Énoncé

On suppose que toutes les variables aléatoires présentées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} \dfrac{-1}{t^3} & \text{si } t \leqslant -1 \\ 0 & \text{si } -1 < t < 1 \\ \dfrac{1}{t^3} & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}$$

1. Démontrer que la fonction f est paire.
2. Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt$ est convergente et calculer sa valeur.
3. 3.a. À l'aide d'un changement de variable, montrer que pour tout réel $A > 1$, on a :

$$\int_{-A}^{-1} f(t)dt = \int_1^A f(u)du$$

En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(t)dt$ est convergente et donner sa valeur.

3.b. Montrer que la fonction f est une densité de probabilité.

4. On considère une variable aléatoire X admettant f pour densité et on note F_X sa fonction de répartition.

4.a. Montrer que, pour tout réel x, on a :

$$F_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \leqslant -1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } -1 < x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

4.b. Démontrer que X admet une espérance, puis que cette espérance est nulle.

4.c. La variable aléatoire X admet-elle une variance ?

5. Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = |X|$.

5.a. Déterminer la fonction de répartition de Y, et montrer que Y est une variable aléatoire à densité.

5.b. Montrer que Y admet pour densité la fonction f_Y définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

5.c. Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

Partie B

6. Soit D une variable aléatoire prenant les valeurs -1 et 1 avec équiprobabilité, indépendante de la variable aléatoire Y.
Soit T la variable aléatoire définie par $T = DY$.

6.a. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z = \dfrac{D+1}{2}$. En déduire l'espérance et la variance de D.

6.b. Justifier que T admet une espérance et préciser sa valeur.

6.c. Montrer que pour tout réel x : $\mathbb{P}\big([T \leqslant x]\big) = \dfrac{1}{2}\mathbb{P}\big([Y \leqslant x]\big) + \dfrac{1}{2}\mathbb{P}\big([Y \geqslant -x]\big)$.

6.d. En déduire la fonction de répartition de T, notée F_T.

7. Soient U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0;1[$ et $V = \dfrac{1}{\sqrt{1-U}}$.

7.a. Rappeler la fonction de répartition de U.

7.b. Déterminer la fonction de répartition de V et vérifier que les variables aléatoires V et Y ont la même loi.

8. Utiliser ce qui précède pour écrire une fonction **Python** permettant de simuler une réalisation de la variable aléatoire T.

Corrigé

On suppose que toutes les variables aléatoires présentées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} \dfrac{-1}{t^3} & \text{si } \ t \leqslant -1 \\ 0 & \text{si } \ -1 < t < 1 \\ \dfrac{1}{t^3} & \text{si } \ t \geqslant 1 \end{cases}$$

1. Démontrer que la fonction f est paire.

   $\mathbb{R}$ est centré en 0 et pour tout $t \in \mathbb{R}$:

♡ Astuce du chef ! ♡
On remplace **tous les t par $-t$ directement dans l'expression de $f(t)$ définie par morceaux.**

$$\begin{aligned} f(-t) &= \begin{cases} \dfrac{-1}{(-t)^3} & \text{si } \ -t \leqslant -1 \\ 0 & \text{si } \ -1 < -t < 1 \\ \dfrac{1}{(-t)^3} & \text{si } \ -t \geqslant 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{t^3} & \text{si } \ t \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } \ 1 > t > -1 \\ \dfrac{-1}{t^3} & \text{si } \ t \leqslant -1 \end{cases} \\ &= f(t) \end{aligned}$$

> **Conclusion :** f est paire.

2. Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt$ est convergente et calculer sa valeur.

   - f est continue sur $[1; +\infty[$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt$ est impropre en $+\infty$.
   - Soit $B \in [1; +\infty[$. On a :

$$\begin{aligned} \int_1^B f(t)dt &= \int_1^B \frac{1}{t^3} dt \\ &= \int_1^B t^{-3} dt \\ &= \left[\frac{1}{-2} t^{-2}\right]_1^B \\ &= \left[\frac{-1}{2t^2}\right]_1^B \\ &= \frac{-1}{2B^2} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

   Or, par opérations : $\displaystyle\lim_{B\to+\infty} \frac{-1}{2B^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

> **Conclusion :** l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt$ est convergente et vaut $\dfrac{1}{2}$.

3. **3.a.** À l'aide d'un changement de variable, montrer que pour tout réel $A > 1$, on a :

$$\int_{-A}^{-1} f(t)dt = \int_1^A f(u)du$$

   En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(t)dt$ est convergente et donner sa valeur.

   Soit $A > 1$. Effectuons le changement de variable $t = -u$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_{-A}^{-1} f(t)dt$:

$$\left| \begin{array}{lcl} t & = & -u \\ u & = & -t \end{array} \right. \quad ; \quad \left| \begin{array}{lcl} dt & = & -du \\ du & = & -dt \end{array} \right. \quad ; \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline t = & -A & -1 \\ \hline u = & A & 1 \\ \hline \end{array}$$

   Ce changement de variable est bien licite car affine non constant et ainsi :

$$\int_{-A}^{-1} tf(t)dt = = \int_A^1 -f(-u)(-du)$$

f est paire

$$= -\int_A^1 f(u)du$$
$$= \int_1^A f(u)du$$

Or, d'après la question précédente, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(u)du$ est convergente et vaut $\frac{1}{2}$.
D'où :

$$\lim_{A\to+\infty} \int_1^A uf(u)du = \frac{1}{2}$$

Conclusion : l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(t)dt$ est convergente et vaut $\frac{1}{2}$.

Petites remarques

- Le résultat obtenu peut être considéré comme un résultat de cours ; il faut donc le connaître… Mais il arrive que l'énoncé demande de le redémontrer. A savoir faire !
- Un intermédiaire pourrait être d'effectuer le changement de variable sur l'intégrale impropre (les changements de variable affines sont autorisés) si l'énoncé n'avait pas imposé de travailler sur un segment.

3.b. Montrer que la fonction f est une densité de probabilité.

✓ **Positivité.**
La fonction f est positive sur $]-1;1[$ et sur $[1;+\infty[$ sans difficulté.
Ensuite, pour tout $t \leqslant -1$, on a $t^3 < 0$ et donc $\frac{-1}{t^3} > 0$.
Par conséquent : f est positive sur $\mathbb{R}$.

✓ **Continuité.**
Immédiatement, f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en -1 et en 1.

✓ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ **?**
D'après les questions précédentes, que $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(t)dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt$ sont convergentes et valent $\frac{1}{2}$.
Enfin, l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)dt$ vaut 0.
Par conséquent, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ est convergente, d'après la relation de Chasles, vaut 1.

Conclusion : f est une densité de probabilité.

4. On considère une variable aléatoire X admettant f pour densité et on note F_X sa fonction de répartition.

4.a. Montrer que, pour tout réel x, on a :

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \leqslant -1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } -1 < x < 1 \\ 1 - \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$F_X(x) = \mathbb{P}\big([X \leqslant x]\big)$$
$$= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \qquad X \text{ est à densité, de densité } f$$

Distinguons ensuite trois cas :

- Si $x \leqslant -1$:

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{-1}{t^3}dt$$
$$= \left[\frac{1}{2t^2}\right]_{\to-\infty}^{x}$$
$$= \frac{1}{2x^2}$$

✍ Rédaction
On tolère cette rédaction, mais il faut déjà savoir que l'intégrale est convergente (ce qui est le cas ici).

- Si $x \in]-1;1[$:
Par relation de Chasles :

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{-1} f(t)dt + \int_{-1}^{x} f(t)dt \qquad \text{question 3.a et } x \in]-1;1[$$
$$= \frac{1}{2} + 0$$
$$= \frac{1}{2}$$

- Si $x \geqslant 1$:
Par relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{x} f(t)dt &= \int_{-\infty}^{-1} f(t)dt + \int_{-1}^{1} f(t)dt + \int_{1}^{x} f(t)dt \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2} \\ &= 1 - \frac{1}{2x^2}\end{aligned}$$

question **3.a** et calcul effectué en question **2**, licite car $x \geqslant 1$

Conclusion : pour tout réel x, $F_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \leqslant -1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } -1 < x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

Petite remarque
Vérifications habituelles :
- F_X est continue sur $\mathbb{R}$ (car X est à densité)
- $\lim\limits_{-\infty} F_X = 0$
- $\lim\limits_{+\infty} F_X = 1$

4.b. Démontrer que X admet une espérance, puis que cette espérance est nulle.

- On sait que :

X admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |t| f(t)dt$ est convergente
si, et seulement si, les intégrales $\int_{-\infty}^{-1} |t| f(t)dt$ et $\int_{1}^{+\infty} |t| f(t)dt$ sont convergentes, car f est nulle sur $]-1;1[$
si, et seulement si, les intégrales $\int_{-\infty}^{-1} -t f(t)dt$ et $\int_{1}^{+\infty} t f(t)dt$ sont convergentes
si, et seulement si, les intégrales $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^2}dt$ et $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ sont convergentes

- Or :
  - ⋆ l'intégrale $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ est une intégrale de Riemann impropre en $+\infty$ qui est convergente,
  - ⋆ et la fonction $t \longmapsto \frac{1}{t^2}$ est paire, donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^2}dt$ est également convergente.
- On en déduit que X admet une espérance et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{-1} \frac{-1}{t^2}dt + \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt \\ &= -\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^2}dt + \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt \\ &= 0\end{aligned}$$

$t \longmapsto \frac{1}{t^2}$ est paire

✘ Attention !
Il n'y a plus la valeur absolue ici...

À retenir...
Si une VA admet une espérance et qu'elle a une densité paire, alors son espérance est nulle.

Conclusion : X admet une espérance et $E(X) = 0$.

4.c. La variable aléatoire X admet-elle une variance ?

- Par théorème de transfert, licite car la fonction $x \longmapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$: :

X admet un moment d'ordre 2 si, et seulement si, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt$ est convergente (car intégrande positive)
si, et seulement si, les intégrales $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t}dt$ et $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t}dt$ sont convergentes, car f est nulle sur $]-1;1[$

- Or l'intégrale $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t}dt$ est une intégrale de Riemann impropre en $+\infty$ qui est divergente.
- Par conséquent, la variable aléatoire X n'admet pas de moment d'ordre 2.

Conclusion : X n'admet pas de variance.

5. Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = |X|$.

5.a. Déterminer la fonction de répartition de Y, et montrer que Y est une variable aléatoire à densité.

> ☞ **Rappel...**
> On choisit $X(\Omega)$ comme le plus grand ensemble sur lequel f n'est pas nulle (ou F_X n'est pas constante).

- On considère que $X(\Omega) =]-\infty; 1] \cup [1; +\infty[$.
  On a ainsi :
  $$Y(\Omega) = [1; +\infty[$$
  Notons F_Y la fonction de répartition de Y. Soit $x \in \mathbb{R}$.
  - si $x < 1$:
  $$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}\big([Y \leqslant x]\big) \\ &= \mathbb{P}(\varnothing) \\ &= 0 \end{aligned}$$
  $x < 0$ et $Y(\Omega) = [1; +\infty[$, donc $[Y \leqslant x] = \varnothing$
  - si $x \geqslant 1$:
  $$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}\big([Y \leqslant x]\big) \\ &= \mathbb{P}\big([|X| \leqslant x]\big) \\ &= \mathbb{P}\big([-x \leqslant X \leqslant x]\big) \\ &= F_X(x) - F_X(-x) \\ &= 1 - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x^2} \\ &= 1 - \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$
  $x \geqslant 0$
  X est à densité
  $x \geqslant 1$ et $-x \leqslant -1$

Conclusion : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

- On en déduit :
  ✓ **Continuité.**
  - Sur $]-\infty; 1[$: F_Y est continue $]-\infty; 1[$ car constante sur cet intervalle.
  - Sur $]1; +\infty[$: F_Y est continue sur $]1; +\infty[$ comme somme de fonctions usuelles continue sur cet intervalle.
  - En 1 :
  $$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} F_Y(x) = 0 = F(1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} F_Y(x)$$
  La fonction F_Y est donc continue en 1.

  Par conséquent : F_Y est continue sur $\mathbb{R}$.
  ✓ **Caractère $\mathscr{C}^1$.**
  Par des arguments similaires à la continuité, la fonction F_Y est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 1.

Conclusion : Y est une variable aléatoire à densité.

5.b. Montrer que Y admet pour densité la fonction f_Y définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si } \ x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
Il suffit de dériver F_Y sur $]-\infty; 1[$ et $]1; +\infty[$ puis de poser $f_Y(1) = 2$.

Conclusion : Y admet pour densité la fonction f_Y définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si } \ x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

5.c. Montrer que Y admet une espérance et la calculer.
- On sait que :

  Y admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_Y(x)\, dx$ est convergente
  si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} x f_Y(x)\, dx$ est convergente, car f est nulle sur $]-\infty; 1[$ et que l'intégrande est positive sur $[1; +\infty[$
  si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{2}{x^2}\, dx$ est convergente

- Or l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ est une intégrale de Riemann impropre en $+\infty$ qui est convergente.

- On en déduit que Y admet une espérance et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_Y(x) dx \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{2}{x^2} dx \\ &= \left[\frac{-2}{x}\right]_1^{x\to+\infty} \\ &= 2\end{aligned}$$

Conclusion : Y admet une espérance et $\mathbb{E}(Y) = 2$.

Partie B

6. Soit D une variable aléatoire prenant les valeurs -1 et 1 avec équiprobabilité, indépendante de la variable aléatoire Y.
Soit T la variable aléatoire définie par $T = DY$.

6.a. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z = \dfrac{D+1}{2}$. En déduire l'espérance et la variance de D.

Puisque $D(\Omega) = \{-1; 1\}$, on obtient :

$$Z(\Omega) = \{0; 1\}$$

Par conséquent, Z suit la loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}\big([Z = 1]\big)$.
Or :

$$\begin{aligned}[Z = 1] &= \left[\frac{D+1}{2} = 1\right] \\ &= [D = 1]\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([Z = 1]\big) &= \mathbb{P}\big([D = 1]\big) \\ &= \frac{1}{2} \qquad \text{équiprobabilité}\end{aligned}$$

Conclusion : Z suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

6.b. Puisque $Z = \dfrac{D+1}{2}$, on a :

$$D = 2Z - 1$$

Or Z admet une espérance et une variance, donc D également, comme fonction affine de Z ; et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(D) &= \mathbb{E}(2Z - 1) \\ &= 2\mathbb{E}(Z) - 1 \qquad \text{linéarité de l'espérance} \\ &= 0 \qquad Z \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(D) &= \mathbb{V}(2Z - 1) \\ &= 4\mathbb{V}(Z) \\ &= 4\frac{1}{4} \qquad Z \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= 1\end{aligned}$$

Petite remarque

Bien évidemment, on peut calculer $\mathbb{E}(D)$ et $\mathbb{V}(D)$ directement... Mais l'énoncé précise bien d'en déduire...

6.c. Justifier que T admet une espérance et préciser sa valeur.

On sait que $T = DY$ et

✓ D et Y admettent une espérance,

✓ D et Y sont indépendantes.

Par conséquent, la variable T admet une espérance et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T) &= \mathbb{E}(DY) \\ &= \mathbb{E}(D)\mathbb{E}(Y) \qquad \text{indépendance de } D \text{ et } Y \\ &= 1 \qquad \text{questions 5.c et 6.a}\end{aligned}$$

Important !

L'indépendance sert également pour justifier l'existence !
En effet, sinon, il suffit de considérer une variable aléatoire W qui admet une espérance : W et W admettent une espérance et pourtant $W \times W$ n'admet pas nécessairement une espérance...

Conclusion : T admet une espérance et $\mathbb{E}(T) = 1$.

6.d. Montrer que pour tout réel x : $\mathbb{P}([T \leqslant x]) = \frac{1}{2}\mathbb{P}([Y \leqslant x]) + \frac{1}{2}\mathbb{P}([Y \geqslant -x])$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la formule des probabilités totales, avec $([D=-1],[D=1])$ comme système complet d'évènements, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([T \leqslant x]) &= \mathbb{P}([D=-1]\cap[T \leqslant x]) + \mathbb{P}([D=1]\cap[T \leqslant x]) \\
&= \mathbb{P}([D=-1]\cap[DY \leqslant x]) + \mathbb{P}([D=1]\cap[DY \leqslant x]) \\
&= \mathbb{P}([D=-1]\cap[-Y \leqslant x]) + \mathbb{P}([D=1]\cap[Y \leqslant x]) \\
&= \mathbb{P}([D=-1])\mathbb{P}([Y \geqslant -x]) + \mathbb{P}([D=1])\mathbb{P}([Y \leqslant x]) \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}([Y \leqslant x]) + \frac{1}{2}\mathbb{P}([Y \geqslant -x])
\end{aligned}$$

indépendance de D et Y

Conclusion : pour tout réel x, $\mathbb{P}([T \leqslant x]) = \frac{1}{2}\mathbb{P}([Y \leqslant x]) + \frac{1}{2}\mathbb{P}([Y \geqslant -x])$.

➠Réflexe !
Pour des lois de couples, on pense à la FPT...

6.e. En déduire la fonction de répartition de T, notée F_T.

- Puisque $Y(\Omega) = [1;+\infty[$ et que $D(\Omega) = \{-1;1\}$, on a $T(\Omega) \subset]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
F_T(x) &= \mathbb{P}([T \leqslant x]) \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}([Y \leqslant x]) + \frac{1}{2}\mathbb{P}([Y \geqslant -x]) \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}([Y \leqslant x]) + \frac{1}{2}\left(1-\mathbb{P}([Y \leqslant -x])\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1+F_Y(x)-F_Y(-x)\right)
\end{aligned}$$

question précédente

Y est à densité

Distinguons ensuite trois cas :

⋆ Si $x \leqslant -1$:

$$\begin{aligned}
F_T(x) &= \frac{1}{2}\left(1+F_Y(x)-F_Y(-x)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1+0-1+\frac{1}{(-x)^2}\right) \\
&= \frac{1}{2x^2}
\end{aligned}$$

$x \leqslant -1$, donc $-x \geqslant 1$ puis question 5.a

⋆ Si $x \in]-1;1[$:

$$\begin{aligned}
F_T(x) &= \frac{1}{2}\left(1+F_Y(x)-F_Y(-x)\right) \\
&= \frac{1}{2}(1+0+0) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$x \in]-1;1[$, donc $-x \in]-1;1[$ puis question 5.a

⋆ Si $x \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
F_T(x) &= \frac{1}{2}\left(1+F_Y(x)-F_Y(-x)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1+1-\frac{1}{x^2}+0\right) \\
&= 1-\frac{1}{2x^2}
\end{aligned}$$

$x \geqslant 1$, donc $-x \leqslant -1$ puis question 5.a

Petite remarque
Comme à chaque fois, le travail sur l'ensemble image n'est pas indispensable mais il aide à structurer le raisonnement en nous permettant de mieux repérer les cas à distinguer...

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_T(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \leqslant -1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } -1 < x < 1 \\ 1-\frac{1}{2x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.

Petite remarque
On retrouve la fonction de répartition de X... Or la fonction de répartition caractérise la loi. Par conséquent, X et T ont la même loi.

7. Soient U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0;1[$ et $V = \frac{1}{\sqrt{1-U}}$.

7.a. Rappeler la fonction de répartition de U.

Conclusion : il s'agit de la fonction $F_U \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x & \text{si } x \in]0;1[\\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.

7.b. Déterminer la fonction de répartition de V et vérifier que les variables aléatoires V et Y ont la même loi.
Notons F_V la fonction de répartition de V.

- Notons $h : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$. On a :

$$\begin{aligned} V(\Omega) &= h\big(U(\Omega)\big) \\ &= h(]0;1[) \\ &=]\lim_{x\to 0} h(x); \lim_{x\to 1} h(x)[&& \text{h est continue et strictement croissante sur $]0;1[$} \\ &=]1;+\infty[\end{aligned}$$

Important !
La continuité garantit le fait que, puisque $]0;1[$ est un intervalle, $h(]0;1[)$ en sera également un (TVI). La stricte monotonie permet de connaître les bornes...

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Distinguons deux cas.
  - ⋆ Si $x \leqslant 1$:

$$\begin{aligned} F_V(x) &= \mathbb{P}\big([V \leqslant x]\big) \\ &= \mathbb{P}(\varnothing) && \text{$x \leqslant 1$ et $V(\Omega) =]1;+\infty[$, donc $[V \leqslant x] = \varnothing$} \\ &= 0 \end{aligned}$$

  - ⋆ Si $x > 1$:

$$\begin{aligned} F_V(x) &= \mathbb{P}\big([V \leqslant x]\big) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[\frac{1}{\sqrt{1-U}} \leqslant X\right]\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[\sqrt{1-U} \geqslant \frac{1}{x}\right]\right) && \text{stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_*^+$, licite car $x > 0$} \\ &= \mathbb{P}\left(\left[1-U \geqslant \frac{1}{x^2}\right]\right) && \text{stricte croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$, licite car $\frac{1}{x} > 0$} \\ &= \mathbb{P}\left(\left[U \leqslant 1-\frac{1}{x^2}\right]\right) \\ &= F_U\left(1-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= 1-\frac{1}{x^2} && \text{$x > 1$, donc $\frac{1}{x^2} \in]0;1[$, donc $1-\frac{1}{x^2} \in]0;1[$} \end{aligned}$$

> **Conclusion :** $\forall x \in \mathbb{R},\ F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 1 \\ 1-\dfrac{1}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

- On a ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F_V(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 1 \\ 1-\dfrac{1}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1-\dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases} && \text{question 5.a} \\ &= F_Y(x) \end{aligned}$$

Les variables aléatoires Y et V ont donc la même fonction de répartition. Or la fonction de répartition caractérise la loi...

> **Conclusion :** les variables aléatoires V et Y ont la même loi.

8. Utiliser ce qui précède pour écrire une fonction **Python** permettant de simuler une réalisation de la variable aléatoire T.
On simule D puis Y et on en fait le produit pour avoir une réalisation de T...
Et on simule Y en utilisant ce qui vient d'être fait !

```
import numpy.random as rd

def simule_T():
    if rd.random()<1/2:
        D=-1
    else :
        D=1
    U=rd.random()
    Y=1/np.sqrt(1-U)
    T=D*Y
    return T
```

★ Classique ! ★
Il est très classique et fréquent de trouver ce type de questions, basées sur la méthode d'inversion...