# EML 2005 VOIE E
## EXERCICE 3

## ÉNONCÉ

1. **Préliminaires.**
Soit $x \in ]0;1[$. Dans une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes, de même probabilité d'échec $x$, on définit deux suites de variables aléatoires $(S_n)_{n\geqslant 1}$ et $(T_n)_{n\geqslant 1}$ de la façon suivante :
   - pour tout entier naturel non nul $n$, $S_n$ est la variable aléatoire égale au nombre d'épreuves nécessaire pour obtenir le $n$-ième succès ;
   - $T_1$ est la variable aléatoire égale à $S_1$ et, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $T_n$ est la variable aléatoire égale au nombre d'épreuves supplémentaires nécessaires pour obtenir le $n$-ième succès après le $(n-1)$-ième succès.
   Ainsi, pour tout $n \geqslant 2$, $T_n = S_n - S_{n-1}$ ; et on admet que les variables aléatoires $T_1, \dots, T_n$ sont indépendantes.

1.a. Pour tout entier naturel $n$ non nul, déterminer la loi de $T_n$ et, sans calcul, donner l'espérance et la variance de $T_n$.

1.b. Exprimer, pour tout entier naturel non nul $n$, la variable aléatoire $S_n$ en fonction des variables aléatoires $T_1, \dots, T_n$.

1.c. Pour tout entier naturel non nul $n$, montrer que la variable aléatoire $S_n$ admet une espérance et une variance, et que l'on a :

$$\mathbb{E}(S_n) = \frac{n}{1-x} \quad ; \quad \mathbb{V}(X_n) = \frac{nx}{(1-x)^2}$$

1.d. Soit $n$ un entier naturel non nul. Déterminer la loi de $S_n$.

1.e. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} x^k = \frac{x^n}{(1-x)^n}$$

2. Deux joueurs $A$ et $B$ procèdent chacun à une succession de lancers d'une même pièce. A chaque lancer, la probabilité d'obtenir PILE est $p$ ($p$ fixé, $p \in ]0;1[$), et la probabilité d'obtenir FACE est $q = 1-p$.
   - Le joueur $A$ commence et il s'arrête quand il obtient le premier PILE. On note $X$ la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués par le joueur $A$.
   - Le joueur $B$ effectue alors autant de lancers que le joueur $A$ et on note $Y$ la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus par le joueur $B$.

2.a. Rappeler la loi de $X$ et, pour tout $k \geqslant 1$, déterminer la loi conditionnelle de $Y$ sachant $[X = k]$.

2.b. Quelles sont les valeurs prises par $Y$ ?

2.c. Montrer :

$$\mathbb{P}([Y=0]) = \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{2k-1} = \frac{q}{1+q}$$

2.d. Soit $n$ un entier naturel non nul. Montrer :

$$\mathbb{P}([Y=n]) = \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} p^{n+1} q^{2k-n-1}$$

puis, en utilisant la question 1.e :

$$\mathbb{P}([Y=n]) = \frac{1}{(1+q)^2} \left(\frac{q}{1+q}\right)^{n-1}$$

# Corrigé

1. **Préliminaires.**
Soit $x \in ]0;1[$. Dans une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes, de même probabilité d'échec $x$, on définit deux suites de variables aléatoires $(S_n)_{n\geqslant 1}$ et $(T_n)_{n\geqslant 1}$ de la façon suivante :
   - pour tout entier naturel non nul $n$, $S_n$ est la variable aléatoire égale au nombre d'épreuves nécessaire pour obtenir le $n$-ième succès ;
   - $T_1$ est la variable aléatoire égale à $S_1$ et, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $T_n$ est la variable aléatoire égale au nombre d'épreuves supplémentaires nécessaires pour obtenir le $n$-ième succès après le $(n-1)$-ième succès.
   Ainsi, pour tout $n \geqslant 2$, $T_n = S_n - S_{n-1}$ ; et on admet que les variables aléatoires $T_1, \dots, T_n$ sont indépendantes.

**1.a.** Pour tout entier naturel $n$ non nul, déterminer la loi de $T_n$ et, sans calcul, donner l'espérance et la variance de $T_n$.

- Expérience. Après le tirage ayant permis d'obtenir le $(n-1)$-ième succès, l'expérience consiste en une infinité de répétitions d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes dont le succès est de probabilité $1-x$.
- Variable aléatoire. La variable aléatoire $T_n$ prend alors comme valeur le rang du premier succès.

**Conclusion :** $T_n$ suit la loi géométrique de paramètre $1-x$ et ainsi :

$$T_n(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad ; \quad \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big([T_n = k]\big) = x^{k-1}(1-x) \quad ; \quad \mathbb{E}(T_n) = \frac{1}{1-x} \quad ; \quad \mathbb{V}(T_n) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

**1.b.** Exprimer, pour tout entier naturel non nul $n$, la variable aléatoire $S_n$ en fonction des variables aléatoires $T_1, \dots, T_n$.

Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$. On a :

$$\forall k \in [\![2;+\infty[\![,\ T_k = S_k - S_{k-1}$$

D'où, en sommant de 2 à $n$ :

$$\sum_{k=2}^{n} T_k = \sum_{k=2}^{n} (S_k - S_{k-1})$$

Autrement, par télescopage :

$$\sum_{k=2}^{n} T_k = S_n - S_1$$

Et comme $S_1 = T_1$, on obtient :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} T_k$$

On remarque que cette égalité est encore valable si $n = 1$...

**Conclusion :** $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} T_k$.

**1.c.** Pour tout entier naturel non nul $n$, montrer que la variable aléatoire $S_n$ admet une espérance et une variance, et que l'on a :

$$\mathbb{E}(S_n) = \frac{n}{1-x} \quad ; \quad \mathbb{V}(X_n) = \frac{nx}{(1-x)^2}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, $S_n$ est une somme de variables aléatoires admettant une espérance et une variance ; donc $S_n$ admet également une espérance et une variance ; et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_n) &= \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} T_k\right) && \text{linéarité de l'espérance} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(T_k) && \text{question 1.a} \\
&= \frac{n}{1-x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(S_n) &= \mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n} T_k\right) && T_1, \dots, T_n \text{ sont indépendantes} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(T_k) && \text{question 1.a} \\
&= \frac{nx}{(1-x)^2}
\end{aligned}$$

> **Conclusion :** $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(S_n) = \dfrac{n}{1-x}$ ; $\mathbb{V}(X_n) = \dfrac{nx}{(1-x)^2}$.

**1.d.** Soit $n$ un entier naturel non nul. Déterminer la loi de $S_n$.

- Si $n = 1$ :
  On sait que $S_1 = T_1$ et $T_1$ suit la loi géométrique de paramètre $1 - x$.
- Si $n \geqslant 2$ :
  - ⋆ On a déjà :
  $$S_n(\Omega) = [\![n ; +\infty[\![$$
  - ⋆ Soit $k \in [\![n ; +\infty[\![$.

| | | |
|---|---|---|
| $[S_n = k]$ est réalisé | si, et seulement si, | le $n$-ième succès a lieu lors de la $k$-ième épreuve |
| | si, et seulement si, | on a obtenu $n-1$ succès sur les épreuves 1 à $k-1$ et un succès à l'épreuve $k$ |

Ainsi, en notant :
- ◇ $X_{k-1}$ la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenu sur les épreuves 1 à $k-1$,
- ◇ $E_k$ l'évènement "obtenir un échec à l'épreuve $k$",

on a :
$$[S_n = k] = [X_{k-1} = n-1] \cap \overline{E_k}$$
D'où :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}([S_n = k]) &= \mathbb{P}\left([X_{k-1} = n-1] \cap \overline{E}_k\right) \\ &= \mathbb{P}\left([X_{k-1} = n-1]\right)\mathbb{P}(\overline{E_k}) \\ &= \binom{k-1}{n-1}(1-x)^{n-1}x^{k-n} \times (1-x) \\ &= \binom{k-1}{n-1}(1-x)^n x^{k-n}\end{aligned}$$
indépendance des épreuves et seules les épreuves 1 à $k-1$ entrent en jeu pour $[X_{k-1} = n-1]$

$X_{k-1} \hookrightarrow \mathscr{B}(k-1 ; 1-x)$ et $n-1 \in [\![0 ; k-1]\!]$

On remarque alors que les deux cas se regroupent...

> **Conclusion :** pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :
> $$S_n(\Omega) = [\![n ; +\infty[\![ \quad ; \quad \forall k \in [\![n ; +\infty[\![,\ \mathbb{P}\left([S_n = k]\right) = \binom{k-1}{n-1}(1-x)^n x^{k-n}$$

**Petite remarque**

Puisque la détermination de l'ensemble image ne fait pas l'objet de la question, on se contente de le donner sans le justifier.

**⋆ Pour l'oral d'HEC ⋆**

On peut justifier autrement ce résultat :
- les issues de $[S_n = k]$ sont toutes équiprobables
- chaque issue de $[S_n = k]$ est constituée de $n$ succès et $k - n$ échecs ; la probabilité qu'elle apparaisse est donc égale à $(1-x)^n x^{k-n}$
- chaque issue de $[S_n = k]$ se termine par un succès ; pour le reste, il suffit de placer $n-1$ succès sur les $k-1$ résultats précédents : il y a $\binom{k-1}{n-1}$ telles possibilités.

**1.e.** En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} x^k = \frac{x^n}{(1-x)^n}$$
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $S_n(\Omega) = [\![n ; +\infty[\![$, on sait que la série $\sum\limits_{k \geqslant n} \mathbb{P}\left([S_n = k]\right)$ est convergente et de somme égale à 1.
D'où, d'après la question précédente :
$$\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1}(1-x)^n x^{k-n} = 1$$
Autrement dit :
$$\frac{(1-x)^n}{x^n} \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} x^k = 1$$
D'où le résultat, puisque $x \neq 0$ et $1 - x \neq 0$.

> **Conclusion :** $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} x^k = \frac{x^n}{(1-x)^n}$.

2. Deux joueurs $A$ et $B$ procèdent chacun à une succession de lancers d'une même pièce. A chaque lancer, la probabilité d'obtenir PILE est $p$ ($p$ fixé, $p \in ]0 ; 1[$), et la probabilité d'obtenir FACE est $q = 1 - p$.
   - Le joueur $A$ commence et il s'arrête quand il obtient le premier PILE. On note $X$ la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués par le joueur $A$.
   - Le joueur $B$ effectue alors autant de lancers que le joueur $A$ et on note $Y$ la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus par le joueur $B$.

**2.a.** Rappeler la loi de $X$ et, pour tout $k \geqslant 1$, déterminer la loi conditionnelle de $Y$ sachant $[X = k]$.

- ⋆ Expérience. L'expérience, pour le joueur $A$, consiste en une infinité de répétitions indépendantes de la même épreuve de Bernoulli dont le succès "obtenir PILE" est de probabilité $p$.
  - ⋆ Variable aléatoire. La variable aléatoire $X$ prend alors comme valeur le rang du premier succès.

**Conclusion :** $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, d'où :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad ; \quad \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big([X = k]\big) = (1-p)^{k-1} p$$

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons l'évènement $[X = k]$ réalisé ; c'est-à-dire que le joueur $A$ a effectué $k$ lancers. Sous cette hypothèse :
  - ⋆ l'expérience, pour le joueur $B$, consiste en $k$ répétitions indépendantes de la même épreuve de Bernoulli dont le succès "obtenir PILE" est de probabilité $p$ ;
  - ⋆ la variable aléatoire $Y$ prend alors comme valeur le nombre de succès obtenus.

**Conclusion :** pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la loi conditionnelle de $Y$ sachant $[X = k]$ est la loi binomiale de paramètres $k$ et $p$ ; d'où :

$$\forall i \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}_{[X=k]}\big([Y = i]\big) = \begin{cases} \dbinom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i} & \text{si } i \in [\![0;k]\!] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Petite remarque**

On conclut en donnant les valeurs pour tout $i \in \mathbb{N}$ pour deux raisons :
• on ne peut faire figurer autrement le support de cette loi, comme on le fait habituellement en précisant l'ensemble image de la variable aléatoire en jeu, qu'en précisant pour quelles valeurs la probabilité est non nulle et pour lesquelles elle est nulle...
• on anticipe ce qui sera fait ensuite : $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et on aura besoin de remplacer $\mathbb{P}_{[X=k]}\big([Y = i]\big)$ par sa valeur pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$... Il ne faut alors pas se tromper !

**✘ Attention !**

$\cancel{Y(\Omega) \neq [\![0;k]\!]}$ : ça n'aurait aucun sens ! La variable aléatoire $Y$ ne dépend d'aucun $k$... Il ne faut pas confondre la loi conditionnelle de $Y$ sachant $[X = k]$ (qui est la loi binomiale de paramètre $k$ et $p$, on retrouve bien $[\![0;k]\!]$ comme support de cette loi...) et la loi de $Y$.

2.b. Quelles sont les valeurs prises par $Y$ ?

Démontrons que $Y(\Omega) = \mathbb{N}$. Procédons par double inclusion.

$\boxed{\subset}$ La variable aléatoire $Y$ prend comme valeurs le nombre de PILE obtenus sur une succession de lancers : $Y$ prend donc des valeurs entières positives. D'où :

$$Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$$

$\boxed{\supset}$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $n \in Y(\Omega)$. Autrement dit, montrons :

$$\exists \omega \in \Omega \ / \ n = Y(\omega)$$

Notons $\omega$ l'issue définie par :
- ⋆ le joueur $A$ obtient FACE des lancers 1 à $n-1$, puis PILE au lancer $n$ ;
- ⋆ le joueur $B$ (qui lance alors $n$ fois la pièce) obtient $n$ PILE.

Dans ce cas :

$$Y(\omega) = n$$

On a ainsi établi :

$$\exists \omega \in \Omega \ / \ n = Y(\omega)$$

D'où : $n \in Y(\Omega)$ et ainsi :

$$\mathbb{N} \subset Y(\Omega)$$

**✍ Rédaction**

Il est équivalent de dire que l'issue $\omega$ ainsi définie réalisé l'évènement $[Y = n]$ : cet évènement est donc non vide et ainsi $n \in Y(\Omega)$.
J'ai choisi de changer un peu les habitudes ici, à voir...

**Conclusion :** $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

2.c. Montrer :

$$\mathbb{P}\big([Y = 0]\big) = \sum_{k=1}^{+\infty} p q^{2k-1} = \frac{q}{1+q}$$

**➠Réflexe !**

On a la loi conditionnelle, on cherche $\mathbb{P}\big([Y = 0]\big)$ : FPT !

D'après la formule des probabilités totales, avec $\big([X = k]\big)_{k \in \mathbb{N}^*}$ comme système complet d'évènements, la série $\sum\limits_{k \geqslant 1} \mathbb{P}\big([X = k] \cap [Y = 0]\big)$ est convergente et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([Y = 0]\big) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X = k] \cap [Y = 0]\big) && \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big([X = k]\big) \neq 0 \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X = k]\big) \mathbb{P}_{[X=k]}\big([Y = 0]\big) && \text{question 1.a} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{k-1} p \binom{k}{0} p^0 (1-p)^k \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} p q^{2k-1} \\
&= pq \sum_{k=1}^{+\infty} q^{2k-2} \\
&= pq \sum_{k=1}^{+\infty} (q^2)^{k-1} && \text{changement d'indice } n = k-1
\end{aligned}$$

$$= pq \sum_{n=0}^{+\infty} (q^2)^n$$

$$= pq \frac{1}{1-q^2}$$

$$= \frac{pq}{(1-q)(1+q)}$$

$$\stackrel{p=1-q}{=} \frac{q}{1+q}$$

> Conclusion : $\mathbb{P}\left([Y=0]\right) = \dfrac{q}{1+q}$.

2.d. Soit $n$ un entier naturel non nul. Montrer :

$$\mathbb{P}\left([Y=n]\right) = \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} p^{n+1} q^{2k-n-1}$$

puis, en utilisant la question 1.e :

$$\mathbb{P}\left([Y=n]\right) = \frac{1}{(1+q)^2} \left(\frac{q}{1+q}\right)^{n-1}$$

**➠Réflexe !**
On a la loi conditionnelle, on cherche la loi de $Y$ : FPT !

D'après la formule des probabilités totales, avec $\left([X=k]\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ comme système complet d'évènements, la série $\sum_{k\geqslant 1} \mathbb{P}\left([X=k]\cap[Y=n]\right)$ est convergente et :

$$\mathbb{P}\left([Y=n]\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left([X=k]\cap[Y=n]\right)$$

$$\stackrel{\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X=k])\neq 0}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left([X=k]\right)\mathbb{P}_{[X=k]}\left([Y=n]\right)$$

question 1.a : $\mathbb{P}_{[X=k]}\left([Y=n]\right) = \begin{cases} \binom{k}{n} p^n q^{k-n} & \text{si } k\geqslant n \\ 0 & \text{si } k<n \end{cases}$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} p \binom{k}{n} p^n q^{k-n}$$

$$= \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} p^{n+1} q^{2k-n-1}$$

$$= p^{n+1} \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} q^{2k-n-1}$$

changement d'indice $j=k+1$

$$= p^{n+1} \sum_{j=n+1}^{+\infty} \binom{j-1}{n} q^{2j-n-3}$$

$$= \frac{p^{n+1}}{q^{n+3}} \sum_{j=n+1}^{+\infty} \binom{j-1}{(n+1)-1} (q^2)^j$$

question 1.e, licite car $n+1\in\mathbb{N}^*$ et $q^2\in]0;1[$

$$= \frac{p^{n+1}}{q^{n+3}} \frac{(q^2)^{n+1}}{(1-q^2)^{n+1}}$$

$$\stackrel{p=1-q}{=} \frac{p^{n+1}}{q^{n+3}} \frac{q^{2n+2}}{p^{n+1}(1+q)^{n+1}}$$

$$= \frac{q^{n-1}}{(1+q)^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{(1+q)^2} \left(\frac{q}{1+q}\right)^{n-1}$$

**♡ Astuce du chef ! ♡**
Puisque la somme porte sur $k$, on change l'écriture des conditions ! Plutôt que d'écrire $n\in[\![0;k]\!]$, on écrit seulement $k\geqslant n$ (car on sait déjà que $n\geqslant 0$)...

> Conclusion : $\mathbb{P}\left([Y=n]\right) = \dfrac{1}{(1+q)^2}\left(\dfrac{q}{1+q}\right)^{n-1}$.

**Petite remarque**
Et cette relation fournit le résultat de la question précédente lorsque l'on prend $n=0$... C'est normal, car l'hypothèse "$n>0$" n'a pas servi ici.