Énoncé

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = x^n e^{-\frac{x^2}{2}}$$

1. Justifier que $f_n(x)$ est négligeable devant $\dfrac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$.

2. En déduire la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$.

3. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$.

   3.a. Établir :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} = (n+1)I_n$$

   3.b. En utilisant la loi normale centrée réduite, justifier que $I_0 = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

   3.c. Déterminer I_1.

   3.d. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$I_{2n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(2n)!}{2^n n!} \quad ; \quad I_{2n+1} = 2^n n!$$

4. Considérons la fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

   4.a. Démontrer que f est une densité de probabilité.

   4.b. Soit X une variable aléatoire à densité de densité f.

   4.b.i. Justifier que X admet une espérance et la calculer.

   4.b.ii. Justifier que X admet une variance et la calculer.

   4.c. On désigne par F et G les fonctions de répartition respectives des variables aléatoires X et $Y = X^2$.

   Remarque
   J'ai légèrement changé cette fin d'exercice.

   4.c.i. Établir :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ F(\sqrt{x}) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

   4.c.ii. Démontrer que Y est une variable aléatoire à densité puis en donner une densité. Reconnaître alors la loi de Y.

   4.c.iii. Retrouver le moment d'ordre 2 de la variable aléatoire X et déterminer son moment d'ordre 4.

   4.c.iv. Écrire une fonction **Python** permettant de simuler une réalisation de la variable aléatoire X.

Corrigé

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = x^n e^{-\frac{x^2}{2}}$$

1. Justifier que $f_n(x)$ est négligeable devant $\dfrac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, suffisamment proche de $+\infty$. On a :

$$\begin{aligned}\frac{f_n(x)}{\frac{1}{x^2}} &= x^{n+2}e^{-\frac{x^2}{2}}\\ &= \frac{(x^2)^{\frac{n+2}{2}}}{e^{\frac{x^2}{2}}}\\ &= 2^{\frac{n+2}{2}}\frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{n+2}{2}}}{e^{\frac{x^2}{2}}}\end{aligned}$$

Or :

- ✓ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{2} = +\infty$
- ✓ par croissances comparées, $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X^{\frac{n+2}{2}}}{e^X} = 0$.

D'où, par composition et produit :

$$\lim_{x\to+\infty} 2^{\frac{n+2}{2}}\frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{n+2}{2}}}{e^{\frac{x^2}{2}}} = 0$$

Par conséquent :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_n(x)}{\frac{1}{x^2}} = 0$$

Conclusion : $f_n(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

2. En déduire la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$.

Remarquons déjà que la fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$ est impropre en $+\infty$ seulement. Ensuite :

- ✓ d'après la question précédente, $f_n(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$;
- ✓ $\forall x \in [1; +\infty[,\ f_n(x) \geqslant 0\ ;\ \dfrac{1}{x^2} \geqslant 0$
- ✓ l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ est une intégrale de Riemann convergente.

Ainsi, par critère de comparaison sur les intégrales à intégrandes positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_n(x)dx$ est convergente.

Et, c'est aussi le cas de $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$, car elle n'est pas impropre.

Conclusion : l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$ est convergente.

3. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$.

3.a. Établir :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} = (n+1)I_n$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}I_{n+2} &= \int_0^{+\infty} x^{n+2}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\\ &= \int_0^{+\infty} x^{n+1}xe^{-\frac{x^2}{2}}dx\end{aligned}$$

☞ Rappels...

Croissances comparées :

Pour tous $a, b, c > 0$:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(e^x)^a}{x^b} = +\infty$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^b}{(e^x)^a} = 0$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(e^x)^a}{\ln(x)^c} = +\infty$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)^c}{(e^x)^a} = 0$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^b}{\ln(x)^c} = +\infty$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)^c}{x^b} = 0$

- $\lim\limits_{x\to0} x^b \ln(x)^c = 0$

Pour utiliser une de ces croissances comparées, il faudra toujours mettre les expressions sous une des 7 formes données (on tolère $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ sans détail).

✍ Rédaction

En début d'exercice, je ne peux que conseiller de bien détailler les calculs de limites, en particulier lorsqu'elles utilisent des croissances comparées avec des compositions. Un tel niveau de détail n'était toutefois peut-être pas attendu ici...

Soit ensuite $A \in \mathbb{R}^+$. Posons : $\left| \begin{array}{l} u : x \longmapsto x^{n+1} \\ v : x \longmapsto -\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \end{array} \right.$. Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[0; A]$ et pour tout $x \in [0; A]$: $\left| \begin{array}{l} u'(x) = (n+1)x^n \\ v'(x) = x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \end{array} \right.$.

Par intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^A x^{n+1} x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,dx &= \left[-x^{n+1}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \right]_0^A - \int_0^A -(n+1)x^n\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \\ &= -A^{n+1}\mathrm{e}^{-\frac{A^2}{2}} + (n+1)\int_0^A x^n\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \end{aligned}$$

$n+1 > 0$, donc $0^{n+1} = 0$

Or :

✓ par croissances comparées, $\lim\limits_{A\to+\infty} -A^{n+1}\mathrm{e}^{-\frac{A^2}{2}} = 0$

✓ puisque l'intégrale I_n est convergente, $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_0^A x^n\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = I_n$.

D'où le résultat en faisant tendre A vers $+\infty$.

Rédaction
On peut aller plus vite ici !

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} = (n+1)I_n$.

3.b. En utilisant la loi normale centrée réduite, justifier que $I_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

$x \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ est paire

en reconnaissant l'intégrale de la densité d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0;1)$

★ Classique ! ★
Il est assez fréquent d'utiliser des résultats sur les lois à densité usuelles pour obtenir des valeurs d'intégrales.
D'autres à travailler :

$$\int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

$$\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,dx$$

$$\int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-\lambda x}\,dx$$

Ou bien $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,dx$ en prenant une "bonne valeur de σ" pour une VA $X \hookrightarrow$; σ...

Conclusion : $I_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

3.c. Déterminer I_1.

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \\ &= \left[-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \right]_0^{x\to+\infty} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \left(-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \right) + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Rédaction
On tolère cette rédaction puisque la convergence de l'intégrale I_1 est déjà assurée.

Conclusion : $I_1 = 1$.

3.d. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_{2n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(2n)!}{2^n n!} \quad ; \quad I_{2n+1} = 2^n n!$$

- **Initialisation.** Pour $n = 0$: On a :

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{0!}{2^0 0!} &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ &= I_0 \end{aligned}$$

question 3.b.

et :

$$\begin{aligned} 2^0 0! &= 1 \\ &= I_1 \end{aligned}$$

question 3.c.

L'initialisation est vérifiée.

- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $I_{2n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^n n!}$ et $I_{2n+1} = 2^n n!$.

  Montrons : $I_{2n+2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n+2)!}{2^{n+1}(n+1)!}$; $I_{2n+3} = 2^{n+1}(n+1)!$.

  ∗ D'après la question 3.a. :

$$\begin{aligned} I_{2n+2} &= (2n+1) I_{2n} \\ &= (2n+1)\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^n n!} \qquad \text{hypothèse de récurrence} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n+1)!}{2^n n!} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n+1)!(2n+2)}{2^n n! \times (2n+2)} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n+2)!}{2^n n! \times 2(n+1)} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n+2)!}{2^{n+1}(n+1)!} \end{aligned}$$

  ∗ À nouveau d'après la question 3.a. :

$$\begin{aligned} I_{2n+3} &= (2n+2) I_{2n+1} \\ &= (2n+2) 2^n n! \qquad \text{hypothèse de récurrence} \\ &= 2(n+1) 2^n n! \\ &= 2^{n+1}(n+1)! \end{aligned}$$

  L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{2n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^n n!} \quad ; \quad I_{2n+1} = 2^n n!$$

4. Considérons la fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

4.a. Démontrer que f est une densité de probabilité.

✓ **Positivité ?**
On a immédiatement : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0$.

✓ **Continuité ?**
Puisque f_1 est continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en 0.

Remarque
f est continue en 0, mais cela n'est pas demandé (et pas nécessaire). Il est donc préférable de ne pas le mentionner, cela passerait pour une méconnaissance du cours.

✓ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ **?**

∗ $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx$ converge et vaut 0.

∗ D'après la question 3.c. :

$$I_1 = 1$$

Autrement dit :

$$\int_0^{+\infty} f_1(x)\,dx = 1$$

C'est-à-dire :

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

Par conséquent, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et, par relation de Chasles, vaut 1.

Conclusion : la fonction f est une densité de probabilité.

4.b. Soit X une variable aléatoire à densité de densité f.

4.b.i. Justifier que X admet une espérance et la calculer.

•

X admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x f(x)|\,dx$ est convergente

si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x f(x)\,dx$ est convergente,
car $\forall x < 0,\ x f(x) = 0$ et $\forall x \geqslant 0,\ x f(x) \geqslant 0$

si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ est convergente

- Or, d'après la question **1.**, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ est convergente.
- On en déduit que X admet une espérance et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx \\ &= \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \\ &= I_2 \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{2!}{2 \times 1!} && \text{question 3.d.} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{E}(X) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

4.b.ii. Justifier que X admet une variance et la calculer.

- Ainsi, par théorème de transfert, licite car la fonction $x \longmapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$:

  X admet un moment d'ordre 2 si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x^2 f(x)|dx$ est convergente
  si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 f(x)dx$ est convergente,
  car $\forall x < 0,\ x f(x) = 0$ et $\forall x \geqslant 0,\ x^2 f(x) \geqslant 0$
  si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^3 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ est convergente.
- Or, d'après la question **1.**, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^3 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ est convergente.
- On en déduit que X admet un moment d'ordre 2 et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx \\ &= \int_0^{+\infty} x^3 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \\ &= I_3 \\ &= 2^1 \times 1! && \text{question 3.d.} \\ &= 2\end{aligned}$$

- Ainsi X admet une variance et, d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 \\ &= 2 - \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{4-\pi}{2}\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{V}(X) = \dfrac{4-\pi}{2}$.

Important !
On rédige parfaitement ces deux questions, comme d'habitude, pour prendre tous les points !

4.c. On désigne par F et G les fonctions de répartition respectives des variables aléatoires X et $Y = X^2$.

Remarque
J'ai légèrement changé cette fin d'exercice.

4.c.i. Établir :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ F(\sqrt{x}) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

On a déjà $Y(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x < 0$:

$$\begin{aligned}G(x) &= \mathbb{P}\big([Y \leqslant x]\big) \\ &= \mathbb{P}(\varnothing) && x < 0 \text{ et } Y(\Omega) \subset \mathbb{R}^+, \text{ donc } [Y \leqslant x] = \varnothing \\ &= 0\end{aligned}$$

- Si $x \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}G(x) &= \mathbb{P}\big([Y \leqslant x]\big) \\ &= \mathbb{P}\big([X^2 \leqslant x]\big) \\ & && x \geqslant 0\end{aligned}$$

$$= \mathbb{P}\left([-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x}]\right)$$
$$= F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x})$$
X est à densité

Or :

$$F(-\sqrt{x}) = \mathbb{P}\left([X \leqslant -\sqrt{x}]\right)$$
X est à densité, de densité f
$$= \int_{-\infty}^{-\sqrt{x}} f(t)dt$$
$-\sqrt{x} \leqslant 0$, donc f est nulle sur $]-\infty; -\sqrt{x}[$
$$= 0$$

Ainsi :

$$G(x) = F(-\sqrt{x})$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ F(\sqrt{x}) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$.

4.c.ii. Démontrer que Y est une variable aléatoire à densité puis en donner une densité. Reconnaître alors la loi de Y.

- **Continuité ?**
  - Sur $]-\infty; 0[$:
    G est continue sur $]-\infty; 0[$ car constante sur cet intervalle ;
  - Sur $]0; +\infty[$:
    - × $\sqrt{\cdot}$ est continue sur $]0; +\infty[$ et à valeurs dans $]0; +\infty[$
    - × F est continue sur $]0; +\infty[$, car X est à densité.

    Donc G est continue sur $]0; +\infty[$.
  - En 0 :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} G(x) = 0 \quad ; \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} G(x) = G(0) = F(0) = 0$$

    Donc G est continue en 0.

  Par conséquent, G est continue sur $\mathbb{R}$.
- **Caractère $\mathscr{C}^1$?**
  Par des arguments similaires, la fonction G est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.

♣ Méthode !
Je choisis de procéder ainsi mais il est également possible de remarquer que l'on peut calculer explicite $F(x)$ en fonction de x :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

et il est alors plus rapide et élémentaire de calculer explicitement $G(x)$ pour répondre à la question...

Conclusion : la variable aléatoire Y est à densité et admet pour densité la fonction g définie par :

- pour tout $x < 0$

$$g(x) = G'(x) = 0$$

- pour tout $x > 0$

$$\begin{aligned} g(x) &= G'(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} F'(\sqrt{x}) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} f(\sqrt{x}) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \sqrt{x} e^{-\frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

- et on pose $g(0) = 0$.

Ainsi, Y admet pour densité la fonction $g : x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$.

On reconnaît une densité d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$.

Remarque
L'énoncé aurait pu procéder autrement en demandant de calculer $F(x)$ en question précédente. On aurait alors plus naturellement pensé à calculer $G(x)$ et on aurait alors reconnu la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$.

Conclusion : $Y \hookrightarrow \mathscr{E}\left(\frac{1}{2}\right)$.

4.c.iii. Retrouver le moment d'ordre 2 de la variable aléatoire X et déterminer son moment d'ordre 4.

- On a :

$$\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(Y)$$
$Y \hookrightarrow \mathscr{E}\left(\frac{1}{2}\right)$
$$= 2$$

Conclusion : on retrouve $\mathbb{E}(X^2) = 2$.

- Enfin, puisque $X^4 = Y^2$ et que Y admet une variance, donc un moment d'ordre 2, on en déduit que X admet un moment d'ordre 4. Puis :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^4) &= \mathbb{E}(Y^2) \\
&= \mathbb{V}(Y) + \big(\mathbb{E}(Y)\big)^2 && \text{formule de Koenig-Huygens} \\
&= 4 + 4 && Y \hookrightarrow \mathscr{E}\left(\tfrac{1}{2}\right) \\
&= 8
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{E}(X^4) = 8$.

4.c.iv. Écrire une fonction **Python** permettant de simuler une réalisation de la variable aléatoire X.
On sait que $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$ et $X^2 = Y$, donc :

$$X = \sqrt{Y}$$

D'où le programme :

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simuleX():
    Y=rd.exponential(2)
    X=np.sqrt(Y)
    return X
```