ESC 2003 voie E
Exercice 1

Énoncé

Dans tout l'exercice a est un réel strictement positif. On considère la fonction f_a définie sur $[0;a]$ par :

$$\forall x \in [0;a],\ \ f_a(x) = \frac{a-x}{a(a+x)}$$

1. 1.a. Dresser le tableau de variations de f_a.
   1.b. Montrer que f_a réalise une bijection de $[0;a]$ dans un ensemble à préciser et donner le tableau de variations de f_a^{-1}.
   1.c. Démontrer que $f_a^{-1} = f_{\frac{1}{a}}$.
2. 2.a. Justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^a f_a(x)dx$, notée I_a.
   2.b. Déterminer deux constantes α et β telles que : $\forall x \in [0;a],\ \dfrac{1-x}{1+x} = \alpha + \dfrac{\beta}{1+x}$.
   En déduire que $I_1 = 2\ln(2) - 1$.
   2.c. Montrer, grâce au changement de variable $x = au$, que $I_a = I_1$.
3. On considère maintenant la fonction $h_a : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{2\ln(2)-1} f_a(x) & \text{si } x \in [0;a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
   3.a. Montrer que h_a est une densité de probabilité. On notera X_a une variable aléatoire de densité h_a et on note H_a la fonction de répartition de X_a.
   3.b. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(a + X_a)$. En déduire l'espérance de X_a.
   3.c. Calculer l'espérance $\mathbb{E}\big((a + X_a)^2\big)$. En déduire $\mathbb{E}(X_a^2)$ puis la variance de X_a.
   3.d. Soit T la variable aléatoire définie par $T = \dfrac{1}{a}X_a$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}\big([T \leqslant t]\big) = H_a(at)$.
   En déduire que T suit la même loi de X_1.

Corrigé

Dans tout l'exercice a est un réel strictement positif. On considère la fonction f_a définie sur $[0; a]$ par :

$$\forall x \in [0; a], \ f_a(x) = \frac{a-x}{a(a+x)}$$

1. **1.a.** Dresser le tableau de variations de f_a.

La fonction f_a est le quotient de deux fonctions dérivables sur $[0; a]$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0; a]$.
Par conséquent, f_a est dérivable sur $[0; a]$ et pour tout $x \in [0; a]$:

$$\begin{aligned} f_a'(x) &= \frac{-a(a+x) - a(a-x)}{a^2(a+x)^2} \\ &= \frac{-2a^2}{a^2(a+x)^2} \\ &= \frac{-2}{(a+x)^2} \end{aligned}$$

On en déduit :

x	0	a
$f_a'(x)$	$-$	
f_a	$\frac{1}{a} \searrow$	0

1.b. Montrer que f_a réalise une bijection de $[0; a]$ dans un ensemble à préciser et donner le tableau de variations de f_a^{-1}.

✓ f_a est continue sur $[0; a]$ car elle y est dérivable,
✓ f_a est strictement décroissante sur $[0; a]$.

Par théorème de bijection, f_a est bijective de $[0; a]$ dans $f_a([0; a]) = \left[0; \frac{1}{a}\right]$; et :

x	0	$\frac{1}{a}$
f_a^{-1}	$a \searrow$	0

☞ Rappels...
• Le fait que $f([0; a])$ soit un intervalle est dû à la continuité de f_a et au fait que $[0; a]$ soit un intervalle (version théorique du TVI).
• Le théorème de bijection fournit également les variations de f_a^{-1}.

1.c. Démontrer que $f_a^{-1} = f_{\frac{1}{a}}$.

Soit $y \in \left[0; \frac{1}{a}\right]$. Résolvons l'équation $y = f_a(x)$, d'inconnue $x \in [0; a]$.
Soit $x \in [0; a]$. On a :

$$\begin{aligned} y = f_a(x) &\iff y = \frac{a-x}{a(a+x)} && a(a+x) \neq 0, \text{ car } a > 0 \text{ et } x \in [0; a] \\ &\iff a(a+x)y = a - x \\ &\iff a^2y + axy = a - x \\ &\iff axy + x = a - a^2y \\ &\iff (ay+1)x = a - a^2y && 1 + ay \neq 0, \text{ car } a > 0 \text{ et } y > 0 \\ &\iff x = \frac{a - a^2y}{1 + ay} && \text{en divisant numérateur et dénominateur par } a^2 \\ &\iff x = \frac{\frac{1}{a} - y}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}y} \\ &\iff x = \frac{\frac{1}{a} - y}{\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a} + y\right)} \\ &\iff x = f_{\frac{1}{a}}(y) \end{aligned}$$

Conclusion : $f_a^{-1} = f_{\frac{1}{a}}$.

Petite remarque
Bien évidemment, comme le résultat est donné, si on coince pour retrouver $f_{\frac{1}{a}}(y)$, on ne truande surtout pas !! On peut interrompre la résolution pour transformer l'écriture de $f_{\frac{1}{a}}(y)$ et retomber sur nos pieds.

Ou sinon...

La méthode proposée ci-dessus est la méthode attendue de façon générale pour déterminer l'expression d'une bijection réciproque.
Puisque, dans cet exercice, le résultat est donné, nous pouvons nous "contenter" de vérifier que $f_{\frac{1}{a}} \circ f_a = \mathrm{id}_{[0;a]}$ pour conclure. Procédons ainsi afin de comparer les deux méthodes.

Soit $x \in [0; a]$. On a :

$$\begin{aligned} f_{\frac{1}{a}} \circ f_a(x) &= \frac{\frac{1}{a} - f_a(x)}{\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a} + f_a(x)\right)} \\ &= \frac{\frac{1}{a} - \frac{a-x}{a(a+x)}}{\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a} + \frac{a-x}{a(a+x)}\right)} \\ &= \frac{\frac{a+x-(a-x)}{a(a+x)}}{\frac{1}{a}\,\frac{a+x+a-x}{a(a+x)}} \\ &= \frac{\frac{2x}{a(a+x)}}{\frac{2}{a(a+x)}} \\ &= x \end{aligned}$$

Conclusion : $f_{\frac{1}{a}} \circ f_a = \mathrm{id}_{[0;a]}$, donc $f_a^{-1} = f_{\frac{1}{a}}$.

2. 2.a. Justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^a f_a(x)dx$, notée I_a.

La fonction f_a est continue sur le segment $[0; a]$.

Conclusion : l'intégrale $\displaystyle\int_0^a f_a(x)dx$ existe.

2.b. Déterminer deux constantes α et β telles que : $\forall x \in [0; a]$, $\dfrac{1-x}{1+x} = \alpha + \dfrac{\beta}{1+x}$.
En déduire que $I_1 = 2\ln(2) - 1$.

Petite remarque

Comme d'habitude pour ce type de questions, "remarquer" la bonne décomposition permet d'obtenir tous les points. Je détaille cependant ici la méthode afin de bien insister sur la rédaction...

- Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0; a],\ \frac{1-x}{1+x} = \alpha + \frac{\beta}{1+x} &\iff \forall x \in [0; a],\ \frac{1-x}{1+x} = \frac{\alpha(1+x)\beta}{1+x} \\ &\iff \forall x \in [0; a],\ \frac{1-x}{1+x} = \frac{(\alpha+\beta) + \alpha x}{1+x} \\ &\iff \forall x \in [0; a],\ 1 - x = (\alpha+\beta) + \alpha x \\ &\iff \begin{cases} \alpha = -1 \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

$\forall x \in [0; a],\ 1 + x \neq 0$

unicité des coefficients d'une fonction polynomiale ("identification")

Conclusion : $\forall x \in [0; a]$, $\dfrac{1-x}{1+x} = -1 + \dfrac{2}{1+x}$.

Comment "voir" cette décomposition ?

Pour tout $x \in [0; a]$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1-x}{1+x} &= \frac{-(1+x)+2}{1+x} \\ &= \frac{-(1+x)}{1+x} + \frac{2}{1+x} \\ &= -1 + \frac{2}{1+x} \end{aligned}$$

Oui, mais comment penser à la décomposition : $1 - x = -(1+x) + 2$?
En fait, cette décomposition est l'écriture de $x \longmapsto 1 - x$ dans la base $(x \longmapsto 1, x \longmapsto 1 + x)$ de $\mathbb{R}_1[x]$...

- Par conséquent :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 f_1(x)dx \\ &= \int_0^1 \frac{1-x}{1+x}dx \\ &= \int_0^1 \left(-1 + \frac{2}{1+x}\right) dx \\ &= \big[-x + 2\ln(1+x)\big]_0^1 \\ &= -1 + 2\ln(2) \end{aligned}$$

Conclusion : $I_1 = 2\ln(2) - 1$.

2.c. Montrer, grâce au changement de variable $x = au$, que $I_a = I_1$.

Effectuons le changement de variable $x = au$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^a \frac{a-x}{a(a+x)}dx$:

$$\left|\begin{array}{rcl} x &=& au \\ u &=& \dfrac{x}{a} \end{array}\right. \quad ; \quad \left|\begin{array}{rcl} dx &=& a\,du \\ du &=& \dfrac{1}{a}dx \end{array}\right. \quad ; \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline x = & 0 & a \\ \hline u = & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Ce changement de variable est bien licite car affine et que $a \neq 0$.

On a ainsi :

$$\begin{aligned} I_a &= \int_0^a \frac{a-x}{a(a+x)}dx \\ &= \int_0^1 \frac{a-au}{a(a+au)}a\,du \\ &= \int_0^1 \frac{a-au}{a+au}du \\ &= \int_0^1 \frac{1-u}{1+u}du \\ &= I_1 \end{aligned}$$

★Subtil...★

L'hypothèse $a \neq 0$ implique que le changement de variable est bijectif, ce qui est le cadre idéal pour effectuer un changement de variable, car on peut alors exprimer u en fonction de x et du en fonction de dx (comme nous l'avons fait plus haut).

> **Conclusion :** $I_a = I_1$.

3. On considère maintenant la fonction $h_a : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{2\ln(2)-1}f_a(x) & \text{si } x \in [0;a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

3.a. Montrer que h_a est une densité de probabilité. On notera X_a une variable aléatoire de densité h_a et on note H_a la fonction de répartition de X_a.

✓ **Positivité.**

- ⋆ Sur $[0;a]$:

  La fonction f_a est positive sur $[0;a]$ et $2\ln(2)-1 > 0$ (car $\ln(2) > \frac{1}{2}$). Donc :

  $$\forall x \in [0;a],\ h_a(x) \geqslant 0$$

- ⋆ Ailleurs :

  La fonction h_a est nulle ailleurs, donc positive.

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ h_a(x) \geqslant 0$.

✓ **Continuité.**

- ⋆ Sur $[0;a]$:

  La fonction h_a est continue sur $[0;a]$, car f_a est continue sur cet intervalle.

- ⋆ Ailleurs :

  La fonction h_a est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]a;+\infty[$ car elle est constante sur ces deux intervalles.

Conclusion : h_a est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et en a.

Petite remarque

h_a est continue en a, mais pas en 0.

✓ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h_a(x)dx$?

- ⋆ L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} h_a(x)dx$ est convergente et vaut 0.
- ⋆ L'intégrale $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} h_a(x)dx$ est convergente et vaut 0.
- ⋆ Puisque h_a est continue sur $[0;a]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^a h_a(x)dx$ n'est pas impropre.

  Puis :

  $$\begin{aligned} \int_0^a h_a(x)dx &= \int_0^a \frac{1}{2\ln(2)-1}f_a(x)dx \\ &= \frac{1}{2\ln(2)-1}I_a \qquad \text{questions 2c et 2b} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Conclusion : l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h_a(x)dx$ est convergente et, par relation de Chasles, elle vaut 1.

> **Conclusion :** la fonction h_a est une densité de probabilité.

3.b. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(a + X_a)$. En déduire l'espérance de X_a.

☞ Rappel...

Si $X(\Omega)$ est borné, alors X admet une espérance.

- On considère que $X_a(\Omega) = [0;a]$. Ainsi $(a+X_a)(\Omega) = [a;2a]$. Par conséquent, $(a+X_a)(\Omega)$ est borné et donc $a + X_a$ admet une espérance.

✗ Attention !
Pour calculer $\mathbb{E}\big(g(X)\big)$, on utilise le théorème de transfert ; et pour cela, il faut que g soit continue sur $X(\Omega)$.

- Par théorème de transfert, licite car la fonction $x \longmapsto a + x$ est continue sur $X_a(\Omega)$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(a+X_a) &= \int_0^a (a+x)h_a(x)dx \\
&= \frac{1}{2\ln(2)-1}\int_0^a (a+x)\frac{a-x}{a(a+x)}dx \\
&= \frac{1}{a\big(2\ln(2)-1\big)}\int_0^a (a-x)dx \\
&= \frac{1}{a\big(2\ln(2)-1\big)}\left[ax - \frac{x^2}{2}\right]_0^a \\
&= \frac{1}{a\big(2\ln(2)-1\big)}\frac{a^2}{2} \\
&= \frac{a}{2\big(2\ln(2)-1\big)}
\end{aligned}$$

- Puisque $X_a(\Omega)$ est bornée, X_a admet une espérance et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_a) &= \mathbb{E}(a+X_a-a) \\
&= \mathbb{E}(a+X_a) - a \\
&= \frac{a}{2\big(2\ln(2)-1\big)} - a
\end{aligned}$$

linéarité de l'espérance, licite car $a+X_a$ et a admettent une espérance

Conclusion : X_a admet une espérance et $\mathbb{E}(X_a) = \dfrac{a}{2\big(2\ln(2)-1\big)} - a$.

3.c. Calculer l'espérance $\mathbb{E}\big((a+X_a)^2\big)$. En déduire $\mathbb{E}(X_a^2)$ puis la variance de X_a.

- De même que précédemment, $a + X_a$ admet un moment d'ordre 2.
- Par théorème de transfert, licite car la fonction $x \longmapsto (a+x)^2$ est continue sur $X_a(\Omega)$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big((a+X_a)^2\big) &= \int_0^a (a+x)^2 h_a(x)dx \\
&= \frac{1}{2\ln(2)-1}\int_0^a (a+x)^2\frac{a-x}{a(a+x)}dx \\
&= \frac{1}{a\big(2\ln(2)-1\big)}\int_0^a (a+x)(a-x)dx \\
&= \frac{1}{a\big(2\ln(2)-1\big)}\int_0^a (a^2-x^2)dx \\
&= \frac{1}{a\big(2\ln(2)-1\big)}\left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^a \\
&= \frac{2a^2}{3\big(2\ln(2)-1\big)}
\end{aligned}$$

- Ensuite :

$$(a+X_a)^2 = a^2 + 2aX_a + X_a^2$$

Donc, puisque X_a admet un moment d'ordre 2 ($X_a(\Omega)$ est fini), on a par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_a^2) &= \mathbb{E}\big((a+X_a)^2\big) - a^2 - 2a\mathbb{E}(X_a) \\
&= \frac{2a^2}{3\big(2\ln(2)-1\big)} - a^2 - 2a\left(\frac{a}{2\big(2\ln(2)-1\big)} - a\right) \\
&= a^2 - \frac{a^2}{3\big(2\ln(2)-1\big)}
\end{aligned}$$

Puis, d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X_a) &= \mathbb{E}(X_a)^2 - (\mathbb{E}(X_a))^2 \\
&= a^2 - \frac{a^2}{3\big(2\ln(2)-1\big)} - \left(\frac{a}{2\big(2\ln(2)-1\big)} - a\right)^2 \\
&= -\frac{a^2}{3\big(2\ln(2)-1\big)} - \frac{a^2}{4\big(2\ln(2)-1\big)^2} + \frac{a^2}{\big(2\ln(2)-1\big)} \\
&= \frac{a^2}{12}\frac{16\ln(2)-11}{\big(2\ln(2)-1\big)^2}
\end{aligned}$$

Petite remarque
Des calculs un peu pénibles et sans grand intérêt sur ces dernières questions... A manipuler tranquillement pour ne pas se tromper. Cela reste toujours un bon entraînement !

3.d. Soit T la variable aléatoire définie par $T = \dfrac{1}{a}X_a$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}\big([T \leqslant t]\big) = H_a(at)$.
En déduire que T suit la même loi de X_1.

- Soit $t \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([T \leqslant t]\big) &= \mathbb{P}\left(\left[\frac{1}{a}X_a \leqslant t\right]\right) \qquad a > 0 \\ &= \mathbb{P}\big([X_a \leqslant at]\big) \\ &= H_a(at)\end{aligned}$$

- Par conséquent, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([T \leqslant t]\big) &= \int_0^{at} h_a(x)dx \\ &= \frac{1}{I_1}\int_0^{at} \frac{a-x}{a(a+x)}dx \qquad \text{changement de variable } x = au\text{, comme en question 2.c} \\ &= \frac{1}{I_1}\int_0^{t} \frac{1-u}{1+u}du \\ &= \int_0^{t} h_1(u)du \\ &= \mathbb{P}\big([X_1 \leqslant t]\big)\end{aligned}$$

Par conséquent, les variables aléatoires T et X_1 ont la même fonction de répartition...
Or la fonction de répartition caractérise la loi.

Conclusion : la variable aléatoire T suit la même loi que X_1.

♣ **Méthode !**
Sur les variables aléatoires à densité, lorsque l'on demande de montrer que deux variables aléatoires ont même loi, on procède très souvent en démontrant qu'elles ont la même fonction de répartition.