EDHEC 2013 voie E
Exercice 2

Énoncé

1. On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
   - 1.a. Vérifier que $A^2 \neq 0$ et calculer A^3.
   - 1.b. Déterminer une base (a) de $\ker(f)$ ainsi qu'une base (b, c) de $\mathrm{Im}(f)$.
   - 1.c. Montrer que $\mathrm{Im}(f^2) = \ker(f)$.
2. On considère maintenant un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $g^2 \neq 0$ et $g^3 = 0$. On note M la matrice canoniquement associée à g. L'objectif de la question est d'établir que $\mathrm{Im}(g^2) = \ker(g)$.
   - 2.a. 2.a.i. Montrer que 0 est la seule valeur propre possible de M.
     - 2.a.ii. Montrer, en raisonnant par l'absurde, que 0 est effectivement la seule valeur propre de M.
     - 2.a.iii. En déduire que la matrice M n'est pas diagonalisable.
   - 2.b. 2.b.i. Justifier l'existence d'un vecteur $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $g^2(u) \neq 0$.
     - 2.b.ii. Montrer que la famille $\big(u, g(u), g^2(u)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, que l'on notera $\mathscr{B}'$.
     - 2.b.iii. Donner la matrice de g dans la base $\mathscr{B}'$, notée N.
     - 2.b.iv. Déterminer alors une base de $\ker(g)$ ainsi qu'une base de $\mathrm{Im}(g^2)$. Conclure.

Corrigé

1. On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1.a. Vérifier que $A^2 \neq 0$ et calculer A^3.

> **Conclusion :** $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $A^3 = 0_3$.

1.b. Déterminer une base (a) de $\ker(f)$ ainsi qu'une base (b, c) de $\operatorname{Im}(f)$.

♣ Méthode ! Il est également possible de déterminer le rang de f (avec le rang de A) puis d'en déduire, par le théorème du rang, ma dimension de $\ker(f)$ et de remarquer que le vecteur $(1, 0, -1)$ est dans $\ker(f)$ (car $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \ker(A)$...). On trouvera de tels exemples dans les DS3 et DS5 de l'année 2024-2025.

- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
X \in \ker(A) &\iff \begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ -x - y - z = 0 \\ -x - z = 0 \end{cases} \\
&\underset{\substack{L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1}}{\iff} \begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \\ z = z \end{cases} \\
&\iff X = z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\ker(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Par conséquent $\ker(f) = \operatorname{Vect}\big((-1, 0, 1)\big)$ et ainsi, la famille $\big((-1, 0, 1)\big)$ est une famille :

✓ génératrice de $\ker(f)$ d'après ce qui précède,

✓ libre car constituée d'une unique vecteur non nul.

> **Conclusion :** on pose $a = (-1, 0, 1)$; la famille (a) est une base de $\ker(f)$.

- Et :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}(A) &= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) && C_3 = C_1 \\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

Par conséquent $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}\big((2, -1, -1), (1, -1, 0)\big)$ et ainsi, la famille $\big((2, -1, -1), (1, -1, 0)\big)$ est une famille :

✓ génératrice de $\operatorname{Im}(f)$ d'après ce qui précède,

✓ libre car seulement constituée de deux vecteurs non colinéaires.

> **Conclusion :** on pose $b = (2, -1, -1)$ et $c = (1, -1, 0)$; la famille (b, c) est une base de $\operatorname{Im}(f)$.

1.c. Montrer que $\operatorname{Im}(f^2) = \ker(f)$.

D'après le calcul de A^2, on a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}(A) &= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) && C_2 = C_1 \text{ et } C_3 = C_1 \\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

$$= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$ question précédente

$$= \ker(A)$$

Conclusion : $\text{Im}(f^2) = \ker(f)$.

2. On considère maintenant un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $g^2 \neq 0$ et $g^3 = 0$. On note M la matrice canoniquement associée à g. L'objectif de la question est d'établir que $\text{Im}(g^2) = \ker(g)$.

2.a. 2.a.i. Montrer que 0 est la seule valeur propre possible de M.

Puisque $g^3 = 0$, on a $M^3 = 0_3$.

Par conséquent, le polynôme X^3 est annulateur de M. Or X^3 possède une unique racine : 0.

Conclusion : $\text{Sp}(M) \subset \{0\}$, autrement dit, 0 est la seule valeur propre possible de M.

☞ Rappel...

$\lambda \in \text{Sp}(A)$
$\iff \ker(A - \lambda I_n) \neq \{0_{n,1}\}$
$\iff \text{rg}(A - \lambda I_n) \neq n$
$\iff (A - \lambda I_n$ n'est pas inversible)

2.a.ii. Montrer, en raisonnant par l'absurde, que 0 est effectivement la seule valeur propre de M.

Supposons que 0 n'est pas valeur propre de M. Dans ce cas, la matrice M est inversible.

En multipliant l'égalité $M^3 = 0_3$ par M^{-1}, on obtient :

$$M^2 = 0_3$$

Ce qui est absurde car $g^2 \neq 0$, donc $M^2 \neq 0_3$.

Conclusion : 0 est valeur propre de M est c'est la seule.

☞ Pour info...

Même sans supposer $g^2 \neq 0$, on arriverait à une absurdité en multipliant encore deux fois l'égalité $M^2 = 0_3$ par M^{-1}...

2.a.iii. En déduire que la matrice M n'est pas diagonalisable.

Raisonnons par l'absurde et supposons que M est diagonalisable.

Il existe alors deux matrices P et D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

- ✓ P est inversible,
- ✓ D est diagonale, avec des coefficients diagonaux égaux aux valeurs propres de M, donc $D = 0_3$,
- ✓ $M = PDP^{-1}$.

Mais alors :

$$\begin{aligned} M &= P0_3P^{-1} \\ &= 0_3 \end{aligned}$$

D'où l'absurdité.

Conclusion : la matrice M n'est pas diagonalisable.

☞ Rappel...

La négation de

$$\forall x \in \mathbb{R}^3,\ g^2(x) = 0$$

est

$$\exists x \in \mathbb{R}^3\ /\ g^2(x) \neq 0$$

2.b. 2.b.i. Justifier l'existence d'un vecteur $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $g^2(u) \neq 0$.

Conclusion : immédiat, puisque g^2 n'est pas l'application linéaire nulle.

2.b.ii. Montrer que la famille $\big(u, g(u), g^2(u)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, que l'on notera $\mathscr{B}'$.

Montrons que la famille $\big(u, g(u), g^2(u)\big)$ est libre.

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Supposons $au + bg(u) + cg^2(u) = 0$. Notons $(\star)$ cette égalité.

☞ Rappel...

Puisque g est linéaire, on a $g(0) = 0$.

- En appliquant g^2 à $(\star)$, par linéarité de g^2, on obtient :

$$ag^2(u) + bg^3(u) + cg^4(u) = 0$$

Or $g^3 = 0$, donc $g^3(u) = g^4(u) = 0$. Il reste donc :

$$ag^2(u) = 0$$

Or $g^2(u) \neq 0$, d'où :

$$a = 0$$

- $(\star)$ devient alors

$$bg(u) + cg^2(u) = 0$$

Et, en appliquant g, on obtient :

$$bg^2(u) + cg^3(u) = 0$$

D'où, puisque $g^3 = 0$:

$$bg^2(u) = 0$$

Et comme $g^2(u) \neq 0$, il reste :

$$b = 0$$

- $(\star)$ devient alors
$$cg^2(u) = 0$$
Mais $g^2(u) \neq 0$, d'où enfin :
$$c = 0$$

On a donc établi : $a = b = c = 0$.
Par conséquent, la famille $\big(u, g(u), g^2(u)\big)$ est une famille de $\mathbb{R}^3$ qui est :

✓ libre d'après ce qui précède,
✓ de cardinal 3, égal à $\dim(\mathbb{R}^3)$.

Conclusion : la famille $\big(u, g(u), g^2(u)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2.b.iii. Donner la matrice de g dans la base $\mathscr{B}'$, notée N.

Conclusion : $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Pourquoi ?
Il suffit de se souvenir de la façon dont on remplit les matrices...

☞ Pour info...
Si on considère la matrice de g dans la base $\big(g^2(u), g(u), u\big)$, on retrouve une forme usuelle des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ nilpotentes d'indice de nilpotence égal à 3...

2.b.iv. Déterminer alors une base de $\ker(g)$ ainsi qu'une base de $\mathrm{Im}(g^2)$. Conclure.

- On remarque alors que :
$$\ker(N) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$
Par conséquent :
$$\ker(g) = \mathrm{Vect}\big(g^2(u)\big)$$
La famille $\big(g^2(u)\big)$ est donc une famille de $\ker(g)$ qui est :

✓ génératrice d'après ce qui précède,
✓ libre car constituée d'un unique vecteur non nul (définition de u).

Conclusion : la famille $\big(g^2(u)\big)$ est une base de $\ker(g)$.

✘ Attention !
N est la matrice de g dans la base $\mathscr{B}'$, pas dans la base canonique. Et c'est $g^2(u)$ dont la matrice des coordonnées dans la base $\mathscr{B}'$ est $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- On a aussi :
$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
D'où
$$\mathrm{Im}(N) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$
Et ainsi :
$$\mathrm{Im}(g^2) = \mathrm{Vect}\big(g^2(u)\big)$$

Conclusion : de même que précédemment, la famille $\big(g^2(u)\big)$ est une base de $\mathrm{Im}(g^2)$.

- On en déduit :
$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(g^2) &= \mathrm{Vect}\big(g^2(u)\big) \\ &= \ker(g)\end{aligned}$$