ESC 2009 VOIE E
EXERCICE 3

ÉNONCÉ

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul. On dispose d'une pièce dont la probabilité de faire PILE est $p \in]0;1[$ et de $n+1$ urnes numérotées de 0 à n.
Pour $k \in [\![0;n]\!]$, l'urne numéro k contient k balles vertes et $n-k$ balles rouges.
L'expérience consiste à lancer n fois la pièce, puis piocher une unique balle dans l'urne dont le numéro correspond au nombre de PILE obtenus.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus lors des n lancers et Y la variable aléatoire qui vaut 1 si une balle verte a été tirée, 0 sinon. Toutes les variables aléatoires de l'exercice sont définies sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

1. **1.a.** Reconnaître la loi de X. On précisera en particulier $X(\Omega)$ et, pour tout $k \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}\big([X=k]\big)$. Donner $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
   1.b. Calculer $\mathbb{E}(X^2)$.
2. Écrire une fonction **Python** telle que l'exécution de `simuleY(n,p)` renvoie une réalisation de la variable aléatoire Y.
3. **3.a.** Déterminer $\mathbb{P}_{[X=0]}\big([Y=0]\big)$ et $\mathbb{P}_{[X=n]}\big([Y=0]\big)$. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
   3.b. Justifier que pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, on a $\mathbb{P}_{[X=k]}\big([Y=1]\big) = \dfrac{k}{n}$.
   3.c. En déduire :
$$\mathbb{P}\big([Y=1]\big) = \frac{\mathbb{E}(X)}{n}$$
   3.d. Donner alors la loi de Y ainsi que son espérance et sa variance.
4. **4.a.** Montrer que $\mathbb{E}(XY) = p\big(1-p+np\big)$.
   4.b. En déduire la covariance du couple (X, Y).

Corrigé

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul. On dispose d'une pièce dont la probabilité de faire PILE est $p \in]0;1[$ et de $n+1$ urnes numérotées de 0 à n.
Pour $k \in [\![0;n]\!]$, l'urne numéro k contient k balles vertes et $n-k$ balles rouges.
L'expérience consiste à lancer n fois la pièce, puis piocher une unique balle dans l'urne dont le numéro correspond au nombre de PILE obtenus.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus lors des n lancers et Y la variable aléatoire qui vaut 1 si une balle verte a été tirée, 0 sinon. Toutes les variables aléatoires de l'exercice sont définies sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

1. **1.a.** Reconnaître la loi de X. On précisera en particulier $X(\Omega)$ et, pour tout $k \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}\big([X=k]\big)$. Donner $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

   - ✓ L'expérience consiste en n répétitions indépendantes de la même épreuve de Bernoulli dont le succès "obtenir PILE" est de probabilité p.
   - ✓ La variable aléatoire X compte le nombre de succès sur ces n répétitions.

   ☞ Rappel...
   Pas nécessaire que les épreuves de Bernoulli soient identiques ; du moment qu'elles sont indépendantes et que la probabilité du succès est toujours la même.

   Conclusion : $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n;p)$ et ainsi :

   $$X(\Omega) = [\![0;n]\!], \ \forall k \in [\![0;n]\!], \ \mathbb{P}\big([X=k]\big) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad ; \quad \mathbb{E}(X) = np \quad ; \quad \mathbb{V}(X) = np(1-p)$$

   1.b. Calculer $\mathbb{E}(X^2)$.
   D'après la formule de Koenig-Huygens :

   $$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2$$

   D'où :

   $$np(1-p) = \mathbb{E}(X^2) - (np)^2$$

   Conclusion : $\mathbb{E}(X^2) = np\big(1-p+np\big)$.

2. Écrire une fonction **Python** telle que l'exécution de `simuleY(n,p)` renvoie une réalisation de la variable aléatoire Y.

   Voici :

```python
import numpy.random as rd

def simuleY(n,p):
    X=rd.binomial(n,p)
    if rd.random()<X/n:
        Y=1
    else:
        Y=0
    return Y
```

3. **3.a.** Déterminer $\mathbb{P}_{[X=0]}\big([Y=0]\big)$ et $\mathbb{P}_{[X=n]}\big([Y=0]\big)$. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

   ✍ Rédaction
   On s'imprègne de cette rédaction pour ce type de question. C'est très fréquent, presque systématique...
   Ne pas hésiter à reformuler ce que signifie la réalisation de l'évènement par lequel on conditionne.

   - Supposons l'évènement $[X=0]$ réalisé ; c'est-à-dire que l'on a obtenu aucun PILE à l'issue des n lancers. Dans ce cas, on pioche une balle au hasard dans l'urne 0 composée de 0 balle verte et n balles rouges. Par conséquent, on piochera nécessairement une balle rouge. D'où :

   $$\mathbb{P}_{[X=0]}\big([Y=0]\big) = 1$$

   - Supposons l'évènement $[X=n]$ réalisé ; c'est-à-dire que l'on a obtenu n PILE sur les n lancers. Dans ce cas, on pioche une balle au hasard dans l'urne n composée de n balles vertes et 0 balle rouge. Par conséquent, on piochera nécessairement une balle verte. D'où :

   $$\mathbb{P}_{[X=n]}\big([Y=0]\big) = 0$$

   - Raisonnons par l'absurde.
   Supposons que X et Y sont indépendantes. Dans ce cas, on aurait :

   $$\mathbb{P}_{[X=0]}\big([Y=0]\big) = \mathbb{P}\big([Y=0]\big) \quad ; \quad \mathbb{P}_{[X=n]}\big([Y=0]\big) = \mathbb{P}\big([Y=0]\big)$$

   Ce qui donnerait, d'après ce qui précède $1=0$. D'où l'absurdité.

   Conclusion : les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

3.b. Justifier que pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, on a $\mathbb{P}_{[X=k]}\big([Y=1]\big) = \dfrac{k}{n}$.

Soit $k \in [\![0;n]\!]$. Supposons l'évènement $[X=k]$ réalisé ; c'est-à-dire que l'on a obtenu k PILE à l'issue des n lancers.
Dans ce cas, on pioche au hasard une balle dans l'urne k ; par conséquent, l'évènement $[Y=1]$ est réalisé si, et seulement si, on pioche une des k balles vertes présentes parmi les n balles de l'urne.
Par équiprobabilité du choix de la balle, on a :

$$\mathbb{P}_{[X=k]}\big([Y=1]\big) = \frac{k}{n}$$

Important ! L'argument d'**équiprobabilité** du choix de la balle est nécessaire.

Conclusion : pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, on a $\mathbb{P}_{[X=k]}\big([Y=1]\big) = \dfrac{k}{n}$.

3.c. En déduire :

$$\mathbb{P}\big([Y=1]\big) = \frac{\mathbb{E}(X)}{n}$$

➠Réflexe ! On connaît les probas conditionnelles, on veut la probabilité de l'évènement : FPT !

D'après la formule des probabilités totales, avec $\big([X=k]\big)_{k\in[\![0;n]\!]}$ comme système complet d'évènements, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([Y=1]\big) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\big([X=k]\cap[Y=1]\big) && \forall k \in [\![0;n]\!],\ \mathbb{P}\big([X=k]\big)\neq 0\\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\big([X=k]\big)\mathbb{P}_{[X=k]}\big([Y=1]\big) && \text{question précédente}\\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\mathbb{P}\big([X=k]\big)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}\big([X=k]\big) && X(\Omega)=[\![0;n]\!]\\
&= \frac{1}{n}\mathbb{E}(X)
\end{aligned}$$

Remarque L'énoncé rendrait les choses plus difficiles si la question était de montrer que $\mathbb{P}\big([Y=1]\big) = p$. On serait alors tenté de remplacer l'expression de $\mathbb{P}\big([X=k]\big)$ et donc de refaire le calcul de l'espérance d'une VA suivant la loi $\mathscr{B}(n;p)$.

Conclusion : $\mathbb{P}\big([Y=1]\big) = \dfrac{\mathbb{E}(X)}{n}$.

3.d. Donner alors la loi de Y ainsi que son espérance et sa variance.

Par définition de Y, on a

$$Y(\Omega) = \{0;1\}$$

Par conséquent, Y suit la loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}\big([Y=1]\big)$.
D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([Y=1]\big) &= \frac{\mathbb{E}(X)}{n} && X \hookrightarrow \mathscr{B}(n;p)\\
&= p
\end{aligned}$$

Conclusion : $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ et ainsi $\mathbb{E}(Y) = p$ et $\mathbb{V}(Y) = p(1-p)$.

4. 4.a. Montrer que $\mathbb{E}(XY) = p\big(1-p+np\big)$.

Puisque $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis, $(XY)(\Omega)$ également et donc la variable aléatoire XY admet une espérance ; et par théorème de transfert :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= \sum_{k\in X(\Omega)}\sum_{j\in Y(\Omega)} kj\mathbb{P}\big([X=k]\cap[Y=j]\big)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{1} kj\mathbb{P}\big([X=k]\cap[Y=j]\big)\\
&= \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}\big([X=k]\cap[Y=1]\big) && \forall k \in [\![0;n]\!],\ \mathbb{P}\big([X=k]\big)\neq 0\\
&= \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}\big([X=k]\big)\mathbb{P}_{[X=k]}\big([Y=1]\big) && \text{question 3.b.}\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} k^2\mathbb{P}\big([X=k]\big) && \text{théorème de transfert, car } X(\Omega)=[\![0;n]\!]\\
&= \frac{1}{n}\mathbb{E}(X^2) && \text{question 1.b.}\\
&= p\big(1-p+np\big)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{E}(XY) = p\big(1 - p + np\big)$.

4.b. En déduire la covariance du couple (X, Y).

Puisque $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis, la covariance du couple (X, Y) existe et, par formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\ &= p(1 - p + np) - np^2 \\ &= p(1-p) \end{aligned}$$

questions précédente et 1.b.

Conclusion : $\mathrm{Cov}(X, Y) = p(1 - p)$.

☞ **Rappel...**

Si X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors $\mathrm{Cov}(X, Y)$ existe. Un cas particulier fréquent : si $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis, alors X et Y ont des moments à tout ordre et donc : $\mathrm{Cov}(X, Y)$ existe.