

ÉNONCÉ

1. Montrer : $\forall x > 0, x - \ln(x) > 0$.

On considère alors la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{\ln(x)}{x - \ln(x)} & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ définie sur \mathbb{R}^+ .

2. 2.a. Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^+ .

2.b. Justifier que f est dérivable (à droite) en 0 et que $f'_d(0) = 0$.

3. 3.a. Déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, $f'(x)$.

3.b. Déterminer la limite de f en ∞ .

3.c. Dresser le tableau de variations complet de f sur \mathbb{R}^+ .

4. Etudier la signe de $f(x)$.

5. On note F l'unique primitive de f sur \mathbb{R}^+ qui s'annule en 0.

5.a. Justifier que F est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+ et déterminer ses variations.

5.b. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{\ln(t)}{t} dt$ puis démontrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t - \ln(t)} dt$ est divergente.

5.c. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

ES Pour info...

Petite modification de la formulation par rapport au sujet initial, pour changer un peu...

CORRIGÉ

1. Montrer : $\forall x > 0, x - \ln(x) > 0$.

Considérons la fonction $g : x \mapsto x - \ln(x)$ définie sur \mathbb{R}_*^+ .

La fonction g est dérivable sur \mathbb{R}_*^+ et pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 - \frac{1}{x} \\ &= \frac{x-1}{x} \end{aligned}$$

D'où :

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		- 0 +	
g			$+\infty \searrow 1 \swarrow +\infty$

Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+, g(x) \geq 1$$

Conclusion : $\forall x > 0, x - \ln(x)$.

On considère alors la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{\ln(x)}{x - \ln(x)} & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ définie sur \mathbb{R}^+ .

2. 2.a. Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^+ .

- f est continue sur \mathbb{R}_*^+ comme quotient de deux fonctions continues sur \mathbb{R}_*^+ dont le dénominateur ne s'annule pas sur \mathbb{R}_*^+ .
- En 0 à droite :
Pour $x > 0$, suffisamment proche de 0, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\ln(x)}{x - \ln(x)} \\ &= \frac{1}{\frac{x}{\ln(x)} - 1} \end{aligned}$$

\curvearrowright x proche de 0, donc $\ln(x) \neq 0$

Or, par opérations sur les limites :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x}{\ln(x)} = 0$$

D'où :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -1 = f(0)$$

Par conséquent, f est continue en 0 (à droite).

Conclusion : f est continue sur \mathbb{R}^+ .

2.b. Justifier que f est dérivable (à droite) en 0 et que $f'_d(0) = 0$.

Soit $h > 0$, suffisamment proche de 0. On a :

$$\begin{aligned} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \frac{\frac{\ln(h)}{h - \ln(h)} - (-1)}{h} \\ &= \frac{\frac{h}{h - \ln(h)}}{h} \\ &= \frac{1}{h - \ln(h)} \end{aligned}$$

Or, par opérations :

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{1}{h - \ln(h)} = 0$$

Conclusion : f est dérivable (à droite) en 0 et $f'_d(0) = 0$.

3. 3.a. Déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, $f'(x)$.

La fonction f est dérivable sur \mathbb{R}_*^+ , comme quotient de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R}_*^+ dont le dénominateur ne s'annule pas sur \mathbb{R}_*^+ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x - \ln(x)) - \ln(x)\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{(x - \ln(x))^2} = \frac{1 - \ln(x)}{(x - \ln(x))^2}$$

3.b. Déterminer la limite de f en ∞ .

Soit $x > 0$, suffisamment proche de $+\infty$.

On a :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x - \ln(x)} = \frac{\ln(x)}{x} \frac{1}{1 - \frac{\ln(x)}{x}}$$

Or, par croissance comparée :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

D'où, par opérations :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} \frac{1}{1 - \frac{\ln(x)}{x}} = 0$$

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

→ Réflexe !
En $+\infty$, on remarque une FI ; on factorise donc numérateur et dénominateur par le terme dominant pour chaque...

3.c. Dresser le tableau de variations complet de f sur \mathbb{R}^+ .

Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$. On a :

$$f'(x) > 0 \iff \frac{x - \ln(x)}{(x - \ln(x))^2} > 0 \iff 1 - \ln(x) > 0$$

$\iff \ln(x) < \ln(e)$) $(x - \ln(x))^2 > 0$
 $\iff x < e$) stricte croissance de \ln sur \mathbb{R}_*^+

D'où :

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	0	+	0
f	-1	↗ -1 + e	↘ 0

4. Etudier la signe de $f(x)$.

On a immédiatement :

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$	0	-	+

5. On note F l'unique primitive de f sur \mathbb{R}^+ qui s'annule en 0.

5.a. Justifier que F est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+ et déterminer ses variations.

- D'après la question 2.a, f est continue sur \mathbb{R}^+ . Ainsi, puisque F est une primitive de f sur \mathbb{R}^+ , la fonction F est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+ .
- Et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, F'(x) = f(x)$$

D'où, d'après la question précédente :

x	0	1	$+\infty$
$F'(x) = f(x)$	0	-	+
F	0	↘ $F(1)$	↗

ES Pour info...
Petite modification de la formulation par rapport au sujet initial, pour changer un peu...

5.b. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{\ln(t)}{t} dt$ puis démontrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t - \ln(t)} dt$ est divergente.

- Soit $x > 1$. On a :

$$\int_1^x \frac{\ln(t)}{t} dt = \int_1^x \frac{1}{t} \ln(t) dt = \left[\frac{1}{2} \ln(t)^2 \right]_1^x$$

★ Classique ! ★
Il faut primitiver $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$ sans hésiter : cette fonction est de la forme $u'u...$

$$= \frac{\ln(x)^2}{2}$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)^2}{2} = +\infty.$

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{\ln(t)}{t} dt = +\infty.$

- Par croissance comparée :

$$\ln(t) = o_{t \rightarrow +\infty}(t)$$

D'où :

$$t - \ln(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t$$

On a ainsi :

$$\checkmark \frac{\ln(t)}{t - \ln(t)} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{t}$$

$$\checkmark \forall t \geq 1, \frac{\ln(t)}{t - \ln(t)} \geq 0, \frac{\ln(t)}{t} \geq 0$$

$$\checkmark \text{ l'intégrale } \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t} dt \text{ est divergente d'après le point précédent.}$$

Conclusion : par critère de comparaison par équivalence sur les intégrales impropres à intégrandes positives, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t - \ln(t)} dt$ est divergente.

5.c. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x).$

Puisque F est l'unique primitive de f s'annulant en 0, d'après le théorème fondamental de l'analyse (licite car f est continue sur \mathbb{R}^+), on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

D'où, pour $x > 1$, par relation de Chasles :

$$F(x) = \int_0^1 f(t) dt + \int_1^x f(t) dt$$

Or :

- $\int_0^1 f(t) dt$ n'est pas impropre, car f est continue sur le segment $[0; 1]$;
- $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ est divergente (d'après la question précédente) et il s'agit d'une intégrale à intégrande positive; donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x f(t) dt = +\infty$$

Conclusion : par opération : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty.$

Petite remarque

On peut procéder un peu différemment aussi...
 On sait que F était croissante.
 Donc par théorème de limite monotone, F admet une limite en $+\infty$.
 Si F possédait une limite finie en $+\infty$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ serait convergente, donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ également, ce qui n'est pas le cas !