance et sa variance.
3. 3.a. Montrer que $\mathbb{E}(XY) = p\big(1-p+np\big)$.
   3.b. En déduire la covariance du couple (X, Y).

Corrigé

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul. On dispose d'une pièce dont la probabilité de faire PILE est $p \in]0;1[$ et de $n+1$ urnes numérotées de 0 à n.
Pour $k \in [\![0;n]\!]$, l'urne numéro k contient k balles vertes et $n-k$ balles rouges.
L'expérience consiste à lancer n fois la pièce, puis piocher une unique balle dans l'urne dont le numéro correspond au nombre de PILE obtenus.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus lors des n lancers et Y la variable aléatoire qui vaut 1 si une balle verte a été tirée, 0 sinon. Toutes les variables aléatoires de l'exercice sont définies sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

1. 1.a. Reconnaître la loi de X. On précisera en particulier $X(\Omega)$ et, pour tout $k \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}\big([X=k]\big)$. Donner $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

- Expérience. L'expérience consiste en n répétitions indépendantes d'une épreuve de Bernoulli dont le succès "obtenir PILE" est de probabilité p.
- Variable aléatoire. La variable aléatoire X compte le nombre de succès sur ces n répétitions.

Conclusion : $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n;p)$ et ainsi :

$$X(\Omega) = [\![0;n]\!],\ \forall k \in [\![0;n]\!],\ \mathbb{P}\big([X=k]\big) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad ; \quad \mathbb{E}(X) = np \quad ; \quad \mathbb{V}(X) = np(1-p)$$

1.b. Calculer $\mathbb{E}(X^2)$.
D'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2$$

D'où :

$$np(1-p) = \mathbb{E}(X^2) - (np)^2$$

Conclusion : $\mathbb{E}(X^2) = np\big(1-p+np\big)$.

2. 2.a. Déterminer $\mathbb{P}_{[X=0]}\big([Y=0]\big)$ et $\mathbb{P}_{[X=n]}\big([Y=0]\big)$. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

- Supposons l'évènement $[X=0]$ réalisé ; c'est-à-dire que l'on a obtenu aucun PILE à l'issue des n lancers.
Dans ce cas, on pioche une balle au hasard dans l'urne 0 composée de 0 balle verte et n balles rouges.
Par conséquent, on piochera nécessairement une balle rouge. D'où :

$$\mathbb{P}_{[X=0]}\big([Y=0]\big) = 1$$

- Supposons l'évènement $[X=n]$ réalisé ; c'est-à-dire que l'on a obtenu n PILE sur les n lancers.
Dans ce cas, on pioche une balle au hasard dans l'urne n composée de n balles vertes et 0 balle rouge.
Par conséquent, on piochera nécessairement une balle verte. D'où :

$$\mathbb{P}_{[X=n]}\big([Y=0]\big) = 0$$

- Raisonnons par l'absurde.
Supposons que X et Y sont indépendantes. Dans ce cas, on aurait :

$$\mathbb{P}_{[X=0]}\big([Y=0]\big) = \mathbb{P}\big([Y=0]\big) \quad ; \quad \mathbb{P}_{[X=n]}\big([Y=0]\big) = \mathbb{P}\big([Y=0]\big)$$

Ce qui donnerait, d'après ce qui précède $1 = 0$. D'où l'absurdité.

Conclusion : les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

> ✍ **Rédaction**
> On s'imprègne de cette rédaction pour ce type de question. C'est très fréquent, presque systématique…
> Ne pas hésiter à reformuler ce que signifie la réalisation de l'évènement par lequel on conditionne.

2.b. Justifier que pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, on a $\mathbb{P}_{[X=k]}\big([Y=1]\big) = \dfrac{k}{n}$.
Soit $k \in [\![0;n]\!]$. Supposons l'évènement $[X=k]$ réalisé ; c'est-à-dire que l'on a obtenu k PILE à l'issue des n lancers.
Dans ce cas, on pioche au hasard une balle dans l'urne k ; par conséquent, l'évènement $[Y=1]$ est réalisé si, et seulement si, on pioche une des k balles vertes présentes parmi les n balles de l'urne.
Par équiprobabilité du choix de la balle, on a :

$$\mathbb{P}_{[X=k]}\big([Y=1]\big) = \frac{k}{n}$$

> **Important !**
> L'argument d'**équiprobabilité** du choix de la balle est nécessaire.

Conclusion : pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, on a $\mathbb{P}_{[X=k]}\big([Y=1]\big) = \dfrac{k}{n}$.

2.c. En déduire :

$$\mathbb{P}\big([Y=1]\big) = \frac{\mathbb{E}(X)}{n}$$

➠Réflexe !
On connaît les probas conditionnelles, on veut la probabilité de l'évènement : FPT !

D'après la formule des probabilités totales, avec $\big([X=k]\big)_{k\in[\![0;n]\!]}$ comme système complet d'évènements, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([Y=1]\big) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\big([X=k]\cap[Y=1]\big) && \forall k\in[\![0;n]\!],\ \mathbb{P}\big([X=k]\big)\neq 0\\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\big([X=k]\big)\mathbb{P}_{[X=k]}\big([Y=1]\big) && \text{question précente}\\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\mathbb{P}\big([X=k]\big)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}\big([X=k]\big) && X(\Omega)=[\![0;n]\!]\\
&= \frac{1}{n}\mathbb{E}(X)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{P}\big([Y=1]\big) = \dfrac{\mathbb{E}(X)}{n}$.

Petite remarque
L'énoncé rendrait les choses plus difficiles si la question était de montrer que $\mathbb{P}\big([Y=1]\big)=p$. On serait alors tenté de remplacer l'expression de $\mathbb{P}\big([X=k]\big)$ et donc de refaire le calcul de l'espérance d'une VA suivant la loi $\mathscr{B}(n;p)$.

2.d. Donner alors la loi de Y ainsi que son espérance et sa variance.
Par définition de Y, on a

$$Y(\Omega)=\{0;1\}$$

Par conséquent,Y suit la loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}\big([Y=1]\big)$.
D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([Y=1]\big) &= \frac{\mathbb{E}(X)}{n}\\
&= p && X\hookrightarrow\mathscr{B}(n;p)
\end{aligned}$$

Conclusion : $Y\hookrightarrow\mathscr{B}(p)$ et ainsi $\mathbb{E}(Y)=p$ et $\mathbb{V}(Y)=p(1-p)$.

3. 3.a. Montrer que $\mathbb{E}(XY)=p\big(1-p+np\big)$.
Puisque $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis, la variable aléatoire XY admet une espérance et par théorème de transfert :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= \sum_{k\in X(\Omega)}\sum_{j\in Y(\Omega)} kj\mathbb{P}\big([X=k]\cap[Y=j]\big)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{1} kj\mathbb{P}\big([X=k]\cap[Y=j]\big)\\
&= \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}\big([X=k]\cap[Y=1]\big) && \forall k\in[\![0;n]\!],\ \mathbb{P}\big([X=k]\big)\neq 0\\
&= \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}\big([X=k]\big)\mathbb{P}_{[X=k]}\big([Y=1]\big) && \text{question 2.b}\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} k^2\mathbb{P}\big([X=k]\big) && \text{théorème de transfert, car } X(\Omega)=[\![0;n]\!]\\
&= \frac{1}{n}\mathbb{E}(X^2) && \text{question 1.b}\\
&= p\big(1-p+np\big)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{E}(XY)=p\big(1-p+np\big)$.

☞ Rappel...
Si X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors $\mathrm{Cov}(X,Y)$ existe.
Un cas particulier fréquent : si $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis, alors X et Y ont des moments à tout ordre et donc : $\mathrm{Cov}(X,Y)$ existe.

3.b. En déduire la covariance du couple (X,Y).
Puisque $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis, la covariance du couple (X,Y) existe et, par formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\\
&= p(1-p+np)-np^2 && \text{questions précédente et 1.b}\\
&= p(1-p)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathrm{Cov}(X,Y)=p(1-p)$.