EDHEC 2007 VOIE E
EXERCICE 3

ÉNONCÉ

1. Montrer : $\forall x > 0,\ x - \ln(x) > 0$.

On considère alors la fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{x - \ln(x)} & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ définie sur $\mathbb{R}^+$.

2. 2.a. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
   2.b. Justifier que f est dérivable (à droite) en 0 et que $f'_d(0) = 0$.
3. 3.a. Déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, $f'(x)$.
   3.b. Déterminer la limite de f en ∞.
   3.c. Dresser le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}^+$.
4. Etudier la signe de $f(x)$.
5. On note F l'unique primitive de f sur $\mathbb{R}^+$ qui s'annule en 0.
   5.a. Justifier que F est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer ses variations.
   5.b. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\ln(t)}{t}dt$ puis démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t - \ln(t)}dt$ est divergente.
   5.c. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

☞ **Pour info...**
Petite modification de la formulation par rapport au sujet initial, pour changer un peu...

Corrigé

1. Montrer : $\forall x > 0,\ x - \ln(x) > 0$.
   Considérons la fonction $g : x \longmapsto x - \ln(x)$ définie sur $\mathbb{R}_*^+$.
   La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 - \frac{1}{x} \\ &= \frac{x-1}{x} \end{aligned}$$

Réflexe !

D'où :

x	0			1		$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$		$-$	0	$+$	
g	$\Vert$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+,\ g(x) \geqslant 1$$

> **Conclusion :** $\forall x > 0,\ x - \ln(x)$.

On considère alors la fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{x - \ln(x)} & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ définie sur $\mathbb{R}^+$.

2. 2.a. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
   - f est continue sur $\mathbb{R}_*^+$ comme quotient de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}_*^+$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_*^+$.
   - En 0 à droite :
     Pour $x > 0$, suffisamment proche de 0, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\ln(x)}{x - \ln(x)} \\ &= \frac{1}{\frac{x}{\ln(x)} - 1} \end{aligned}$$

x proche de 0, donc $\ln(x) \neq 0$

Or, par opérations sur les limites :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x}{\ln(x)} = 0$$

D'où :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = -1 = f(0)$$

Par conséquent, f est continue en 0 (à droite).

> **Conclusion :** f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

2.b. Justifier que f est dérivable (à droite) en 0 et que $f'_d(0) = 0$.
Soit $h > 0$, suffisamment proche de 0. On a :

$$\begin{aligned} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \frac{\frac{\ln(h)}{h - \ln(h)} - (-1)}{h} \\ &= \frac{\frac{h}{h-\ln(h)}}{h} \\ &= \frac{1}{h - \ln(h)} \end{aligned}$$

Or, par opérations :

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{1}{h - \ln(h)} = 0$$

> **Conclusion :** f est dérivable (à droite) en 0 et $f'_d(0) = 0$.

3. 3.a. Déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, $f'(x)$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$, comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_*^+$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_*^+$ et, pour tout x$\in \mathbb{R}_*^+$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{x}\big(x - \ln(x)\big) - \ln(x)\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{\big(x - \ln(x)\big)^2} \\ &= \frac{1 - \ln(x)}{\big(x - \ln(x)\big)^2} \end{aligned}$$

3.b. Déterminer la limite de f en ∞.

Soit $x > 0$, suffisamment proche de $+\infty$.
On a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\ln(x)}{x - \ln(x)} \\ &= \frac{\ln(x)}{x} \frac{1}{1 - \frac{\ln(x)}{x}} \end{aligned}$$

➠Réflexe !
En $+\infty$, on remarque une FI ; on factorise donc numérateur et dénominateur par le terme dominant pour chaque...

Or, par croissance comparée :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

D'où, par opérations :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} \frac{1}{1 - \frac{\ln(x)}{x}} = 0$$

Conclusion : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

3.c. Dresser le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}^+$.

Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$. On a :

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff \frac{1 - \ln(x)}{\big(x - \ln(x)\big)^2} && \big(x - \ln(x)\big)^2 > 0 \\ &\iff 1 - \ln(x) > 0 \\ &\iff \ln(x) < \ln(\mathrm{e}) \\ &\iff x < \mathrm{e} && \text{stricte croissance de } \ln \text{ sur } \mathbb{R}_*^+ \end{aligned}$$

D'où :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
f	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{-1+\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

4. Etudier la signe de $f(x)$.

On a immédiatement :

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	0	$-$	0	$+$	

5. On note F l'unique primitive de f sur $\mathbb{R}^+$ qui s'annule en 0.

☞ Pour info...
Petite modification de la formulation par rapport au sujet initial, pour changer un peu...

5.a. Justifier que F est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer ses variations.

- D'après la question 2.a, f est continue sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi, puisque F est une primitive de f sur $\mathbb{R}^+$, la fonction F est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.
- Et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ F'(x) = f(x)$$

D'où, d'après la question précédente :

x	0		1		$+\infty$
$F'(x) = f(x)$	0	$-$	0	$+$	
F	0	$\searrow$	$F(1)$	$\nearrow$	

5.b. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \displaystyle\int_1^x \frac{\ln(t)}{t}\,dt$ puis démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t - \ln(t)}\,dt$ est divergente.

- Soit $x > 1$. On a :

$$\int_1^x \frac{\ln(t)}{t} dt = \int_1^x \frac{1}{t} \ln(t) dt$$
$$= \left[\frac{1}{2}\ln(t)^2\right]_1^x$$
$$= \frac{\ln(x)^2}{2}$$

Or $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)^2}{2} = +\infty$.

Conclusion : $\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\ln(t)}{t} dt = +\infty$.

- Par croissance comparée :

$$\ln(t) = \underset{t\to+\infty}{o}(t)$$

D'où :

$$t - \ln(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} t$$

On a ainsi :

✓ $\frac{\ln(t)}{t-\ln(t)} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{t}$

✓ $\forall t \geqslant 1,\ \frac{\ln(t)}{t-\ln(t)} \geqslant 0,\ \frac{\ln(t)}{t} \geqslant 0$

✓ l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t} dt$ est divergente d'après le point précédent.

Conclusion : par critère de comparaison par équivalence sur les intégrales impropres à intégrandes positives, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t-\ln(t)} dt$ est divergente.

★ Classique ! ★

Il faut primitiver $t \longmapsto \frac{\ln(t)}{t}$ sans hésiter : cette fonction est de la forme $u'u$...

5.c. En déduire $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

Puisque F est l'unique primitive de f s'annulant en 0, d'après le théorème fondamental de l'analyse (licite car f est continue sur $\mathbb{R}^+$), on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

D'où, pour $x > 1$, par relation de Chasles :

$$F(x) = \int_0^1 f(t)dt + \int_1^x f(t)dt$$

Or :

- $\int_0^1 f(t)dt$ n'est pas impropre, car f est continue sur le segment $[0;1]$;
- $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ est divergente (d'après la question précédente) et il s'agit d'une intégrale à intégrande positive ; donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x f(t)dt = +\infty$$

Conclusion : par opération : $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

Petite remarque

On peut procéder un peu différemment aussi...
On sait que F était croissante.
Donc par théorème de limite monotone, F admet une limite en $+\infty$.
Si F possédait une limite finie en $+\infty$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ serait convergente, donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ également, ce qui n'est pas le cas !