Énoncé

On note $\mathscr{B} = (e_0, e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$. On note également id l'endomorphisme identité sur $\mathbb{R}_2[x]$.
On considère l'application f qui, à toute fonction polynomiale $P \in \mathbb{R}_2[x]$, associe la fonction polynomiale $f(P)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(P)(x) = 2xP(x) - (x^2 - 1)P'(x)$$

1. **1.a.** Montrer que f est une application linéaire.
   1.b. Écrire $f(e_0)$, $f(e_1)$ et $f(e_2)$ comme des combinaisons linéaires de e_0, e_1 et e_2. En déduire que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$ puis donner sa matrice dans la base $\mathscr{B}$. *On notera A cette matrice.*
2. **2.a.** Vérifier que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(e_1, e_0 + e_2)$ et donner le rang de f.
   2.b. Déterminer $\ker(f)$.
3. **3.a.** Déterminer les valeurs propres de A.
   3.b. Déterminer des bases de chaque sous-espace propre de A et en déduire que A est diagonalisable. Donner alors deux matrices P et D telles que P soit inversible, D soit diagonale et $A = PDP^{-1}$.

Corrigé

On note $\mathscr{B} = (e_0, e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$. On note également id l'endomorphisme identité sur $\mathbb{R}_2[x]$.
On considère l'application f qui, à toute fonction polynomiale $P \in \mathbb{R}_2[x]$, associe la fonction polynomiale $f(P)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(P)(x) = 2xP(x) - (x^2 - 1)P'(x)$$

1. **1.a.** Montrer que f est une application linéaire.

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in \mathbb{R}_2[x]$. Montrons que $f(\lambda P + \mu Q) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$.
On a, par linéarité de la dérivation, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(\lambda P + \mu Q)(x) &= 2x\big(\lambda P(x) + \mu Q(x)\big) - (x^2-1)\big(\lambda P'(x) + \mu Q'(x)\big) \\ &= \lambda \times 2xP(x) + \mu \times 2xQ(x) - \lambda(x^2-1)P'(x) - \mu(x^2-1)Q'(x) \\ &= \lambda f(P)(x) + \mu f(Q)(x) \end{aligned}$$

Par conséquent : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(\lambda P + \mu Q) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$. Autrement dit : $f(\lambda P + \mu Q) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$.

Conclusion : f est une application linéaire.

> **✘ Attention !**
> Il s'agit d'une égalité de fonctions...

1.b. Écrire $f(e_0)$, $f(e_1)$ et $f(e_2)$ comme des combinaisons linéaires de e_0, e_1 et e_2. En déduire que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$ puis donner sa matrice dans la base $\mathscr{B}$. *On notera A cette matrice.*

- Sans difficulté, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(e_0)(x) = 2x \quad ; \quad f(e_1)(x) = x^2 + 1 \quad ; \quad f(e_2)(x) = 2x$$

D'où :

$$f(e_0) = 2e_1 \quad ; \quad f(e_1) = e_0 + e_2 \quad ; \quad f(e_2) = 2e_1$$

> **Important !**
> Il s'agit ici d'égalité de fonctions : c'est bien ce qui est demandé par l'énoncé.

- Déduisons-en que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.
Soit $P \in \mathbb{R}_2[x]$. Il existe alors un unique triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, que l'on considère ensuite, tels que $P = ae_0 + be_1 + ce_2$. On a ainsi :

> **Remarque**
> L'unicité n'est pas utile ici.

$$\begin{aligned} f(P) &= f(ae_0 + be_1 + ce_2) \\ &= af(e_0) + bf(e_1) + cf(e_2) \qquad \text{linéarité de } f \end{aligned}$$

Or, d'après le point précédent, $f(e_0)$, $f(e_1)$ et $f(e_2)$ sont dans $\mathbb{R}_2[x]$. Par stabilité de $\mathbb{R}_2[x]$ par combinaisons linéaires, on obtient finalement :

$$f(P) \in \mathbb{R}_2[x]$$

Conclusion : puisque f est linéaire d'après la question précédente, on en déduit que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.

- D'après le premier point, on a :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. **2.a.** Vérifier que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(e_1, e_0 + e_2)$ et donner le rang de f.

- Puisque (e_0, e_1, e_2) est génératrice de $\mathbb{R}_2[x]$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= \mathrm{Vect}\big(f(e_0), f(e_1), f(e_2)\big) \\ &= \mathrm{Vect}\big(2e_1, e_0 + e_2, 2e_1\big) \qquad \text{question précédente} \\ &= \mathrm{Vect}\big(e_1, e_0 + e_2\big) \end{aligned}$$

> **☞ Rappel...**
> Si $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice de E et que f est linéaire de E dans F, alors
> $$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)$$

- La famille $(e_1, e_0 + e_2)$ est ainsi :
  - ✓ génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ par ce qui précède,
  - ✓ libre car seulement constituée de deux vecteurs non colinéaires.

Par conséquent, la famille $(e_1, e_0 + e_2)$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Conclusion : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(e_1, e_0 + e_2)$ et $\mathrm{rg}(f) = \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = 2$.

> **Remarque**
> Il est possible de traiter cette question en utilisant la matrice A, sans oublier de conclure avec les bons objets pour f...

2.b. Déterminer $\ker(f)$.

- D'après le théorème du rang :

$$\dim\big(\mathbb{R}_2[x]\big) = \mathrm{rg}(f) + \dim\big(\ker(f)\big)$$

Or $\dim\big(\mathbb{R}_2[x]\big) = 3$ et, d'après la question précédente, $\mathrm{rg}(f) = 2$. D'où

$$\dim\big(\ker(f)\big) = 1$$

- Remarquons ensuite que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \ker(A)$. Donc $e_0 - e_2 \in \ker(f)$.

Par conséquent, la famille $(e_0 - e_2)$ est une famille de $\ker(f)$ qui est :

✓ libre car constituée d'une unique vecteur non nul,

✓ de cardinal 1 égal à la dimension de $\ker(f)$.

Conclusion : la famille $(e_0 - e_2)$ est une base de $\ker(f)$.

Ou alors...

Il est bien évidemment possible de travailler sur la matrice A !
En effet, après résolution de système, on trouve :

$$\ker(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

Ainsi :

$$\ker(f) = \mathrm{Vect}(e_0 - e_2)$$

La famille $(e_0 - e_2)$ est ainsi :

✓ génératrice de $\ker(f)$;

✓ libre car constituée d'un unique vecteur non nul.

Conclusion : la famille $(e_0 - e_2)$ est une base de $\ker(f)$.

3. 3.a. Déterminer les valeurs propres de A.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(A - \lambda I_3) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \\
&\underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \\
&\underset{L_2 \leftarrow 2L_2 + \lambda L_1}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2-\lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \\
&\underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 2-\lambda^2 & 2\lambda \end{pmatrix} \\
&\underset{L_3 \leftarrow L_3 - (2-\lambda^2)L_2}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 2\lambda + \lambda(2-\lambda^2) \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda(4-\lambda^2) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Or, la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda(4-\lambda^2) \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure ; par conséquent, elle est de rang différent de 3 si, et seulement si, $\lambda(4-\lambda^2) = 0$.

Conclusion : $\mathrm{Sp}(A) = \{-2; 0; 2\}$.

3.b. Déterminer des bases de chaque sous-espace propre de A et en déduire que A est diagonalisable. Donner alors deux matrices P et D telles que P soit inversible, D soit diagonale et $A = PDP^{-1}$.

Pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, on note $E_\lambda(A)$ le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ.

- On sait que :

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim\left(E_\lambda(A)\right) \leqslant 3 \quad ; \quad \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ \dim\left(E_\lambda(A)\right) \geqslant 1$$

Or, d'après la question précédente, la matrice A possède trois valeurs propres différentes. Par saturation des dimensions, on en déduit que chaque sous-espace propre associé est de dimension 1.

  * Pour $\lambda = 0$:
  D'après la question 2.b., on sait déjà que $(e_0 - e_2)$ est une base de $\ker(A)$.

  * Pour $\lambda = -2$:
  On a : $A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et on remarque que $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker(A + 2I_3)$.

♥ Astuce du chef ♥

On fait aisément cette remarque puisque les colonnes 1 et 3 de la matrice A sont égales...
Remarquer l'égalité $C_1 + 0C_2 - C_3 = 0_{3,1}$ nous permet de mettre en évidence un vecteur du noyau de la matrice A...
En effet, si C_1, C_2, C_3 sont les colonnes d'une matrice B, on a :

$$B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = xC_1 + yC_2 + zC_3,$$

donc : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(B) \iff xC_1 + yC_2 + zC_3 = 0$...

Pourquoi ?

C'est l'isomorphisme de représentation qui permet de passer de $\ker(A)$ à $\ker(f)$.

Remarque

Il est toujours un peu confus lorsque l'énoncé demande de "déterminer $\ker(f)$". En effet, on pourrait penser que s'arrêter à une famille génératrice suffit. Je conseille vivement de toujours conclure avec une base (sauf quand $\ker(f) = \{0_E\}$).

☞ Rappel...

$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \iff \mathrm{rg}(A - \lambda I_3) \neq 3$

Important !

Il faut s'entraîner à trouver de tête des vecteurs dans les noyaux des matrices... surtout quand elles ont des coefficients nuls, c'est plus simple. Reprendre l'astuce ci-dessus si nécessaire.

Par conséquent, la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right)$ est une famille de $E_{-2}(A)$ qui est :

✓ libre car constituée d'un unique vecteur non nul,

✓ de cardinal 1, égal à la dimension de $E_{-2}(A)$.

Conclusion : la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_{-2}(A)$.

* Pour $\lambda = 2$:

On a : $A - 2I_3 = \begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 2\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}$ et on remarque que $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \in \ker(A - 2I_3)$.

Par conséquent, la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right)$ est une famille de $E_2(A)$ qui est :

✓ libre car constituée d'un unique vecteur non nul,

✓ de cardinal 1, égal à la dimension de $E_2(A)$.

Conclusion : la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_2(A)$.

- La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right)$, notée $\mathscr{B}'$, est une famille de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est :

✓ libre car constituée de vecteurs propres de A associés à des valeurs propres distinctes,

✓ de cardinal 3, égal à la dimension de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Par conséquent, $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Conclusion : il existe une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A, donc A est diagonalisable.
En posant

$$P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 2\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix} \quad ; \quad D = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

on a :

✓ P est inversible car c'est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ vers la base $\mathscr{B}'$;

✓ D est diagonale ;

✓ $A = PDP^{-1}$.

☞ Rappel...

Cette relation est due à la formule de changement de bases. En effet, en notant $\mathscr{B} = (e_0 - e_1, e_0 - 2e_1 + e_2, e_0 + 2e_1 + e_2)$, on a : $A = \text{Mat}_{bc}(f)$, $P = P_{bc,\mathscr{B}}$ et $D = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. La formule de changement de base donne bien $A = PDP^{-1}$.