Énoncé

Partie I. Étude d'une variable aléatoire discrète sans mémoire

Soit X une variable aléatoire discrète, à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que : $\forall m \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([X \geqslant m]\big) > 0$.
On suppose également que X vérifie : $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}_{[X\geqslant m]}\big([X \geqslant n+m]\big) = \mathbb{P}\big([X \geqslant n]\big)$.
On pose $p = \mathbb{P}\big([X=0]\big)$ ainsi que $q = 1-p$ et on suppose que $p > 0$.

1. Montrer que $\mathbb{P}\big([X \geqslant 1]\big) = q$ et en déduire que $0 < q < 1$.
2. Montrer que : $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}\big([X \geqslant n+m]\big) = \mathbb{P}\big([X \geqslant m]\big) \times \mathbb{P}\big([X \geqslant n]\big)$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \mathbb{P}\big([X \geqslant n]\big)$.
   - 3.a. Utiliser la relation obtenue à la question 2 pour démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
   - 3.b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $\mathbb{P}\big([X \geqslant n]\big)$ en fonction de n et de q.
   - 3.c. Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([X = n]\big) = \mathbb{P}\big([X \geqslant n]\big) - \mathbb{P}\big([X \geqslant n+1]\big)$.
   - 3.d. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\big([X=n]\big) = q^n p$.
4. 4.a. Reconnaître la loi suivie par la variable aléatoire $X+1$.
   - 4.b. En déduire l'espérance et la variance de X.

Partie II. Taux de panne d'une variable aléatoire discrète

Pour toute variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\big([Y \geqslant n]\big) > 0$, on définit le taux de panne de Y à l'instant n, noté λ_n, par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \lambda_n = \mathbb{P}_{[Y\geqslant n]}\big([Y=n]\big)$$

5. 5.a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \lambda_n = \dfrac{\mathbb{P}\big([Y=n]\big)}{\mathbb{P}\big([Y \geqslant n]\big)}$.
   - 5.b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 1-\lambda_n = \dfrac{\mathbb{P}\big([Y \geqslant n+1]\big)}{\mathbb{P}\big([Y \geqslant n]\big)}$.
   - 5.c. Établir alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \lambda_n < 1$.
   - 5.d. Montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big([Y \geqslant n]\big) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(1-\lambda_k)$.
6. 6.a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}\big([Y=k]\big) = 1 - \mathbb{P}\big([Y \geqslant n]\big)$.
   - 6.b. En déduire : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\big([Y \geqslant n]\big) = 0$.
   - 6.c. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1} -\ln(1-\lambda_k) = +\infty$.
   - 6.d. Conclure quant à la nature de la série de terme général λ_n.

Partie III. Caractérisation des variables aléatoires de même loi que X

7. Déterminer le taux de panne à l'instant n de la variable aléatoire dont la loi a été trouvée en question 3.d.
8. On considère une variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([Z \geqslant n]\big) > 0$. On suppose que le taux de panne de Z est constant égal à λ.
   - 8.a. Démontrer que $\lambda \in]0;1[$.
   - 8.b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $\mathbb{P}\big([Z \geqslant n]\big)$ en fonction de λ et n.
   - 8.c. Conclure que les seules variables aléatoires dont le taux de panne est constant sont les variables aléatoires de même loi que X.

Corrigé

Partie I. Étude d'une variable aléatoire discrète sans mémoire

Soit X une variable aléatoire discrète, à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que : $\forall m \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([X \geqslant m]\big) > 0$.
On suppose également que X vérifie : $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}_{[X \geqslant m]}\big([X \geqslant n+m]\big) = \mathbb{P}\big([X \geqslant n]\big)$.
On pose $p = \mathbb{P}\big([X=0]\big)$ ainsi que $q = 1-p$ et on suppose que $p > 0$.

> **☞ Pour info...** C'est cette égalité qui traduit "l'absence de mémoire".

1. Montrer que $\mathbb{P}\big([X \geqslant 1]\big) = q$ et en déduire que $0 < q < 1$.
   - On sait que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, donc :
   $$\overline{[X \geqslant 1]} = [X = 0]$$
   Ainsi :
   $$\mathbb{P}\big([X \geqslant 1]\big) = 1 - \mathbb{P}\big([X=0]\big)$$
   Conclusion : $\mathbb{P}\big([X \geqslant 1]\big) = q$.
   - On sait que $p > 0$ et $q = 1-p$, donc $q < 1$.
   Et, d'après l'énoncé : $\forall m \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([X \geqslant m]\big) > 0$. En particulier :
   $$\mathbb{P}\big([X \geqslant 1]\big) > 0$$
   Conclusion : $q \in]0;1[$.

2. Montrer que : $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}\big([X \geqslant n+m]\big) = \mathbb{P}\big([X \geqslant m]\big) \times \mathbb{P}\big([X \geqslant n]\big)$.
Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. On a, d'après l'énoncé :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([X \geqslant m]\big) \times \mathbb{P}\big([X \geqslant n]\big) &= \mathbb{P}\big([X \geqslant m)]\big) \times \mathbb{P}_{[X \geqslant m]}\big([X \geqslant n+m]\big)\\ &= \mathbb{P}\big([X \geqslant m] \cap [X \geqslant m+n]\big)\\ &= \mathbb{P}\big([X \geqslant n+m]\big)\end{aligned}$$
$n \geqslant 0$, donc $[X \geqslant m+n] \subset [X \geqslant m]$, d'où $[X \geqslant m] \cap [X \geqslant m+n] = [X \geqslant m+n]$

> **Détails** Soit $\omega \in [X \geqslant m+n]$. Dans ce cas, $X(\omega) \geqslant m+n \geqslant m$, car $n \geqslant 0$. Donc $\omega \in [X \geqslant m]$; d'où l'inclusion $[X \geqslant m+n] \subset [X \geqslant m]$.

Conclusion : $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}\big([X \geqslant n+m]\big) = \mathbb{P}\big([X \geqslant m]\big) \times \mathbb{P}\big([X \geqslant n]\big)$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \mathbb{P}\big([X \geqslant n]\big)$.

3.a. Utiliser la relation obtenue à la question 2 pour démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :
$$\begin{aligned}u_{n+1} &= \mathbb{P}\big([X \geqslant n+1]\big)\\ &= \mathbb{P}\big([X \geqslant 1]\big)\mathbb{P}\big([X \geqslant n]\big)\\ &= q u_n\end{aligned}$$
question précédente avec $m = 1$, licite car $1 \geqslant 0$
question 1

Conclusion : la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison q et de premier terme $u_0 = \mathbb{P}\big([X \geqslant 0]\big)$.

3.b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $\mathbb{P}\big([X \geqslant n]\big)$ en fonction de n et de q.
On vient d'établir que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison q et de premier terme $u_0 = \mathbb{P}\big([X \geqslant 0]\big)$.
Or $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, donc $\mathbb{P}\big([X \geqslant 0]\big) = 1$.
Par conséquent :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = q^n$$
Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([X \geqslant n]\big) = q^n$.

> **★ Classique ! ★** C'est une question très classique sur les variables aléatoires discrètes, dont le résultat est souvent utile (même s'il n'est pas toujours détaillé).

3.c. Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([X = n]\big) = \mathbb{P}\big([X \geqslant n]\big) - \mathbb{P}\big([X \geqslant n+1]\big)$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :
$$\begin{aligned}[X \geqslant n] &= [X = n] \cup [X > n]\\ &= [X = n] \cup [X \geqslant n+1]\end{aligned}$$
X est à valeurs entières et $n \in \mathbb{N}$

D'où :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([X \geqslant n]\big) &= \mathbb{P}\big([X = n] \cup [X \geqslant n+1]\big)\\ &= \mathbb{P}\big([X = n]\big) + \mathbb{P}\big([X \geqslant n+1]\big)\end{aligned}$$
incompatibilité de $[X = n]$ et $[X \geqslant n+1]$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([X = n]\big) = \mathbb{P}\big([X \geqslant n]\big) - \mathbb{P}\big([X \geqslant n+1]\big)$.

> **✓ Rigueur !** • Ne pas oublier l'argument "X est à valeurs entières" (X discrète ne suffit pas !).
> En effet, si on avait $X(\Omega) = \{0;1;1,5;2\}$, $[X > 1] \neq [X \geqslant 2]$...
> • L'argument "$n \in \mathbb{N}$" est également nécessaire (même si, puisque plus naturel, je ne le mentionne pas toujours). En effet, même avec $X(\Omega) = \mathbb{N}$, on a $[X > 0,5] \neq [X \geqslant 1,5]$.

3.d. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\big([X = n]\big) = q^n p$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([X = n]\big) &= \mathbb{P}\big([X \geqslant n]\big) - \mathbb{P}\big([X \geqslant n+1]\big) \\
&= q^n - q^{n+1} && \text{question 3.b} \\
&= q^n(1-q) \\
&= q^n p
\end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\big([X = n]\big) = q^n p$.

Petite remarque

On remarque alors :
$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([X = n]\big) \neq 0$.
D'où : $\forall n \in \mathbb{N},\ [X = n] \neq \varnothing$.
Conséquence : $\mathbb{N} \subset X(\Omega)$ et donc $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

4. 4.a. Reconnaître la loi suivie par la variable aléatoire $X + 1$.

- On sait que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$. Donc :
$$(X+1)(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$$
- Soit ensuite $k \in \mathbb{N}^*$. On a :
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([X+1 = k]\big) &= \mathbb{P}\big([X = k-1]\big) \\
&= q^{k-1} p && \text{question précédente, licite car } k-1 \in \mathbb{N}\ (k \geqslant 1)
\end{aligned}$$

Conclusion : la variable aléatoire $X + 1$ suit la loi géométrique de paramètre p.

4.b. En déduire l'espérance et la variance de X.

- On sait que $X + 1$ admet une espérance et que $X = (X+1) - 1$; donc X admet une espérance et :
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}\big((X+1) - 1\big) \\
&= \mathbb{E}(X+1) - 1 && \text{linéarité de l'espérance} \\
&= \frac{1}{p} - 1 && (X+1) \hookrightarrow \mathscr{G}(p) \\
&= \frac{1-p}{p} \\
&= \frac{q}{p}
\end{aligned}$$
- On sait que $X + 1$ admet une variance et que $X = (X+1) - 1$; donc X admet une variance et :
$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{V}\big((X+1) - 1\big) \\
&= \mathbb{V}(X+1) \\
&= \frac{q}{p^2} && (X+1) \hookrightarrow \mathscr{G}(p)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{E}(X) = \dfrac{q}{p}$ et $\mathbb{V}(X) = \dfrac{q^2}{p}$.

Partie II. Taux de panne d'une variable aléatoire discrète

Pour toute variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\big([Y \geqslant n]\big) > 0$, on définit le taux de panne de Y à l'instant n, noté λ_n, par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \lambda_n = \mathbb{P}_{[Y \geqslant n]}\big([Y = n]\big)$$

5. 5.a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \lambda_n = \dfrac{\mathbb{P}\big([Y = n]\big)}{\mathbb{P}\big([Y \geqslant n]\big)}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
\lambda_n &= \mathbb{P}_{[Y \geqslant n]}\big([Y = n]\big) \\
&= \frac{\mathbb{P}\big([Y = n] \cap [Y \geqslant n]\big)}{\mathbb{P}\big([Y \geqslant n]\big)} \\
&= \frac{\mathbb{P}\big([Y = n]\big)}{\mathbb{P}\big([Y \geqslant n]\big)} && [Y = n] \subset [Y \geqslant n] \text{, donc } [Y = n] \cap [Y \geqslant n] = [Y = n]
\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ \lambda_n = \dfrac{\mathbb{P}\big([Y = n]\big)}{\mathbb{P}\big([Y \geqslant n]\big)}$.

5.b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 1-\lambda_n = \dfrac{\mathbb{P}\big([Y \geqslant n+1]\big)}{\mathbb{P}\big([Y \geqslant n]\big)}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} 1-\lambda_n &= 1 - \frac{\mathbb{P}\big([Y = n]\big)}{\mathbb{P}\big([Y \geqslant n]\big)} \\ &= \frac{\mathbb{P}\big([Y \geqslant n]\big) - \mathbb{P}\big([Y = n]\big)}{\mathbb{P}\big([Y \geqslant n]\big)} \\ &= \mathbb{P}\big([Y = n]\big) + \mathbb{P}\big([Y \geqslant n+1]\big) \end{aligned}$$

de la même façon qu'en question 3.c

Petite remarque
On ne refait pas ce qui a déjà été fait dans les questions précédentes...

> **Conclusion** : $\forall n \in \mathbb{N},\ 1-\lambda_n = \dfrac{\mathbb{P}\big([Y \geqslant n+1]\big)}{\mathbb{P}\big([Y \geqslant n]\big)}$.

5.c. Établir alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \lambda_n < 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- On sait que $\lambda_n = \mathbb{P}_{[Y \geqslant n]}\big([Y = n]\big)$, donc $\lambda_n \geqslant 0$.
- D'après la question précédente :

$$1-\lambda_n = \frac{\mathbb{P}\big([Y \geqslant n+1]\big)}{\mathbb{P}\big([Y \geqslant n]\big)}$$

Or, par hypothèse : $\forall m \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([Y \geqslant m]\big) > 0$, donc en particulier pour $m = n+1$ (licite car $n+1 \in \mathbb{N}$) : $\mathbb{P}\big([Y \geqslant n+1]\big) > 0$.

D'où : $1-\lambda_n = \dfrac{\mathbb{P}\big([Y \geqslant n+1]\big)}{\mathbb{P}\big([Y \geqslant n]\big)} > 0$.

Conclusion : $1-\lambda_n > 0$, et donc $\lambda_n < 1$.

> **Conclusion** : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \lambda_n < 1$.

5.d. Montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big([Y \geqslant n]\big) = \prod_{k=0}^{n-1}(1-\lambda_k)$.

Petite remarque
On peut procéder autrement en faisant le produit, pour k allant de 0 à $n-1$ des $(1-\lambda_k)$ en utilisant la question 5.b : produit télescopique...

- **Initialisation.** Pour $n = 1$:

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{1-1}(1-\lambda_k) = 1-\lambda_0 & \\ &= \frac{\mathbb{P}\big([Y \geqslant 1]\big)}{\mathbb{P}\big([Y \geqslant 0]\big)} \\ &= \mathbb{P}\big([Y \geqslant 1]\big) \end{aligned}$$

question 5.b (licite)

$Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$, donc $\mathbb{P}\big([Y \geqslant 0]\big) = 1$

L'initialisation est vérifiée.

- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathbb{P}\big([Y \geqslant n]\big) = \prod_{k=0}^{n-1}(1-\lambda_k)$ et montrons $\mathbb{P}\big([Y \geqslant n+1]\big) = \prod_{k=0}^{n}(1-\lambda_k)$.

D'après la question 5.b, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big([Y \geqslant n+1]\big) &= (1-\lambda_n)\mathbb{P}\big([Y \geqslant n]\big) \\ &= (1-\lambda_n)\prod_{k=0}^{n-1}(1-\lambda_k) \\ &= \prod_{k=0}^{n}(1-\lambda_k) \end{aligned}$$

hypothèse de récurrence

L'hérédité est ainsi établie.

> **Conclusion** : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big([Y \geqslant n]\big) = \prod_{k=0}^{n-1}(1-\lambda_k)$.

6. 6.a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}\big([Y = k]\big) = 1 - \mathbb{P}\big([Y \geqslant n]\big)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} 1-\mathbb{P}\big([Y \geqslant n]\big) &= \mathbb{P}\big([Y < n]\big) \\ &= \mathbb{P}\big([Y \leqslant n-1]\big) \end{aligned}$$

Y est à valeurs entières et $n \in \mathbb{N}$

puisque $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$, on a $[Y \leqslant n-1] = \bigcup_{k=0}^{n-1}[Y = k]$

$$\begin{aligned} &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n-1}[Y=k]\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}\big([Y=k]\big) \end{aligned}$$

incompatibilité des évènements de la famille $\big([Y=k]\big)_{k\in[\![0;n-1]\!]}$

Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}\big([Y=k]\big)=1-\mathbb{P}\big([Y\geqslant n]\big)$.

6.b. En déduire : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\big([Y\geqslant n]\big)=0$.

D'après la question précédente :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big([Y\geqslant n]\big)=1-\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}\big([Y=k]\big)$$

Or $Y(\Omega)\subset\mathbb{N}$, donc la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\mathbb{P}\big([Y=k]\big)$ est convergente de somme égale à 1.

D'où :

$$\lim_{n\to+\infty}1-\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}\big([Y=k]\big)=0$$

Conclusion : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\big([Y\geqslant n]\big)=0$.

Petite remarque

Question surprenante puisque c'est un résultat qui découle des propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire. Le seul avantage ici en est une démonstration rapide utilisant des arguments élémentaires.

6.c. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}-\ln(1-\lambda_k)=+\infty$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, suffisamment proche de $+\infty$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}-\ln(1-\lambda_k)&=-\sum_{k=0}^{n-1}\ln(1-\lambda_k)\\ &=-\ln\left(\prod_{k=0}^{n-1}(1-\lambda_k)\right)\\ &=-\ln\Big(\mathbb{P}\big([Y\geqslant n]\big)\Big)\end{aligned}$$

question 5.d

Or, d'après la question précédente :

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\big([Y\geqslant n]\big)=0$$

D'où, par composition :

$$\lim_{n\to+\infty}-\ln\Big(\mathbb{P}\big([Y\geqslant n]\big)\Big)=+\infty$$

Conclusion : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}-\ln(1-\lambda_k)=+\infty$.

6.d. Conclure quant à la nature de la série de terme général λ_n.

Distinguons deux cas :

- si $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 :
  dans ce cas, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\lambda_n$ diverge grossièrement.
- si $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 :
  - ✓ On a :
    - ◇ $\forall n\in\mathbb{N},\ \lambda_n\neq 0$ (car $\forall m\in\mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([Y\geqslant m]\big)>0$ et question 5.d...) ;
    - ◇ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\lambda_n=0$

    D'où :

    $$-\ln(1-\lambda_n)\underset{n\to+\infty}{\sim}\lambda_n$$
  - ✓ Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\lambda_n\geqslant 0$ et $-\ln(1-\lambda_n)\geqslant 0$ (car $1-\lambda_n\leqslant 1$).

  Ainsi, par critère de comparaison (par équivalence) sur les séries à termes généraux positifs, les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\lambda_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}-\ln(1-\lambda_n)$ ont même nature.

  Conclusion : d'après la question précédente, on en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\lambda_n$ est divergente.

✓ Rigueur !

En toute rigueur, cet argument est indispensable pour pouvoir écrire l'équivalent à l'étape suivante... En pratique, ce n'est pas un attendu du barème.

Conclusion : dans les deux cas, la série de terme général λ_n est divergente.

Incroyable !
Peu importe la loi, le taux de panne peut bien tendre vers 0, il ne tendra jamais suffisamment vite vers 0 pour assurer la convergence de la série $\sum_{n \geqslant 0} \lambda_n$...

Partie III. Caractérisation des variables aléatoires de même loi que X

7. Déterminer le taux de panne à l'instant n de la variable aléatoire dont la loi a été trouvée en question 3.d.
   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   On a, d'après la question 5.a :

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \frac{\mathbb{P}\big([X = n]\big)}{\mathbb{P}\big([X \geqslant n]\big)} \\ &= \frac{q^n p}{q^n} \\ &= p \end{aligned}$$

questions 3.b et 3.d

Conclusion : le taux de panne de X est constant égal à p.

Pour info...
• Quand le taux de panne est constant, on parle de situation "sans vieillissement".
• Quand le taux de panne est croissant, on parle de "situation d'usure".
• Quand le taux de panne est décroissant, on parle de "situation de rodage".

8. On considère une variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([Z \geqslant n]\big) > 0$. On suppose que le taux de panne de Z est constant égal à λ.

   8.a. Démontrer que $\lambda \in]0;1[$.
   D'après la question 5.c, on a déjà :

$$0 \leqslant \lambda < 1$$

   Par l'absurde, si on avait $\lambda = 0$, on aurait, d'après la question 5.a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([X = n]\big) = 0$$

   Absurde car $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X = n]\big) = 1$...

Conclusion : $\lambda \in]0;1[$.

   8.b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $\mathbb{P}\big([Z \geqslant n]\big)$ en fonction de λ et n.

Conclusion : d'après la question 5.d, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([Z \geqslant n]\big) = (1-\lambda)^n$.

   8.c. Conclure que les seules variables aléatoires dont le taux de panne est constant sont les variables aléatoires de même loi que X.
   - On sait, d'après la question 7, que le taux de panne de X est constant.
   - Réciproquement, d'après ce qui précède, si Z a un taux de panne constant égale à λ, alors en posant $p = 1 - \lambda$, on a :
     ✓ $p > 0$ (car $\lambda < 1$)
     ✓ d'après la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([Z \geqslant n]\big) = q^n$.
     Ainsi, en reprenant les calculs des questions 3.c et 3.d, on trouve que Z a la même loi que X.

Conclusion : les seules variables aléatoires dont le taux de panne est constant sont les variables aléatoires de même loi que X.

Pour info...
Si l'on se place sur des VA à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, alors les seules ayant un taux de panne constant sont celles qui suivent une loi géométrique.