

ÉNONCÉ

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose de n urnes, numérotées de 1 à n , contenant chacune n boules toutes identiques. On répète n épreuves, chacune consistant à choisir une urne au hasard et à en extraire une boule au hasard. On suppose que les choix des urnes sont indépendants les uns des autres.

Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on note X_i la variable aléatoire prenant la valeur 1 si l'urne numérotée i contient toujours n boules à l'issue des n épreuves ; et qui prend la valeur 0 sinon.

Pour tout i et tout k de $\llbracket 1; n \rrbracket$, on note $U_{i,k}$ l'évènement "l'urne numérotée i est choisie à la k -ième épreuve".

1. 1.a. Soit $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Écrire l'évènement $[X_i = 1]$ à l'aide de certains des évènements $U_{i,k}$, puis montrer que :

$$\mathbb{P}([X_i = 1]) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

- 1.b. Soient i et j deux éléments distincts de $\llbracket 1; n \rrbracket$. Démontrer : $\mathbb{P}([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$.

- 1.c. Comparer $\left(1 - \frac{2}{n}\right)$ et $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$ et en déduire que, si i et j sont deux entiers distincts de $\llbracket 1; n \rrbracket$, alors les variables aléatoires X_i et X_j ne sont pas indépendantes.

2. On pose $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

- 2.a. Déterminer l'espérance de Y_n .

- 2.b. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}(Y_n)}{n}$ et donner un équivalent de $\mathbb{E}(Y_n)$ lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

3. Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on note N_i la variable aléatoire égale au nombre de boules manquantes dans l'urne numérotée i à l'issue des n épreuves.

- 3.a. Donner la loi de N_i ainsi que son espérance.

- 3.b. Que vaut le produit $N_i X_i$?

- 3.c. Les variables aléatoires N_i et X_i sont-elles indépendantes ?

4. Recopier et compléter les lignes manquantes du programme ci-dessous de sorte que l'exécution de `simul(n)` simule l'expérience décrite au début de cet exercice et renvoie deux listes, la première contenant les réalisations des variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$; et la seconde les réalisations des variables aléatoires $N_1, \dots, N_n$.

```
1 import numpy.random as rd
2
3 def simul(n):
4     X=.....
5     N=.....
6     for k in range(n):
7         i=.....
8         X[i-1]=.....
9         N[i-1]=.....
10    return X,N
```

CORRIGÉ

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose de n urnes, numérotées de 1 à n , contenant chacune n boules toutes identiques. On répète n épreuves, chacune consistant à choisir une urne au hasard et à en extraire une boule au hasard. On suppose que les choix des urnes sont indépendants les uns des autres.

Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on note X_i la variable aléatoire prenant la valeur 1 si l'urne numérotée i contient toujours n boules à l'issue des n épreuves; et qui prend la valeur 0 sinon.

Pour tout i et tout k de $\llbracket 1; n \rrbracket$, on note $U_{i,k}$ l'évènement "l'urne numérotée i est choisie à la k -ième épreuve".

1. 1.a. Soit $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Écrire l'évènement $[X_i = 1]$ à l'aide de certains des évènements $U_{i,k}$, puis montrer que :

$$\mathbb{P}([X_i = 1]) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

$[X_i = 1]$ est réalisé si, et seulement si, l'urne i contient toujours n boules à l'issue des n épreuves
 si, et seulement si, aucune boule n'a été piochée dans l'urne i au cours des n épreuves
 si, et seulement si, des épreuves 1 à n , toutes les boules ont été piochées dans d'autres urnes que l'urne i

Important !

Cette étape permet de reformuler à volonté ce que traduit l'évènement $[X_i = 1]$ afin de pouvoir l'écrire ensuite comme demandé.

D'où :

$$[X_i = 1] = \bigcap_{k=1}^n \overline{U_{i,k}}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_i = 1]) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n \overline{U_{i,k}}\right) \\ &= \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(\overline{U_{i,k}}) \\ &= \prod_{k=1}^n \frac{n-1}{n} \\ &= \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \end{aligned}$$

les choix des urnes sont indépendants les uns des autres, donc les évènements $\overline{U_{i,1}}, \dots, \overline{U_{i,n}}$ sont indépendants

équiprobabilité du choix de l'urne

Conclusion : $\mathbb{P}([X_i = 1]) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.

1.b. Soient i et j deux éléments distincts de $\llbracket 1; n \rrbracket$. Démontrer : $\mathbb{P}([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$.

$[X_i = 1] \cap [X_j = 1]$ est réalisé si, et seulement si, les urnes i et j contiennent toujours n boules à l'issue des n épreuves
 si, et seulement si, aucune boule n'a été piochée dans les urnes i et j au cours des n épreuves
 si, et seulement si, des épreuves 1 à n , toutes les boules ont été piochées dans d'autres urnes que les urnes i et j

D'où :

$$[X_i = 1] \cap [X_j = 1] = \bigcap_{k=1}^n (\overline{U_{i,k}} \cap \overline{U_{j,k}})$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n (\overline{U_{i,k}} \cap \overline{U_{j,k}})\right) \\ &= \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(\overline{U_{i,k}} \cap \overline{U_{j,k}}) \\ &= \prod_{k=1}^n \frac{n-2}{n} \\ &= \left(\frac{n-2}{n}\right)^n \end{aligned}$$

les choix des urnes sont indépendants les uns des autres

équiprobabilité du choix de l'urne

Conclusion : si i et j sont deux éléments distincts de $\llbracket 1; n \rrbracket$, alors $\mathbb{P}([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$.

1.c. Comparer $\left(1 - \frac{2}{n}\right)$ et $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$ et en déduire que, si i et j sont deux entiers distincts de $\llbracket 1; n \rrbracket$, alors les variables aléatoires X_i et X_j ne sont pas indépendantes.

- On a :

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{2}{n}\right) - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 &= \left(1 - \frac{2}{n}\right) - \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{-1}{n^2} \\ &< 0 \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\left(1 - \frac{2}{n}\right) < \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$$

- Soient $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Supposons que $i \neq j$.

* D'après la question précédente :

$$\mathbb{P}([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$$

* Or X_i et X_j ont même loi, donc d'après la question 1.a. :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_i = 1])\mathbb{P}([X_j = 1]) &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n} \end{aligned}$$

Or, d'après ce qui précède :

$$\left(1 - \frac{2}{n}\right) < \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$$

Donc, par stricte croissance de la fonction $.^n$ sur $\mathbb{R}^+$:

$$\left(1 - \frac{2}{n}\right)^n < \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n}$$

D'où :

$$\mathbb{P}([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) \neq \mathbb{P}([X_i = 1])\mathbb{P}([X_j = 1])$$

Conclusion : les variables aléatoires X_i et X_j ne sont pas indépendantes.

2. On pose $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

2.a. Déterminer l'espérance de Y_n .

La variable aléatoire Y_n admet une espérance comme somme de variables aléatoires qui en admettent une ($X_1, \dots, X_n$ admettent toutes une espérance car elles suivent une loi de Bernoulli); et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_n) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) \\ &= n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \end{aligned}$$

linéarité de l'espérance, toutes existent

pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}([X_i = 1])$ qui vaut $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

Conclusion : $\mathbb{E}(Y_n) = n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.

2.b. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}(Y_n)}{n}$ et donner un équivalent de $\mathbb{E}(Y_n)$ lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

- Pour n suffisamment proche de $+\infty$, on a ainsi, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{E}(Y_n)}{n} &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \\ &= \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

licite car pour n suffisamment proche de $+\infty$, $1 - \frac{1}{n} > 0$

Or :

$$\begin{aligned} \checkmark \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{-1}{n} &\neq 0 \\ \checkmark \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{n} &= 0 \end{aligned}$$

➔ **Réflexe !**

Pour comparer deux réels, on étudie le signe de leur différence.

➔ **Réflexe !**

Quand la variable est en exposant et en base, on repasse à l'écriture avec exp et ln.

D'où :

$$\ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-1}{n}$$

Et ainsi :

$$n \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -1$$

Par conséquent $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) = -1$ et donc, par composition de limites :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \exp \left(n \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right) = e^{-1}$$

$$\text{Conclusion : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}(Y_n)}{n} = e^{-1}.$$

★ Classique ! ★

De la même manière, on démontre que pour tout $x \neq 0$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n = e^x$$

Et c'est encore valable si $x = 0$.

- On en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}(Y_n)}{ne^{-1}} = 1$$

$$\text{Conclusion : } \mathbb{E}(Y_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{e}.$$

3. Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on note N_i la variable aléatoire égale au nombre de boules manquantes dans l'urne numérotée i à l'issue des n épreuves.

3.a. Donner la loi de N_i ainsi que son espérance.

- ✓ L'expérience s'assimile à n répétitions indépendantes de la même épreuve de Bernoulli dont le succès "piocher une boule dans l'urne i " est de probabilité $\frac{1}{n}$ (par équiprobabilité du choix de l'urne).
- ✓ La variable aléatoire N_i prend comme valeur le nombre de boules manquantes dans l'urne i ; autrement dit, elle prend comme valeur le nombre de succès de l'expérience ainsi décrite.

$$\text{Conclusion : } N_i \hookrightarrow \mathcal{B} \left(n; \frac{1}{n} \right) \text{ et donc } \mathbb{E}(N_i) = 1.$$

♣ Méthode !

Une variable aléatoire est une application de Ω dans $\mathbb{R}$. Démontrer une égalité entre variables aléatoires, c'est donc comme démontrer l'égalité de deux fonctions... Voici pourquoi on doit évaluer en $\omega \in \Omega$ ici.

3.b. Que vaut le produit $N_i X_i$?

Soit $\omega \in \Omega$. On a déjà :

$$(N_i X_i)(\omega) = N_i(\omega) \times X_i(\omega)$$

Distinguons deux cas :

- si $\omega \in [X_i = 0]$:
Dans ce cas, $X_i(\omega) = 0$, et donc
- si $\omega \notin [X_i = 0]$:
Alors, puisque $X_i(\Omega) = \{0; 1\}$, on a nécessairement $X_i(\omega) = 1$.
Par conséquent, l'urne i contient toujours n boules à l'issue des n épreuves. D'où : $N_i(\omega) = 0$. Et ainsi :

$$N_i(\omega) X_i(\omega) = 0$$

$$N_i(\omega) X_i(\omega) = 0$$

Dans tous les cas :

$$N_i(\omega) X_i(\omega) = 0$$

$$\text{Conclusion : } N_i X_i \text{ est constante égale à } 0.$$

3.c. Les variables aléatoires N_i et X_i sont-elles indépendantes ?

D'après la question précédente, la variable aléatoire $N_i X_i$ est constante égale à 0, donc elle admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(N_i X_i) = 0$$

Or :

$$\mathbb{E}(N_i) \times \mathbb{E}(X_i) = 1 \times \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n \neq 0$$

Par conséquent :

$$\mathbb{E}(N_i X_i) \neq \mathbb{E}(N_i) \mathbb{E}(X_i)$$

$$\text{Conclusion : les variables aléatoires } N_i \text{ et } X_i \text{ ne sont pas indépendantes.}$$

📖 Rappel...

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et admettent une espérance, alors la variable aléatoire XY admet une espérance et $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. On utilise ici la contraposée...

4. Recopier et compléter les lignes manquantes du programme ci-dessous de sorte que l'exécution de **simul(n)** simule l'expérience décrite au début de cet exercice et renvoie deux listes, la première contenant les réalisations des variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$; et la seconde les réalisations des variables aléatoires $N_1, \dots, N_n$.

```

1 import numpy.random as rd
2
3 def simul(n):
4     X=.....
5     N=.....
6     for k in range(n):
7         i=.....
8         X[i-1]=.....
9         N[i-1]=.....
10    return X,N

```

Voici :

```

1 import numpy.random as rd
2
3 def simul(n):
4     X=[1 for i in range(n)]
5     N=[0 for i in range(n)]
6     for k in range(n):
7         i=rd.randint(1,n+1)
8         X[i-1]=0
9         N[i-1]=N[i-1]+1
10    return X,N

```

Explications :

- On initialise **X** avec une liste contenant n fois la valeur 1 : le i -ème élément de la liste **X** prendra la valeur 0 si au moins une boule est extraite de l'urne i (donc fournira une réalisation de X_i).
- On initialise **N** avec une liste contenant n fois la valeur 0 : le i -ème élément de la liste **N** représentera le nombre de boules manquantes dans l'urne i (donc fournira une réalisation de N_i).
- En ligne 7, on choisit un entier au hasard entre 1 et n : on choisit donc une urne dans laquelle on pioche une boule...
- Ayant choisi l'urne i , on enlève une boule dans cette urne (X_i prend donc la valeur 0 et N_i est augmenté de 1).

✗ Attention !

Les urnes sont numérotées de 1 à n alors que l'indexation des listes **X** et **N** débute à 0...