

## ÉNONCÉ

On admet que si  $Z_1$  et  $Z_2$  sont deux variables aléatoires à densité, définies sur le même espace probabilisé, alors leur covariance, si elle existe, est définie par :

$$\text{Cov}(Z_1, Z_2) = \mathbb{E}(Z_1 Z_2) - \mathbb{E}(Z_1)\mathbb{E}(Z_2)$$

On admet également que si  $Z_1$  et  $Z_2$  sont indépendantes, alors leur covariance est nulle.

On considère deux variables aléatoires réelles  $X$  et  $U$  définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  indépendantes,  $X$  suivant la loi normale  $\mathcal{N}(0; 1)$  et  $U$  suivant la loi discrète uniforme sur  $\{-1; 1\}$ .

On pose  $Y = UX$  et on admet que  $Y$  est une variable aléatoire à densité, définie elle aussi sur l'espace  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .

1. 1.a. Démontrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}([Y \leq x]) = \mathbb{P}([U = 1] \cap [X \leq x]) + \mathbb{P}([U = -1] \cap [X \geq -x])$$

1.b. En déduire que  $Y$  suit la même loi que  $X$ .

2. 2.a. Calculer l'espérance de  $U$  puis montrer que  $\mathbb{E}(XY) = 0$ .

2.b. En déduire que  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ .

3. 3.a. Rappeler la valeur de  $\mathbb{E}(X^2)$  et en déduire que  $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$ .

3.b. Établir :

$$\forall A \in \mathbb{R}^+, \int_0^A x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -A^3 e^{-\frac{A^2}{2}} + 3 \int_0^A x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

3.c. En déduire que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$  est convergente et vaut  $\frac{3\sqrt{2\pi}}{2}$ .

3.d. Établir finalement que  $X$  possède un moment d'ordre 4 et que  $\mathbb{E}(X^4) = 3$ .

4. 4.a. Vérifier que  $\mathbb{E}(X^2 Y^2) = 3$ .

4.b. Déterminer  $\text{Cov}(X^2, Y^2)$ .

4.c. En déduire que  $X^2$  et  $Y^2$  ne sont pas indépendantes puis que  $X$  et  $Y$  ne le sont pas non plus.

4.d. Cet exercice a permis de montrer qu'un résultat classique concernant les variables aléatoires discrètes est encore valable pour les variables aléatoires à densité, lequel ?

# CORRIGÉ

On admet que si  $Z_1$  et  $Z_2$  sont deux variables aléatoires à densité, définies sur le même espace probabilisé, alors leur covariance, si elle existe, est définie par :

$$\text{Cov}(Z_1, Z_2) = \mathbb{E}(Z_1 Z_2) - \mathbb{E}(Z_1)\mathbb{E}(Z_2)$$

On admet également que si  $Z_1$  et  $Z_2$  sont indépendantes, alors leur covariance est nulle.

On considère deux variables aléatoires réelles  $X$  et  $U$  définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  indépendantes,  $X$  suivant la loi normale  $\mathcal{N}(0; 1)$  et  $U$  suivant la loi discrète uniforme sur  $\{-1; 1\}$ .

On pose  $Y = UX$  et on admet que  $Y$  est une variable aléatoire à densité, définie elle aussi sur l'espace  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .

1. 1.a. Démontrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}([Y \leq x]) = \mathbb{P}([U = 1] \cap [X \leq x]) + \mathbb{P}([U = -1] \cap [X \geq -x])$$

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

D'après la formule des probabilités totales, avec  $([U = -1], [U = 1])$  comme système complet d'événements :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([Y \leq x]) &= \mathbb{P}([U = 1] \cap [Y \leq x]) + \mathbb{P}([U = -1] \cap [Y \leq x]) \\ &= \mathbb{P}([U = 1] \cap [UX \leq x]) + \mathbb{P}([U = -1] \cap [UX \leq x]) \\ &= \mathbb{P}([U = 1] \cap [X \leq x]) + \mathbb{P}([U = -1] \cap [-X \leq x]) \\ &= \mathbb{P}([U = 1] \cap [X \leq x]) + \mathbb{P}([U = -1] \cap [X \geq -x])\end{aligned}$$

Conclusion :  $\forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}([Y \leq x]) = \mathbb{P}([U = 1] \cap [X \leq x]) + \mathbb{P}([U = -1] \cap [X \geq -x])$ .

1.b. En déduire que  $Y$  suit la même loi que  $X$ .

Notons  $F_X$  et  $F_Y$  les fonctions de répartition respectives de  $X$  et  $Y$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On a :

$$\begin{aligned}F_Y(x) &= \mathbb{P}([Y \leq x]) \\ &= \mathbb{P}([U = 1] \cap [X \leq x]) + \mathbb{P}([U = -1] \cap [X \geq -x]) \quad \leftarrow \text{question précédente} \\ &= \mathbb{P}([U = 1])\mathbb{P}([X \leq x]) + \mathbb{P}([U = -1])\mathbb{P}([X \geq -x]) \quad \leftarrow U \text{ et } X \text{ sont indépendantes} \\ &= \frac{1}{2}F_X(x) + \frac{1}{2}(1 - \mathbb{P}([X < -x])) \quad \leftarrow U \text{ suit la loi uniforme sur } \{-1; 1\} \\ &= \frac{1}{2}F_X(x) + \frac{1}{2}(1 - F_X(-x)) \quad \leftarrow X \text{ est à densité} \\ &= F_X(x) \quad \leftarrow \text{puisque } X \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 1), \text{ on a } F_X(-x) = 1 - F_X(x)\end{aligned}$$

## À retenir...

Cette propriété sur la fonction de répartition d'une VA suivant la loi  $\mathcal{N}(0; 1)$  est encore valable pour toute VA admettant une densité paire sur  $\mathbb{R}$ .

Par conséquent, les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  ont la même fonction de répartition.

Conclusion : puisque la fonction de répartition caractérise la loi, on en déduit que  $Y$  a même loi que  $X$ .

## Pour info...

Et ce résultat sera valable du moment que  $X$  est une variable aléatoire symétrique (densité paire) :  $X$  et  $UX$  auront la même loi (où  $U$  suit une loi uniforme sur  $\{-1; 1\}$ ).

2. 2.a. Calculer l'espérance de  $U$  puis montrer que  $\mathbb{E}(XY) = 0$ .

- On sait que  $U(\Omega) = \{-1; 1\}$ , ainsi  $U(\Omega)$  est fini. Donc  $U$  admet une espérance et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(U) &= -1\mathbb{P}([U = -1]) + 1\mathbb{P}([U = 1]) \\ &= \frac{-1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= 0\end{aligned}$$

- On a :

$$\begin{aligned}XY &= XUX \\ &= X^2U\end{aligned}$$

Or :

- ✓  $X^2$  admet une espérance (car  $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 1)$ , donc  $X$  admet un moment d'ordre 2);
- ✓  $U$  admet une espérance;
- ✓  $X$  et  $U$  sont indépendantes, donc par lemme des coalitions,  $X^2$  et  $U$  sont également indépendantes.

Par conséquent,  $X^2U$  admet une espérance et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2U) &= \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(U) \\ &= 0\end{aligned} \quad \leftarrow \text{point précédent}$$

Conclusion :  $XY$  admet une espérance et  $\mathbb{E}(XY) = 0$ .

## Rappel...

Ces trois hypothèses impliquent deux choses :

- l'existence de l'espérance de  $X^2U$
  - l'égalité  $\mathbb{E}(X^2U) = \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(U)$ .
- Attention** : de façon générale, l'existence de  $\mathbb{E}(Z_1)$  et  $\mathbb{E}(Z_2)$  n'implique pas l'existence de  $\mathbb{E}(Z_1 Z_2)$  (chercher un exemple avec  $Z_1 = Z_2 \dots$ ). Il est donc important de mentionner l'indépendance afin de justifier l'existence.

2.b. En déduire que  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ .

D'après ce qui précède :

- ✓  $\mathbb{E}(X)$  et  $\mathbb{E}(Y)$  existent (car  $Y$  a même loi que  $X$ ),
- ✓  $\mathbb{E}(XY)$  existe.

Par conséquent,  $\text{Cov}(X, Y)$  existe et :

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\ &= 0\end{aligned}$$

↪ question précédente et  $\mathbb{E}(X) = 0$  car  $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 1)$

**Conclusion :**  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ .

3. 3.a. Rappeler la valeur de  $\mathbb{E}(X^2)$  et en déduire que  $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$ .

- On sait que  $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 1)$ , donc  $X$  admet une variance et, d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

Or  $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 1)$ , donc  $\mathbb{E}(X) = 0$  et  $\mathbb{V}(X) = 1$ .

**Conclusion :**  $\mathbb{E}(X^2) = 1$ .

- Par théorème de transfert, licite car  $x \mapsto x^2$  est continue sur  $X(\Omega)$ , l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$  est convergente et :

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

D'où, d'après le point précédent :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

Or la fonction  $x \mapsto x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}$  est paire, donc :

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

**Conclusion :**  $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$ .

☞ **Rappel...**

La fonction  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$  est une densité de  $X$ .

★ **Classique !** ★

Il est assez fréquent d'obtenir des valeurs d'intégrales en reconnaissant des moments de lois usuelles à densité...

#### D'AUTRES CAS CLASSIQUES.

Voyons deux autres cas classiques qui fournissent, grâce aux connaissances sur les lois exponentielles, des valeurs d'intégrales...

1#  $\int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx$ , avec  $\lambda > 0$ ?

Notons  $X$  une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$ .  
Dans ce cas :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx &= \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{1}{\lambda} \mathbb{E}(X) \\ &= \frac{1}{\lambda^2}\end{aligned}$$

**Remarque**

On pourrait procéder par IPP, mais c'est plus long...

☞ **Rappel...**

La fonction  $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$  est une densité de  $X$ .

2#  $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx$ , avec  $\lambda > 0$ ?

Notons  $X$  une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$ .  
Dans ce cas :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx &= \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx && \text{théorème de transfert, licite car } x \mapsto x^2 \text{ est continue sur } \mathbb{R} \\ &= \frac{1}{\lambda} \mathbb{E}(X^2) \\ &= \frac{1}{\lambda} (\mathbb{V}(X) + (\mathbb{E}(X))^2) && \text{formule de Koenig-Huygens} \\ &= \frac{1}{\lambda} \frac{2}{\lambda^2} \\ &= \frac{2}{\lambda^3}\end{aligned}$$

**Remarque**

On pourrait procéder par IPP, mais c'est plus long...

### 3.b. Établir :

$$\forall A \in \mathbb{R}^+, \int_0^A x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -A^3 e^{-\frac{A^2}{2}} + 3 \int_0^A x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Soit  $A \in \mathbb{R}^+$ . On a :

$$\int_0^A x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_0^A x^3 \times x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Posons :  $\begin{cases} u : x \mapsto x^3 \\ v : x \mapsto -e^{-\frac{x^2}{2}} \end{cases}$

Les fonctions  $u$  et  $v$  sont  $\mathcal{C}^1$  sur le segment  $[0; A]$  et pour tout  $x \in [0; A]$  :  $\begin{cases} u'(x) = 3x^2 \\ v'(x) = x e^{-\frac{x^2}{2}} \end{cases}$

Par intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^A x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx &= \left[ -x^3 e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_0^A - \int_0^A -3x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= -A^3 e^{-\frac{A^2}{2}} + 3 \int_0^A x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \end{aligned}$$

**Conclusion :**  $\forall A \in \mathbb{R}^+, \int_0^A x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -A^3 e^{-\frac{A^2}{2}} + 3 \int_0^A x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$

#### Pourquoi ?

On ne sait pas primitiver  $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ . Et si on pose  $u(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$  et  $v'(x) = x^4$ , c'est pire...

### 3.c. En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ est convergente et vaut $\frac{3\sqrt{2\pi}}{2}$ .

- Pour tout  $A \in \mathbb{R}^+$ , on a :

$$A^3 e^{-\frac{A^2}{2}} = (A^2)^{\frac{3}{2}} (e^{-A^2})^{\frac{1}{2}}$$

Or :

$$\checkmark \lim_{A \rightarrow +\infty} A^2 = +\infty,$$

$$\checkmark \lim_{y \rightarrow +\infty} y^{\frac{3}{2}} (e^{-y})^{\frac{1}{2}} = 0 \text{ par croissances comparées.}$$

Donc par composition :

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} A^3 e^{-\frac{A^2}{2}} = 0$$

- D'après la question 3.a., l'intégrale  $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$  est convergente et vaut  $\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$ . D'où :

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$$

On en déduit, d'après la question précédente et les deux points précédents :

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{3\sqrt{2\pi}}{2}$$

**Conclusion :** l'intégrale  $\int_0^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$  est convergente et vaut  $\frac{3\sqrt{2\pi}}{2}$ .

#### Attention !

Les croissances comparées sont des FI de la forme  $x^a (e^{-x})^b$  en  $+\infty$ , avec  $a, b > 0$ ...  
Il se peut que les points soient attribués sans cet effort de détail pour faire apparaître les CC, ou pas !

### 3.d. Établir finalement que $X$ possède un moment d'ordre 4 et que $\mathbb{E}(X^4) = 3$ .

- Par théorème de transfert, licite car la fonction  $x \mapsto x^4$  est continue sur  $\mathbb{R}$  :

$X^4$  admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x^4 f(x)| dx$  est convergente

si, et seulement si, l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 f(x) dx$  est convergente,

car  $\forall x \in \mathbb{R}, x^4 f(x) \geq 0$

si, et seulement si, les intégrales  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$  et  $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$  sont convergentes

si, et seulement si, les intégrales  $\int_0^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$  et  $\int_{-\infty}^0 x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$  sont convergentes

- Or, d'après la question précédente, l'intégrale  $\int_0^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$  est convergente. Ainsi, par parité de  $x \mapsto x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}$ , l'intégrale  $\int_{-\infty}^0 x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$  est également convergente.

- On en déduit que  $X^4$  admet une espérance et :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(X^4) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx && \swarrow \text{parité de } x \mapsto x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx && \swarrow \text{question précédente} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{3\sqrt{2\pi}}{2} \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

**Conclusion :**  $X$  possède un moment d'ordre 4 et que  $\mathbb{E}(X^4) = 3$ .

**4. 4.a.** Vérifier que  $\mathbb{E}(X^2 Y^2) = 3$ .

On a :

$$\begin{aligned}
 X^2 Y^2 &= X^2 (UX)^2 \\
 &= U^2 X^4 \\
 &= X^4 && \swarrow U(\Omega) = \{-1; 1\}, \text{ donc } U^2 \text{ est constante égale à } 1
 \end{aligned}$$

**Remarque**

On pourrait également manipuler  $(X^2 Y^2)(\omega)$  pour tout  $\omega \in \Omega$ , mais ce n'est pas nécessaire.

**Conclusion :** d'après la question précédente, on en déduit que  $X^2 Y^2$  admet une espérance et  $\mathbb{E}(X^2 Y^2) = 3$ .

**4.b.** Déterminer  $\text{Cov}(X^2, Y^2)$ .

D'après ce qui précède :

- ✓  $\mathbb{E}(X^2)$  et  $\mathbb{E}(Y^2)$  existent et valent 1 (question 3.a. et car  $Y$  a même loi que  $X$ );
- ✓  $\mathbb{E}(X^2 Y^2)$  existe.

Par conséquent,  $\text{Cov}(X^2, Y^2)$  existe et :

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(X^2, Y^2) &= \mathbb{E}(X^2 Y^2) - \mathbb{E}(X^2) \mathbb{E}(Y^2) \\
 &= 3 - 1 \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

**Conclusion :**  $\text{Cov}(X^2, Y^2) = 2$ .

**4.c.** En déduire que  $X^2$  et  $Y^2$  ne sont pas indépendantes puis que  $X$  et  $Y$  ne le sont pas non plus.

- On sait que si deux variables aléatoires sont indépendantes, alors leur covariance est nulle. Or  $\text{Cov}(X^2, Y^2) \neq 0$ . Ainsi, par contraposée, les variables aléatoires  $X^2$  et  $Y^2$  ne sont pas indépendantes.
- Si  $X$  et  $Y$  étaient indépendantes, d'après le lemme des coalitions, les variables aléatoires  $X^2$  et  $Y^2$  le seraient également; ce qui n'est pas le cas.

**Remarque**

Raisonnement intéressant dans cette question.

**Conclusion :**  $X$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes.

**4.d.** Cet exercice a permis de montrer qu'un résultat classique concernant les variables aléatoires discrètes est encore valable pour les variables aléatoires à densité, lequel ?

Dans le cas des variables aléatoires discrètes, on sait que la réciproque de "si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ " est fautive.

C'est encore le cas ici. En effet :

- ✓  $\text{Cov}(X, Y) = 0$  (question 2.b.)
- ✓ et pourtant les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes (question précédente).