EDHEC 2005 voie E
Exercice 3

Énoncé

Dans cet exercice, a désigne un réel strictement positif et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \begin{cases} a(1-t)^{a-1} & \text{si } t \in [0;1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. **1.a.** Pour tout $x \in [0;1[$, calculer $\displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

   1.b. En déduire que $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ est une intégrale convergente et donner sa valeur.

   1.c. Montrer que f peut être considérée comme une densité de probabilité.

   Dans la suite, on considère une variable aléatoire X, de densité f et de fonction de répartition F.
2. Expliciter $F(x)$ pour tout réel x.
3. On pose $Y = -\ln(1-X)$ et on admet que Y est une variable aléatoire. On note G sa fonction de répartition.

   3.a. Pour tout réel x, exprimer $G(x)$ en fonction de x.

   3.b. En déduire que Y suit la loi exponentielle de paramètre a.
4. **4.a.** Pour tout $\lambda > 0$, donner la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x} dx$.

   4.b. Démontrer que la variable aléatoire e^{-Y} possède une espérance et donner sa valeur en fonction de a.

   4.c. Exprimer X en fonction de Y puis en déduire que X possède une espérance que l'on exprimera en fonction de a.

   4.d. Montrer que la variable aléatoire e^{-2Y} possède une espérance et que $\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-2Y}\right) = \dfrac{a}{a+2}$.

   En déduire la variance de e^{-Y} puis la variance de X.
5. Écrire une fonction **Python** prenant en argument un réel strictement positif a et permettant de simuler une réalisation de la variable aléatoire X.

Corrigé

Dans cet exercice, a désigne un réel strictement positif et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \begin{cases} a(1-t)^{a-1} & \text{si } t \in [0;1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. **1.a.** Pour tout $x \in [0;1[$, calculer $\displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

Soit $x \in [0;1[$. Puisque $x \in [0;1[$, on a :

$$\forall t \in [0;x],\ f(t) = a(1-t)^{a-1}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\int_0^x f(t)dt &= \int_0^x a(1-t)^{a-1}dt \qquad a-1 \neq -1 \\ &= \left[-(1-t)^a\right]_0^x \\ &= 1-(1-x)^a\end{aligned}$$

1.b. En déduire que $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ est une intégrale convergente et donner sa valeur.

Remarque
Les intégrales impropres en un réel ne sont plus au programme. Cet exercice ne pourrait normalement donc pas être donné.

Distinguons deux cas :

- Si $a \geqslant 1$:
  La fonction f est alors continue sur $[0;1]$ (car $\lim\limits_{\substack{t\to1\\t<1}} f(t) = 0 = f(1)$), l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ n'est donc pas impropre et elle est ainsi convergente.
  Et on obtient, d'après la question précédente :
  $$\int_0^1 f(t)dt = 1$$
- Si $a \in]0;1[$.
  La fonction f est alors continue sur $[0;1[$ et tend vers $+\infty$ en 1, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ est impropre en 1.
  Or :
  - ∗ d'après la question précédente :
  $$\forall x \in [0;1[,\ \int_0^x f(t)dt = 1-(1-x)^a$$
  - ∗ puisque $a > 0$:
  $$\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} \left(1-(1-x)^a\right) = 1$$

  Par conséquent, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ est convergente et vaut 1.

Conclusion : dans tous les cas, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ est convergente et vaut 1.

1.c. Montrer que f peut être considérée comme une densité de probabilité.

✓ f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et en 1
✓ f est positive sur $\mathbb{R}$ car : $\forall t \in [0;1[,\ 1-t \geqslant 0$
✓ $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ converge et vaut 1 et de plus : $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f(t)dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt$ convergent et sont nulles...
Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et, par relation de Chasles, vaut 1.

Conclusion : f est une densité de probabilité.

Dans la suite, on considère une variable aléatoire X, de densité f et de fonction de répartition F.

2. Expliciter $F(x)$ pour tout réel x.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}F(x) &= \mathbb{P}\left([X \leqslant x]\right) \qquad X \text{ est à densité, de densité } f \\ &= \int_{-\infty}^x f(t)dt\end{aligned}$$

Distinguons ensuite trois cas :

- si $x < 0$:
Puisque f est nulle sur $]-\infty; 0[$ et que $x < 0$:
$$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0$$
- si $x \in [0; 1[$:
Par relation de Chasles, avec $x \geqslant 0$:
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{x} f(t)dt &= \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt && \text{f est nulle sur $]-\infty;0[$}\\ &= \int_{0}^{x} f(t)dt && \text{calcul fait en question 1.a., licite car $x \in [0;1[$}\\ &= 1-(1-x)^a\end{aligned}$$
- si $x \geqslant 1$:
Par relation de Chasles, avec $x \geqslant 1$:
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{x} f(t)dt &= \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{1} f(t)dt + \int_{1}^{x} f(t)dt && \text{f est nulle sur $]-\infty;0[$ et sur $[1;+\infty[$, et $x \geqslant 1$}\\ &= \int_{0}^{1} f(t)dt && \text{question 1.b.}\\ &= 1\end{aligned}$$

Conclusion : $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-(1-x)^a & \text{si } x \in [0;1[\\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

Ou alors...

On considère que $X(\Omega) = [0; 1[$.
- si $x < 0$:
$$\begin{aligned}F(x) &= \mathbb{P}\big([X \leqslant x]\big) && \text{$x<0$ et $X(\Omega)=[0;1[$, donc $[X \leqslant x] = \varnothing$}\\ &= \mathbb{P}(\varnothing)\\ &= 0\end{aligned}$$
- si $x \in [0; 1[$:
$$\begin{aligned}F(x) &= \mathbb{P}\big([X \leqslant x]\big) && \text{X est à densité, de densité f}\\ &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt && \text{f est nulle sur $]-\infty;0[$}\\ &= \int_{0}^{x} f(t)dt && \text{calcul fait en question 1.a.}\\ &= 1-(1-x)^a\end{aligned}$$
- si $x \geqslant 1$:
$$\begin{aligned}F(x) &= \mathbb{P}\big([X \leqslant x]\big) && \text{$x \geqslant 1$ et $X(\Omega)=[0;1[$, donc $[X \leqslant x] = \Omega$}\\ &= \mathbb{P}(\Omega)\\ &= 1\end{aligned}$$

Pourquoi ?
Parce-que f est nulle en dehors de $[0; 1[$...

3. On pose $Y = -\ln(1-X)$ et on admet que Y est une variable aléatoire. On note G sa fonction de répartition.

3.a. Pour tout réel x, exprimer $G(x)$ en fonction de x.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :
$$\begin{aligned}G(x) &= \mathbb{P}\big([Y \leqslant x]\big)\\ &= \mathbb{P}\big([-\ln(1-X) \leqslant x]\big)\\ &= \mathbb{P}\big([\ln(1-X) \geqslant -x]\big) && \text{stricte croissance de exp sur $\mathbb{R}$}\\ &= \mathbb{P}\big([1-X \geqslant e^{-x}]\big)\\ &= \mathbb{P}\big([X \leqslant 1-e^{-x}]\big)\\ &= F(1-e^{-x}) && \text{question précédente}\\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } 1-e^{-x} < 0 \\ 1-\big(1-(1-e^{-x})\big)^a & \text{si } 1-e^{-x} \in [0;1[\\ 1 & \text{si } 1-e^{-x} \geqslant 1 \end{cases}\end{aligned}$$

♥ Astuce du chef ♥
On remplace "bêtement" tous les x par $1-e^{-x}$ dans l'expression de $F(x)$... Puis on examine les différents cas !

Or :
- d'une part :
$$1-e^{-x} < 0 \iff x < 0$$
- puis :
$$1-e^{-x} \in [0;1[\iff x \geqslant 0$$
- et enfin, l'inéquation $1-e^{-x} \geqslant 1$ n'a aucune solution.

Conclusion : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-ax} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

AUTRE MÉTHODE

Procédons un peu différemment, en travaillant cette fois sur l'ensemble image...

- Posons $h : x \longmapsto -\ln(1-x)$ de sorte que $Y = h(X)$. Ainsi :

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= h\big(X(\Omega)\big) \\ &= h\big([0;1[\big) \\ &= \big[h(0); \lim_1 h\big[&& \text{h est continue et croissante sur $[0;1[$} \\ &= [0;+\infty[\end{aligned}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$.
  - Si $x < 0$:

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}\big([Y \leqslant x]\big) \\ &= \mathbb{P}(\varnothing) && x < 0 \text{ et } Y(\Omega) = \mathbb{R}^+, \text{ donc } [Y \leqslant x] = \varnothing \\ &= 0 \end{aligned}$$

  - Si $x \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}\big([Y \leqslant x]\big) \\ &= \mathbb{P}\big([-\ln(1-X) \leqslant x]\big) \\ &= \mathbb{P}\big([1 - X \geqslant \mathrm{e}^{-x}]\big) && \text{stricte croissance de exp sur } \mathbb{R} \\ &= \mathbb{P}\big([X \leqslant 1 - \mathrm{e}^{-x}]\big) \\ &= F(1 - \mathrm{e}^{-x}) \\ &= 1 - \Big(1 - \big(1 - \mathrm{e}^{-x}\big)\Big)^a && x \geqslant 0, \text{ donc } \mathrm{e}^{-x} \leqslant 1, \text{ donc } 1 - \mathrm{e}^{-x} \geqslant 0 \text{ et } 1 - \mathrm{e}^{-x} < 1 \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-ax} \end{aligned}$$

★Subtil...★
La continuité de h sur $[0;1[$ garantit que $h\big([0;1[\big)$ est un intervalle (TVI...) ; la croissance permet d'écrire qu'il s'agit de l'intervalle $\big[h(0); \lim_1 h\big[$.

3.b. En déduire que Y suit la loi exponentielle de paramètre a.

On remarque alors que la fonction de répartition de Y est la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre a.
Et on sait que la fonction de répartition caractérise la loi...

Conclusion : Y suit une loi exponentielle de paramètre a.

4. 4.a. Pour tout $\lambda > 0$, donner la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x} dx$.

Soit $\lambda > 0$. Il s'agit d'une intégrale usuelle convergente, car $\lambda > 0$, et :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x} dx &= \left[\frac{-1}{\lambda} \mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{x \to \infty} \\ &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $\lambda > 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$.

4.b. Démontrer que la variable aléatoire e^{-Y} possède une espérance et donner sa valeur en fonction de a.

- Notons $f_Y : t \longmapsto \begin{cases} a\mathrm{e}^{-at} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ une densité de Y. D'après le théorème de transfert, licite car $t \longmapsto \mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $Y(\Omega)$ ($Y(\Omega) = \mathbb{R}^+$) :

  e^{-Y} admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} f_Y(t) dt$ est absolument convergente

  si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} f_Y(t) dt$ est convergente, car il s'agit d'une intégrale à intégrande positive

  si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} a e^{-at} dt$ est convergente

  si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} a e^{-(a+1)t} dt$ est convergente

- Or, puisque $a + 1 > 0$, cette intégrale est une intégrale usuelle convergente.
- On en déduit que e^{-Y} admet une espérance et :

$$\mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{-Y}\big) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} f_Y(t) dt$$

$$= \int_0^{+\infty} a\mathrm{e}^{-(a+1)t}dt$$

question précédente

$$= \frac{a}{a+1}$$

Conclusion : La variable aléatoire e^{-Y} admet une espérance et $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{-Y}) = \dfrac{a}{a+1}$.

4.c. Exprimer X en fonction de Y puis en déduire que X possède une espérance que l'on exprimera en fonction de a.

De $Y = -\ln(1-X)$, on déduit $X = 1 - \mathrm{e}^{-Y}$.

Or, on vient d'établir que e^{-Y} admet une espérance. La variable aléatoire X est donc une combinaison linéaire de variables aléatoires admettant une espérance ; ainsi, X admet une espérance et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}\left(1-\mathrm{e}^{-Y}\right) && \text{linéarité de l'espérance}\\
&= \mathbb{E}(1) - \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-Y}\right) && \text{question précédente}\\
&= 1 - \frac{a}{a+1}\\
&= \frac{1}{a+1}
\end{aligned}$$

Conclusion : X admet une espérance et $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{a+1}$.

4.d. Montrer que la variable aléatoire e^{-2Y} possède une espérance et que $\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-2Y}\right) = \dfrac{a}{a+2}$.

En déduire la variance de e^{-Y} puis la variance de X.

- ∗ D'après le théorème de transfert, licite car $t \longmapsto \mathrm{e}^{-2t}$ est continue sur $Y(\Omega)$ ($Y(\Omega) = \mathbb{R}^+$) :

  e^{-2Y} admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t} f_Y(t)dt$ est absolument convergente

  si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t} f_Y(t)dt$ est convergente, car il s'agit d'une intégrale à intégrande positive

  si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t} a e^{-at}dt$ est convergente

  si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} a\mathrm{e}^{-(a+2)t}dt$ est convergente

  ∗ Or, puisque $a+2>0$, cette intégrale est une intégrale usuelle convergente.

  ∗ On en déduit que e^{-2Y} admet une espérance et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-2Y}\right) &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} f_Y(t)dt\\
&= \int_0^{+\infty} a\mathrm{e}^{-(a+2)t}dt && \text{question 4.a.}\\
&= \frac{a}{a+2}
\end{aligned}$$

✍ Rédaction

On pourrait aller plus vite ici, en se contentant de dire que l'on procède comme en question précédente. On dirait alors simplement "En procédant comme en question précédente, la variable aléatoire e^{-2Y} admet une espérance et $\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-2Y}\right) = \ldots = \dfrac{a}{a+2}$.

- Puisque $\mathrm{e}^{-2Y} = (\mathrm{e}^{-Y})^2$, on déduit de ce qui précède que e^{-Y} admet un moment d'ordre 2 et donc admet une variance. Ainsi, d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\left(\mathrm{e}^{-Y}\right) &= \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-2Y}\right) - \left(\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-Y}\right)\right)^2\\
&= \frac{a}{a+2} - \frac{a^2}{(a+1)^2}\\
&= \frac{a}{(a+2)(a+1)^2}
\end{aligned}$$

- Puisque $X = 1-\mathrm{e}^{-Y}$, la variable aléatoire X est une combinaison linéaire de variables aléatoires admettant une variance ; ainsi, X admet une espérance et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{V}\left(1-\mathrm{e}^{-Y}\right)\\
&= (-1)^2\mathbb{V}\left(\mathrm{e}^{-Y}\right)\\
&= \frac{a}{(a+2)(a+1)^2}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{V}(X) = \dfrac{a}{(a+2)(a+1)^2}$.

5. Écrire une fonction **Python** prenant en argument un réel strictement positif a et permettant de simuler une réalisation de la variable aléatoire X.
De la relation $Y = -\ln(1 - X)$, on obtient $X = 1 - e^{-Y}$. Or Y suit la loi exponentielle de paramètre a... D'où le programme suivant :

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simule_X(a):
    Y=rd.exponential(1/a)
    X=1-np.exp(-Y)
    return X
```