EDHEC 2008 VOIE E
PROBLÈME

ÉNONCÉ

PARTIE 1 : PRÉLIMINAIRES

1. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$. On se propose, dans cette question, de démontrer un résultat classique sur les sommes de Riemann associées à cette fonction.
   1.a. Montrer : $\exists M \geqslant 0 \ / \ \forall (x,y) \in [0;1]^2 \ , |f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|$.
   1.b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall k \in [\![0, n-1]\!], \ \forall t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right], \ \left|f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant M\left(t - \frac{k}{n}\right)$.
   1.c. Montrer alors que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall k \in [\![0, n-1]\!], \ \left|\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)dt - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{M}{2n^2}$$
   1.d. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \left|\int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{M}{2n}$.
   1.e. Conclure finalement que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\,dt$.
2. Pour tout couple (p,q) d'entiers naturels, on pose $I(p,q) = \int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx$
   2.a. Montrer que : $\forall (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \ I(p,q) = \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1)$.
   2.b. En déduire que : $\forall (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \ I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$.

PARTIE 2 : ÉTUDE D'UNE SUITE DE VARIABLES ALÉATOIRES

Dans cette partie, m est un entier naturel fixé, supérieur ou égal à 2.
On considère une suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\geqslant 1}$, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, telles que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, U_n suit la loi uniforme sur $\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}\right\}$.
On considère également une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 1}$ définies elles aussi sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et telles que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, et pour tout k de $[\![0, n-1]\!]$, la loi de X_n conditionnellement à l'événement $\left[U_n = \frac{k}{n}\right]$ est la loi binomiale $\mathscr{B}\left(m, \frac{k}{n}\right)$.

3. On considère une variable aléatoire Y suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(m,p)$. Rappeler la valeur de l'espérance de Y puis montrer que $\mathbb{E}\big(Y(Y-1)\big) = m(m-1)p^2$.
4. Donner la loi de X_1.
   Dans toute la suite, on suppose n supérieur ou égal à 2.
5. 5.a. Déterminer $X_n(\Omega)$, puis montrer que, pour tout i de $X_n(\Omega)$, on a :
   $$\mathbb{P}\big([X_n = i]\big) = \frac{1}{n}\binom{m}{i}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1 - \frac{k}{n}\right)^{m-i}$$
   5.b. Utiliser la première question de cette partie pour donner sans calcul la valeur de la somme
   $$\sum_{i=1}^{m} i\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}$$
   Montrer alors que l'espérance de X_n est égale à $\frac{m(n-1)}{2n}$.
   5.c. En utilisant toujours la première question de cette partie, donner sans calcul la valeur de la somme
   $$\sum_{i=1}^{m} i(i-1)\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}$$
   Montrer alors que l'espérance de $X_n(X_n - 1)$ est égale à $\frac{m(m-1)(n-1)(2n-1)}{6n^2}$.
   5.d. En déduire finalement que la variance de X_n est égale à $\frac{m(m+2)(n^2-1)}{12n^2}$.
6. 6.a. En utilisant les résultats obtenus dans la première partie, calculer, pour tout $i \in X_n(\Omega)$, $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big([X_n = i]\big)$.
   6.b. En déduire que la suite (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire X dont on précisera la loi.
   6.c. Vérifier que : $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X)$ et $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{V}(X_n) = \mathbb{V}(X)$.

Corrigé

Partie 1 : préliminaires

1. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$. On se propose, dans cette question, de démontrer un résultat classique sur les sommes de Riemann associées à cette fonction.

1.a. Montrer : $\exists M \geqslant 0 \ / \ \forall (x,y) \in [0;1]^2 \ , |f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|$.

- Puisque f est $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$, la fonction f' est continue sur le segment $[0;1]$. Par composition, la fonction $|f'|$ est également continue sur le segment $[0;1]$.
Ainsi, par théorème des bornes, la fonction $|f'|$ admet un maximum, noté M, sur $[0;1]$.
En particulier :
$$\forall x \in [0;1], \ |f'(x)| \leqslant M$$

- Ainsi :
  ✓ f est dérivable sur $[0;1]$ (car de classe $\mathscr{C}^1$) ;
  ✓ $\forall x \in [0;1], \ |f'(x)| \leqslant M$.

D'après l'inégalité des accroissements finis, on obtient :
$$\forall (x,y) \in [0;1]^2 \ , |f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|$$

> **Conclusion :** $\exists M \geqslant 0 \ / \ \forall (x,y) \in [0;1]^2 \ , |f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|$.

➠Réflexe !
Ca empeste l'IAF à des kilomètres...

Petite remarque
M n'a pas besoin d'être le maximum de $|f'|$; il suffit qu'il en soit un majorant.

1.b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall k \in [\![0, n-1]\!], \ \forall t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right], \ \left|f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant M\left(t - \frac{k}{n}\right)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in [\![0; n-1]\!]$. Soit $t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$.
On a :
$$0 \leqslant k < k+1 \leqslant n$$
Et comme $n > 0$, on obtient :
$$0 \leqslant \frac{k}{n} < \frac{k+1}{n} \leqslant 1$$
Par conséquent :
$$\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right] \subset [0;1]$$
D'après la question précédente, en prenant $x = t$ et $y = \frac{k}{n}$, licite d'après ce qui précède, on obtient :
$$\left|f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant M\left|t - \frac{k}{n}\right|$$
Or $t \geqslant \frac{k}{n}$, donc $t - \frac{k}{n} \geqslant 0$, et ainsi : $\left|t - \frac{k}{n}\right| = t - \frac{k}{n}$.
On obtient finalement :
$$\left|f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant M\left(t - \frac{k}{n}\right)$$

> **Conclusion :** $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall k \in [\![0, n-1]\!], \ \forall t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right], \ \left|f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant M\left(t - \frac{k}{n}\right)$.

★Subtil...★
En toute rigueur, l'énoncé devrait mentionner que dans la suite, on considère un tel réel M, vérifiant le résultat de la question 1.a.

1.c. Montrer alors que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall k \in [\![0, n-1]\!], \ \left|\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)dt - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{M}{2n^2}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in [\![0; n-1]\!]$.

- Commençons par remarquer que :
$$\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} = \frac{1}{n}$$
Par conséquent :
$$\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_{k/n}^{(k+1)/n} f\left(\frac{k}{n}\right) dt$$

Pourquoi ?
On intègre une constante par rapport à t...

- On a ainsi :

$$\begin{aligned}\left|\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)dt - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| &= \left|\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)dt - \int_{k/n}^{(k+1)/n} f\left(\frac{k}{n}\right) dt\right| \\ &= \left|\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) dt\right| \\ &= \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left|f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| dt\end{aligned}$$

linéarité de l'intégrale

inégalité triangulaire sur l'intégrale, licite car $\frac{k}{n} < \frac{k+1}{n}$

- Or, d'après la question précédente :

$$\forall t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right], \ \left|f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant M\left(t - \frac{k}{n}\right)$$

D'où, par croissance de l'intégrale, licite car $\frac{k}{n} < \frac{k+1}{n}$:

$$\int_{k/n}^{(k+1)/n} \left|f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| dt \leqslant \int_{k/n}^{(k+1)/n} M\left(t - \frac{k}{n}\right) dt$$

- Ensuite :

$$\begin{aligned}\int_{k/n}^{(k+1)/n} M\left(t - \frac{k}{n}\right) dt &= M\int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(t - \frac{k}{n}\right) dt \\ &= M\left[\frac{1}{2}\left(t - \frac{k}{n}\right)^2\right]_{k/n}^{(k+1)/n} \\ &= M\frac{1}{2n^2}\end{aligned}$$

♡ **Astuce du chef !** ♡

Ici, je choisis $\longmapsto \frac{1}{2}\left(t - \frac{k}{n}\right)^2$ comme primitive de $t \longmapsto t - \frac{k}{n}$ (on a bien une fonction de la forme $u'u$ à primitiver...) : c'est en fait la primitive qui rend le calcul le plus rapide à effectuer...

Par transitivité, on obtient finalement :

$$\left|\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)dt - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{M}{2n^2}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall k \in [\![0, n-1]\!], \ \left|\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)dt - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{M}{2n^2}$.

1.d. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \left|\int_0^1 f(t)\, dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{M}{2n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- D'après la question précédente :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \ \left|\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)dt - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{M}{2n^2}$$

D'où, en sommant de 0 à $n-1$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)dt - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\frac{M}{2n^2}$$

Autrement dit :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)dt - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{M}{2n}$$

- Or, d'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(t)\, dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\, dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \\ &= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\, dt - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)dt - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\end{aligned}$$

linéarité de la somme

inégalité trangulaire sur la somme

Conclusion : d'où, par transitivité : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \left|\int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{M}{2n}$.

1.e. Conclure finalement que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\,dt$.

On a :

- ✓ $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \left|\int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{M}{2n}$
- ✓ $\lim_{n\to+\infty} \frac{M}{2n} = 0$

Par théorème d'encadrement, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| = 0$$

☞ Rappel...

(u_n) CV vers 0 ssi $(|u_n|)$ CV vers 0.
C'est faux pour les autres réels que 0 (prendre $u_n = (-1)^n$ par exemple).

Conclusion : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\,dt$.

2. Pour tout couple (p,q) d'entiers naturels, on pose $I(p,q) = \int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx$

2.a. Montrer que : $\forall (p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*,\ I(p,q) = \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1)$.

Soit $(p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$. Posons : $\left|\begin{array}{l} u : x \longmapsto \frac{x^{p+1}}{p+1} \\ v : x \longmapsto (1-x)^q \end{array}\right.$. Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[0;1]$ et pour tout $x \in [0;1]$: $\left|\begin{array}{l} u'(x) = x^p \\ v'(x) = -q(1-x)^{q-1} \end{array}\right.$.

D'où , par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I(p,q) &= \int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx \\ &= \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}(1-x)^q\right]_0^1 - \int_0^1 -q(1-x)^{q-1}\frac{x^{p+1}}{p+1}\,dx \\ &= \frac{q}{p+1}\int_0^1 x^{p+1}(1-x)^{q-1}\,dx \\ &= \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1) \end{aligned}$$

$p>0$ et $q+1>0$, donc $0^p = 0$ et $0^{q+1} = 0$

Conclusion : $\forall (p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*,\ I(p,q) = \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1)$.

2.b. En déduire que : $\forall (p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N},\ I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$.

D'après la question précédente, on a

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*,\ I(p+1, q-1) = \frac{p+1}{q} I(p,q)$$

Par récurrence, démontrons : $\forall p \in \mathbb{N},\ \forall q \in \mathbb{N},\ I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$.

- **Initialisation.** Pour $p = 0$:
Soit $q \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} I(0,q) &= \int_0^1 (1-x)^q\,dx \\ &= \left[-\frac{(1-x)^{q+1}}{q+1}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{q+1} \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} \frac{0!q!}{(0+q+1)!} &= \frac{q!}{(q+1)!} \\ &= \frac{1}{q+1} \end{aligned}$$

D'où :

$$I(0,q) = \frac{1}{q+1}$$

L'initialisation est ainsi vérifiée.

- **Hérédité.** Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons : $\forall q \in \mathbb{N},\ I(p,q) = \dfrac{p!q!}{(p+q+1)!}$.

  Montrons : $\forall q \in \mathbb{N},\ I(p+1,q) = \dfrac{(p+1)!q!}{(p+q+2)!}$.

  Soit $q \in \mathbb{N}$. D'après ce qui précède, licite car $p \in \mathbb{N}$ et $q+1 \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} I(p+1,q) &= \frac{p+1}{q+1} I(p,q+1) \\ &= \frac{p+1}{q+1}\frac{p!(q+1)!}{(p+q+2)!} \\ &= \frac{(p+1)!q!}{(p+q+2)!} \end{aligned}$$

hypothèse de récurrence, licite car $q+1 \in \mathbb{N}$

  L'hérédité est ainsi établie.

✘ Attention !
On utilise ce qui précède avec $q+1$ au lieu de q (licite, car $q \in \mathbb{N}$, donc $q+1 \in \mathbb{N}^*$) :

$$I(p+1,q) = \frac{p+1}{q+1} I(p,q+1)$$

> **Conclusion :** $\forall (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ I(p,q) = \dfrac{p!q!}{(p+q+1)!}$.

Petite remarque
L'énoncé initial décomposait cette question en deux...

Partie 2 : étude d'une suite de variables aléatoires

Dans cette partie, m est un entier naturel fixé, supérieur ou égal à 2.
On considère une suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\geqslant 1}$, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, telles que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, U_n suit la loi uniforme sur $\left\{0, \dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \dots, \dfrac{n-1}{n}\right\}$.
On considère également une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 1}$ définies elles aussi sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et telles que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, et pour tout k de $[\![0, n-1]\!]$, la loi de X_n conditionnellement à l'événement $\left[U_n = \dfrac{k}{n}\right]$ est la loi binomiale $\mathscr{B}\left(m, \dfrac{k}{n}\right)$.

3. On considère une variable aléatoire Y suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(m,p)$. Rappeler la valeur de l'espérance de Y puis montrer que $\mathbb{E}\big(Y(Y-1)\big) = m\,(m-1)\,p^2$.
   - $\mathbb{E}(Y) = mp$
   - La variable aléatoire $Y(Y-1)$ est finie, car Y l'est, donc elle admet une espérance et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big(Y(Y-1)\big) &= \mathbb{E}\big(Y^- Y\big) \\ &= \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y) \\ &= \mathbb{V}(Y) + \big(\mathbb{E}(Y)\big)^2 - \mathbb{E}(Y) \\ &= mp(1-p) + (mp)^2 - mp \\ &= -mp^2 + m^2p^2 \\ &= mp(mp-p) \\ &= m(m-1)p^2 \end{aligned}$$

linéarité de l'espérance, licite car chacune des deux espérances existe

formule de Koenig-Huygens

4. Donner la loi de X_1.
   Dans toute la suite, on suppose n supérieur ou égal à 2.
   Prenons donc $n = 1$.
   La variable aléatoire U_1 suit la loi certaine égale à 0. D'où :

$$\mathbb{P}\big([U_1 = 0]\big) = 1$$

   Et par conséquent :

$$\mathbb{P}_{[U_1=0]}\big([X_1 = 0]\big) = \mathbb{P}\big([X_1 = 0]\big)$$

   Mais la loi conditionnelle de X_1 sachant $[U_1 = 0]$ est la loi binomiale de paramètres m et 0, donc

$$\mathbb{P}_{[U_1=0]}\big([X_1 = 0]\big) = 1$$

> **Conclusion :** $\mathbb{P}\big([X_1 = 0]\big) = 1$, donc X_1 suit la loi quasi-certaine égale à 0.

★Subtil...★
"Quasi-certaine" et pas "certaine", car $X_1(\Omega) \neq \{0\}$... Mais on accepte la confusion.

5. 5.a. Déterminer $X_n(\Omega)$, puis montrer que, pour tout i de $X_n(\Omega)$, on a :

$$\mathbb{P}\big([X_n = i]\big) = \frac{1}{n}\binom{m}{i}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}$$

   - Puisque $U_n(\Omega) = \left\{0, \dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \dots, \dfrac{n-1}{n}\right\}$, on a :

$$\Omega = \bigcup_{k=0}^{n-1}\left[U_n = \frac{k}{n}\right]$$

Petite remarque
Habituellement, nous avons un contexte pour déterminer l'ensemble image d'une variable aléatoire... Procédons autrement ici... Méthode plus théorique, à la limite extérieure du programme, mais intéressante pour bien comprendre l'ensemble image dans le cas du passage par une loi conditionnelle.
Ne pas hésiter à dire simplement que comme l'ensemble image de la loi conditionnelle est $[\![0;m]\!]$ (ne bouge donc pas en fonction de k), celui de X_n sera le même.

D'où :

$$\begin{aligned} X_n(\Omega) &= \bigcup_{k=0}^{n-1} X_n\left(\left[U_n = \frac{k}{n}\right]\right) \\ &= \bigcup_{k=0}^{n-1} [\![0;m]\!] \\ &= [\![0;m]\!] \end{aligned}$$

pour tout k de $[\![0, n-1]\!]$, la loi conditionnelle de X_n sachant $\left[U_n = \frac{k}{n}\right]$ est la loi binomiale $\mathscr{B}\left(m, \frac{k}{n}\right)$

5.b. Soit $i \in [\![0;m]\!]$. D'après la formule des probabilités totales, avec $\left(\left[U = \frac{k}{n}\right]\right)_{k\in[\![0;n-1]\!]}$ comme système complet d'évènements, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_n = i]) &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}\left(\left[U_n = \frac{k}{n}\right] \cap [X_n = i]\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}\left(\left[U_n = \frac{k}{n}\right]\right) \mathbb{P}_{[U_n=\frac{k}{n}]}([X_n = i]) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n}\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i} \end{aligned}$$

$\forall k \in [\![0; n-1]\!],\ \mathbb{P}\left(\left[U_n = \frac{k}{n}\right]\right) \neq 0$

U_n suti la loi uniforme sur $\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}\right\}$ qui est un ensemble de cardinal n

Conclusion : pour tout i de $[\![0;m]\!]$, $\mathbb{P}([X_n = i]) = \frac{1}{n}\binom{m}{i}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}$.

Important !
On peut traiter la deuxième partie de la question sans avoir réussi à déterminer $X_n(\Omega)$...

5.c. Utiliser la première question de cette partie pour donner sans calcul la valeur de la somme

$$\sum_{i=1}^{m} i\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}$$

Montrer alors que l'espérance de X_n est égale à $\frac{m(n-1)}{2n}$.

- On a :
$$\sum_{i=1}^{m} i\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i} = \sum_{i=0}^{m} i\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}$$
On reconnaît ici la somme donnant l'espérance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres m et $\frac{k}{n}$.
Conclusion : $\sum_{i=1}^{m} i\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i} = m\frac{k}{n}$.
- Puisque $X_n(\Omega)$ est fini, X_n admet une espérance et comme $X_n(\Omega) = [\![0;m]\!]$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_n) &= \sum_{i=0}^{m} i\mathbb{P}([X_n = i]) \\ &= \sum_{i=0}^{m} i\frac{1}{n}\binom{m}{i}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{m} i\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{m} i\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{mk}{n} \\ &= \frac{m}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} k \\ &= \frac{m}{n^2}\frac{(n-1)n}{2} \\ &= \frac{m(n-1)}{2n} \end{aligned}$$

question précédente

point précédent

Conclusion : $\mathbb{E}(X_n) = \frac{m(n-1)}{2n}$.

5.d. En utilisant toujours la première question de cette partie, donner sans calcul la valeur de la somme

$$\sum_{i=1}^{m} i(i-1)\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^{i}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}$$

Montrer alors que l'espérance de $X_n(X_n-1)$ est égale à $\dfrac{m(m-1)(n-1)(2n-1)}{6n^2}$.

- On a :
$$\sum_{i=1}^{m} i(i-1)\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^{i}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}=\sum_{i=0}^{m} i(i-1)\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^{i}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}$$
On reconnaît ici, par théorème de transfert, l'espérance de $Y(Y-1)$ où Y suit la loi binomiale de paramètres m et $\dfrac{k}{n}$.
Conclusion : d'après la question 3, $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} i(i-1)\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^{i}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}=\frac{m(m-1)k^2}{n^2}$.
- La variable aléatoire $X_n(X_n-1)$ est finie, car X_n l'est, donc elle admet une espérance et, par théorème de transfert puisque $X_n(\Omega)=[\![0;m]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(X_n(X_n-1)\big) &= \sum_{i=0}^{m} i(i-1)\mathbb{P}\big([X_n=i]\big) && \text{question 5.b}\\
&= \sum_{i=0}^{m} i(i-1)\frac{1}{n}\binom{m}{i}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{i}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{m} i(i-1)\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^{i}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i} && \text{point précédent}\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{m(m-1)k^2}{n^2}\\
&= \frac{m(m-1)}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}k^2\\
&= \frac{m(m1-1)}{n^3}\,\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\\
&= \frac{m(m-1)(n-1)(2n-1)}{6n^2}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{E}\big(X_n(X_n-1)\big)=\dfrac{m(m-1)(n-1)(2n-1)}{6n^2}$.

5.e. En déduire finalement que la variance de X_n est égale à $\dfrac{m(m+2)(n^2-1)}{12n^2}$.
Puisque X_n est finie, elle admet une variance et d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X_n) &= \mathbb{E}(X_n^2)-\big(\mathbb{E}(X_n)\big)^2 && \text{par linéarité de l'espérance } \mathbb{E}\big(X_n(X_n-1)\big)=\mathbb{E}(X_n^2)-\mathbb{E}(X_n)\\
&= \mathbb{E}\big(X_n(X_n-1)\big)+\mathbb{E}(X_n)-\big(\mathbb{E}(X_n)\big)^2 && \text{questions 5.c et 5.d}\\
&= \frac{m(m-1)(n-1)(2n-1)}{6n^2}+\frac{m(n-1)}{2n}-\left(\frac{m(n-1)}{2n}\right)^2\\
&= \frac{2m(m-1)(n-1)(2n-1)}{12n^2}+\frac{6nm(n-1)}{12n^2}-\frac{3m^2(n-1)^2}{12n^2}\\
&= \frac{m(n-1)\big(2(m-1)(2n-1)+6n-3m(n-1)\big)}{12n^2}\\
&= \frac{m(n-1)(4mn-4n-2m+2+6n-3nm+3m)}{12n^2}\\
&= \frac{m(n-1)(mn+2n+m+2)}{12n^2} && mn+2n+m+2=(m+2)n+(m+2)=(m+2)(n+1)\\
&= \frac{m(n-1)(m+2)(n+1)}{12n^2}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{V}(X_n)=\dfrac{m(m+2)(n^2-1)}{12n^2}$.

6. 6.a. En utilisant les résultats obtenus dans la première partie, calculer, pour tout $i\in X_n(\Omega)$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\big([X_n=i]\big)$.
Soit $i\in[\![0;m]\!]$. On a :

$$\mathbb{P}\big([X_n=i]\big)=\frac{1}{n}\binom{m}{i}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{i}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}$$

$$= \binom{m}{i} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où $f : x \longmapsto x^i(1-x)^{m-i}$.
Or :

- d'après la question 1.e, licite car f est $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx$$

- et :

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x^i(1-x)^{m-i}dx$$

question 2.b, licite car $i \in \mathbb{N}$ et $m-i \in \mathbb{N}$

$$= \frac{i!(m-i)!}{(m+1)!}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big([X_n = i]\big) &= \binom{m}{i} \frac{i!(m-i)!}{(m+1)!} \\ &= \frac{m!}{i!(m-i)!} \frac{i!(m-i)!}{(m+1)!} \\ &= \frac{1}{m+1} \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $i \in [\![0;m]\!]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big([X_n = i]\big) = \dfrac{1}{m+1}$.

6.b. En déduire que la suite (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire X dont on précisera la loi.

Vocabulaire

S (X_n) est une suite de VA discrètes et X une VA discrète, on dit que (X_n) converge en loi vers X lorsque pour tout $k \in X(\Omega)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big([X_n = k]\big) = \mathbb{P}\big([X = k]\big)$.

Conclusion : d'après la question précédente, (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur $[\![0;m]\!]$.

✘ Attention !

Il est important de vérifier la correspondance de $X(\Omega)$...

6.c. Vérifier que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{V}(X_n) = \mathbb{V}(X)$.

Prête à confusion...

La convergence en loi n'implique pas, en général, la convergence des moments. Les deux résultats établis dans cette question ne sont donc pas vraiment à "vérifier"...

- On a déjà, puisque X suit la loi uniforme sur $[\![0;m]\!]$:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{m}{2} \quad ; \quad \mathbb{V}(X) = \frac{(m+1)^2-1}{12} = \frac{m^2+2m}{12}$$

- Ensuite :
  - ⋆ D'après la question 5.c :

$$\mathbb{E}(X_n) = \frac{m(n-1)}{2n}$$

Et, puisque $m \neq 0$ et que $n-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$, on a :

$$\frac{m(n-1)}{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{m}{2}$$

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X)$.

  - ⋆ D'après la question 5.c :

$$\mathbb{V}(X_n) = \frac{m(m+2)(n^2-1)}{12n^2}$$

Et, puisque $m(m+2) \neq 0$ et que $n^2-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$, on a :

$$\frac{m(m+2)(n^2-1)}{12n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{m(m+2)}{12}$$

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{V}(X_n) = \mathbb{V}(X)$.