Énoncé

On note E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. On désigne par f l'application qui à toute fonction polynomiale de E associe la fonction $f(P)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(P)(x) = P(x+1) + P(x)$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. On note $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ la base canonique de E.

   Montrer que la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
3. Montrer que f est bijectif et déterminer la matrice de f^{-1} dans la base $\mathscr{B}$.
4. Soit $P : x \longmapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$, où $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^4$.
   - 4.a. Expliciter en fonction des réels a_0, a_1, a_2, a_3 la fonction polynomiale $Q = f^{-1}(P)$.
   - 4.b. On considère, pour tout entier strictement positif n, la somme $S(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k P(k)$.

     Exprimer simplement $S(n)$ en fonction de $Q(n)$ et $Q(0)$.
   - 4.c. Expliciter alors la valeur de $S(n)$ en fonction de n, a_0, a_1, a_2, a_3.

Petite remarque

Petite modification par rapport à l'énoncé initial qui posait $S(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k P(k)$.

Corrigé

On note E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. On désigne par f l'application qui à toute fonction polynomiale de E associe la fonction $f(P)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(P)(x) = P(x+1) + P(x)$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.

✘ Attention !
Il s'agit d'une égalité de fonctions !

- Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in E$. Montrons que $f(aP + bQ) = af(P) + bf(Q)$.
  Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(aP+bQ)(x) &= (aP+bQ)(x+1) + (aP+bQ)(x) \\ &= aP(x+1) + bQ(x+1) + aP(x) + bQ(x) \\ &= af(P)(x) + bf(Q)(x) \end{aligned}$$

linéarité de l'évaluation en x et en $x+1$

  Par conséquent : $f(aP + bQ) = af(P) + bf(Q)$.
  Conclusion : f est une application linéaire.
- Soit ensuite $P \in E$. Ainsi, la fonction $x \longmapsto P(x+1)$ est encore une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 3.
  Par conséquent : $f(P)$ est la somme de deux fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 3, donc $f(P) \in E$.

Conclusion : f est un endomorphisme de E.

2. On note $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ la base canonique de E.
   Montrer que la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Confusion d'objets !
Attention à ne pas confondre les fonctions et les réels dans les égalités qui suivent...
On veut voir des égalités du type $f(P_k) = ...P_0 + ...P_1 + ...P_2 + ...P_3$ pour justifier les coordonnées de $f(P_k)$ dans la base $\mathscr{B}$ et donc pour justifier la matrice obtenue.

On a :

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(P_0)(x) = P_0(x+1) + P_0(x) = 1 + 1 = 2$, donc
$$f(P_0) = 2P_0$$
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(P_1)(x) = P_1(x+1) + P_1(x) = x + 1 + x = 2x + 1$, donc
$$f(P_1) = P_0 + 2P_1$$
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(P_2)(x) = P_2(x+1) + P_2(x) = (x+1)^2 + x^2 = x^2 + 2x + 1 + x^2 = 2x^2 + 2x + 1$, donc
$$f(P_2) = P_0 + 2P_1 + 2P_2$$
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(P_0)(x) = P_3(x+1) + P_3(x) = (x+1)^3 + x^3 = x^3 + x^2 + 3x + 1 + x^3 = 2x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, donc
$$f(P_3) = P_0 + 3P_1 + 3P_2 + 2P_3$$

Conclusion : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Montrer que f est bijectif et déterminer la matrice de f^{-1} dans la base $\mathscr{B}$.

- On remarque que la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux non nuls, elle est donc inversible.

Conclusion : f est bijectif.

- De surcroît, on sait que
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^{-1}) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\right)^{-1}$$
  Inversons donc la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$...

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Puis, en effectuant $\left\{\begin{array}{l} L_1 \leftarrow 2L_1 - L_4 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_4 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - 3L_4 \end{array}\right.$:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ensuite, en effectuant $\left\{\begin{array}{l} L_1 \leftarrow 2L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array}\right.$:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 8 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Et en effectuant $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 8 & 0 & 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Reste à tout diviser par 8...

Conclusion : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^{-1}) = \dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Soit $P : x \longmapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$, où $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^4$.

4.a. Expliciter en fonction des réels a_0, a_1, a_2, a_3 la fonction polynomiale $Q = f^{-1}(P)$.

On a ainsi

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f^{-1}(P)\big) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^{-1}) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P) \\ &= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4a_0 - 2a_1 + a_3 \\ 4a_1 - 4a_2 \\ 4a_2 - 6a_3 \\ 4a_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Conclusion : $Q = \dfrac{1}{8}(4a_0 - 2a_1 + a_3)P_0 + \dfrac{1}{2}(a_1 - a_2)P_1 + \dfrac{1}{4}(2a_2 - 3a_3)P_2 + \dfrac{1}{2}a_3 P_3$.

Autrement dit : $\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = \dfrac{1}{8}(4a_0 - 2a_1 + a_3) + \dfrac{1}{2}(a_1 - a_2)x + \dfrac{1}{4}(2a_2 - 3a_3)x^2 + \dfrac{1}{2}a_3 x^3$.

4.b. On considère, pour tout entier strictement positif n, la somme $S(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k P(k)$.

Petite remarque

Petite modification par rapport à l'énoncé initial qui posait $S(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k P(k)$.

Exprimer simplement $S(n)$ en fonction de $Q(n)$ et $Q(0)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $Q = f^{-1}(P)$, on a $P = f(Q)$; et donc :

$$\forall k \in [\![0; n-1]\!],\ P(k) = f(Q)(k) = Q(k+1) + Q(k)$$

D'où :

$$S(n) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \big(Q(k+1) + Q(k)\big)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k Q(k+1) + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k Q(k) \\
&= -\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} Q(k+1) + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k Q(k) \\
&= -(-1)^n Q(n) + Q(0)
\end{aligned}
$$

télescopage

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ S(n) = Q(0) - (-1)^n Q(n)$.

4.c. Expliciter alors la valeur de $S(n)$ en fonction de n, a_0, a_1, a_2, a_3.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :

$$
\begin{aligned}
S(n) &= Q(0) - (-1)^n Q(n) - Q(0) \\
&= \frac{1}{8}(4a_0 - 2a_1 + a_3) - (-1)^n \left(\frac{1}{8}(4a_0 - 2a_1 + a_3) + \frac{1}{2}(a_1 - a_2)n + \frac{1}{4}(2a_2 - 3a_3)n^2 + \frac{1}{2}a_3 n^3 \right)
\end{aligned}
$$

question **4.b**