

## ÉNONCÉ

Pour tout entier naturel  $n$ , on considère la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = x^n e^{-\frac{x^2}{2}}$$

1. Justifier que  $f_n(x)$  est négligeable devant  $\frac{1}{x^2}$  au voisinage de  $+\infty$ .

2. En déduire la convergence de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx$ .

3. On pose  $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$ .

3.a. Établir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = (n+1)I_n$$

3.b. En utilisant la loi normale centrée réduite, justifier que  $I_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ .

3.c. Déterminer  $I_1$ .

3.d. Démontrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$I_{2n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^n n!} ; I_{2n+1} = 2^n n!$$

4. Considérons la fonction  $f : x \mapsto \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ .

4.a. Démontrer que  $f$  est une densité de probabilité.

4.b. Soit  $X$  une variable aléatoire à densité de densité  $f$ .

4.b.i. Justifier que  $X$  admet une espérance et la calculer.

4.b.ii. Justifier que  $X$  admet une variance et la calculer.

4.c. On désigne par  $F$  et  $G$  les fonctions de répartition respectives des variables aléatoires  $X$  et  $Y = X^2$ .

4.c.i. Établir :

$$\forall x \in \mathbb{R}, G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ F(\sqrt{x}) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

4.c.ii. Démontrer que  $Y$  est une variable aléatoire à densité puis en donner une densité. Reconnaître alors la loi de  $Y$ .

4.c.iii. Retrouver le moment d'ordre 2 de la variable aléatoire  $X$  et déterminer son moment d'ordre 4.

4.c.iv. Écrire une fonction **Python** permettant de simuler une réalisation de la variable aléatoire  $X$ .

### Remarque

J'ai légèrement changé cette fin d'exercice.

# CORRIGÉ

Pour tout entier naturel  $n$ , on considère la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = x^n e^{-\frac{x^2}{2}}$$

1. Justifier que  $f_n(x)$  est négligeable devant  $\frac{1}{x^2}$  au voisinage de  $+\infty$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$ , suffisamment proche de  $+\infty$ . On a :

$$\begin{aligned} \frac{f_n(x)}{\frac{1}{x^2}} &= x^{n+2} e^{-\frac{x^2}{2}} \\ &= \frac{(x^2)^{\frac{n+2}{2}}}{e^{\frac{x^2}{2}}} \\ &= 2^{\frac{n+2}{2}} \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{n+2}{2}}}{e^{\frac{x^2}{2}}} \end{aligned}$$

Or :

$$\checkmark \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2} = +\infty$$

$$\checkmark \text{ par croissances comparées, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{n+2}{2}}}{e^x} = 0.$$

D'où, par composition et produit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{\frac{n+2}{2}} \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{n+2}{2}}}{e^{\frac{x^2}{2}}} = 0$$

Par conséquent :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{\frac{1}{x^2}} = 0$$

Conclusion :  $f_n(x) = o_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x^2} \right)$ .

2. En déduire la convergence de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx$ .

Remarquons déjà que la fonction  $f_n$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . Par conséquent, l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx$  est impropre en  $+\infty$  seulement. Ensuite :

$$\checkmark \text{ d'après la question précédente, } f_n(x) = o_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x^2} \right);$$

$$\checkmark \forall x \in [1; +\infty[, f_n(x) \geq 0 ; \frac{1}{x^2} \geq 0$$

$$\checkmark \text{ l'intégrale } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ est une intégrale de Riemann convergente.}$$

Ainsi, par critère de comparaison sur les intégrales à intégrandes positives, l'intégrale  $\int_1^{+\infty} f_n(x) dx$  est convergente.

Et, c'est aussi le cas de  $\int_0^1 f_n(x) dx$ , car elle n'est pas impropre.

Conclusion : l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx$  est convergente.

3. On pose  $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$ .

3.a. Établir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = (n+1)I_n$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a :

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^{+\infty} x^{n+2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \int_0^{+\infty} x^{n+1} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \end{aligned}$$

## Rappels...

**Croissances comparées :**

Pour tous  $a, b, c > 0$  :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)^a}{x^b} = +\infty$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^b}{(e^x)^a} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)^a}{\ln(x)^c} = +\infty$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)^c}{(e^x)^a} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^b}{\ln(x)^c} = +\infty$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)^c}{x^b} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} x^b \ln(x)^c = 0$$

Pour utiliser une de ces croissances comparées, il faudra toujours mettre les expressions sous une des 7 formes données (on tolère  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$  sans détail).

## Rédaction

En début d'exercice, je ne peux que conseiller de bien détailler les calculs de limites, en particulier lorsqu'elles utilisent des croissances comparées avec des compositions. Un tel niveau de détail n'était toutefois peut-être pas attendu ici...

Soit ensuite  $A \in \mathbb{R}^+$ . Posons :  $\begin{cases} u : x \mapsto x^{n+1} \\ v : x \mapsto -e^{-\frac{x^2}{2}} \end{cases}$ . Les fonctions  $u$  et  $v$  sont  $\mathcal{C}^1$  sur le segment  $[0; A]$  et pour

tout  $x \in [0; A]$  :  $\begin{cases} u'(x) = (n+1)x^n \\ v'(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}} \end{cases}$ .

Par intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^A x^{n+1} xe^{-\frac{x^2}{2}} dx &= \left[ -x^{n+1} e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_0^A - \int_0^A -(n+1)x^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= -A^{n+1} e^{-\frac{A^2}{2}} + (n+1) \int_0^A x^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} n+1 > 0, \text{ donc } 0^{n+1} = 0$$

Or :

- ✓ par croissances comparées,  $\lim_{A \rightarrow +\infty} -A^{n+1} e^{-\frac{A^2}{2}} = 0$
- ✓ puisque l'intégrale  $I_n$  est convergente,  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A x^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx = I_n$ .

D'où le résultat en faisant tendre  $A$  vers  $+\infty$ .

Conclusion :  $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = (n+1)I_n$ .

**✍ Rédaction**  
On peut aller plus vite ici !

3.b. En utilisant la loi normale centrée réduite, justifier que  $I_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ .

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ est paire} \\ \\ \end{array} \right\} \text{ en reconnaissant l'intégrale de la densité d'une} \\ \\ \end{array} \right\} \text{variable aléatoire suivant la loi } \mathcal{N}(0; 1)$$

Conclusion :  $I_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ .

**★ Classique ! ★**  
Il est assez fréquent d'utiliser des résultats sur les lois à densité usuelles pour obtenir des valeurs d'intégrales.  
D'autres à travailler :  
 $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$   
 $\int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx$   
 $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx$   
Ou bien  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$  en prenant une "bonne valeur de  $\sigma$ " pour une VA  $X \leftrightarrow ; \sigma \dots$

3.c. Déterminer  $I_1$ .

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \left[ -e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_0^{+\infty} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-e^{-\frac{x^2}{2}}) + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Conclusion :  $I_1 = 1$ .

**✍ Rédaction**  
On tolère cette rédaction puisque la convergence de l'intégrale  $I_1$  est déjà assurée.

3.d. Démontrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$I_{2n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^n n!} ; \quad I_{2n+1} = 2^n n!$$

• **Initialisation.** Pour  $n = 0$  : On a :

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{0!}{2^0 0!} &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ &= I_0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{question 3.b.}$$

et :

$$\begin{aligned} 2^0 0! &= 1 \\ &= I_1 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{question 3.c.}$$

L'initialisation est vérifiée.

- **Hérédité.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons  $l_{2n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^n n!}$  et  $l_{2n+1} = 2^n n!$ .

Montrons :  $l_{2n+2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n+2)!}{2^{n+1}(n+1)!}$  ;  $l_{2n+3} = 2^{n+1}(n+1)!$ .

\* D'après la question 3.a. :

$$\begin{aligned}
 l_{2n+2} &= (2n+1)l_{2n} && \text{hypothèse de récurrence} \\
 &= (2n+1)\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^n n!} \\
 &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n+1)!}{2^n n!} \\
 &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n+1)!(2n+2)}{2^n n! \times (2n+2)} \\
 &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n+2)!}{2^n n! \times 2(n+1)} \\
 &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n+2)!}{2^{n+1}(n+1)!}
 \end{aligned}$$

\* À nouveau d'après la question 3.a. :

$$\begin{aligned}
 l_{2n+3} &= (2n+2)l_{2n+1} && \text{hypothèse de récurrence} \\
 &= (2n+2)2^n n! \\
 &= 2(n+1)2^n n! \\
 &= 2^{n+1}(n+1)!
 \end{aligned}$$

L'hérédité est ainsi établie.

**Conclusion :** pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$l_{2n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^n n!} ; l_{2n+1} = 2^n n!$$

4. Considérons la fonction  $f : x \mapsto \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ .

4.a. Démontrer que  $f$  est une densité de probabilité.

✓ **Positivité ?**

On a immédiatement :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$ .

✓ **Continuité ?**

Puisque  $f_1$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , on en déduit que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , sauf éventuellement en 0.

✓  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$  ?

\*  $\int_{-\infty}^0 f(x)dx$  converge et vaut 0.

\* D'après la question 3.c. :

$$I_1 = 1$$

Autrement dit :

$$\int_0^{+\infty} f_1(x)dx = 1$$

C'est-à-dire :

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Par conséquent, l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$  converge et, par relation de Chasles, vaut 1.

**Conclusion :** la fonction  $f$  est une densité de probabilité.

4.b. Soit  $X$  une variable aléatoire à densité de densité  $f$ .

4.b.i. Justifier que  $X$  admet une espérance et la calculer.

•

$X$  admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} |xf(x)|dx$  est convergente

si, et seulement si, l'intégrale  $\int_0^{+\infty} xf(x)dx$  est convergente,

car  $\forall x < 0, xf(x) = 0$  et  $\forall x \geq 0, xf(x) \geq 0$

si, et seulement si, l'intégrale  $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$  est convergente

**Remarque**

$f$  est continue en 0, mais cela n'est pas demandé (et pas nécessaire). Il est donc préférable de ne pas le mentionner, cela passerait pour une méconnaissance du cours.

- Or, d'après la question 1., l'intégrale  $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$  est convergente.
- On en déduit que  $X$  admet une espérance et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \\ &= \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= I_2 \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{2!}{2 \times 1!} \quad \left. \begin{array}{l} \curvearrowright \\ \end{array} \right\} \text{question 3.d.} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

Conclusion :  $\mathbb{E}(X) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ .

4.b.ii. Justifier que  $X$  admet une variance et la calculer.

- Ainsi, par théorème de transfert, licite car la fonction  $x \mapsto x^2$  est continue sur  $\mathbb{R}$  :
- $X$  admet un moment d'ordre 2 si, et seulement si, l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x^2 f(x)| dx$  est convergente
- si, et seulement si, l'intégrale  $\int_0^{+\infty} x^2 f(x) dx$  est convergente,
- car  $\forall x < 0, xf(x) = 0$  et  $\forall x \geq 0, x^2 f(x) \geq 0$
- si, et seulement si, l'intégrale  $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$  est convergente.
  - Or, d'après la question 1., l'intégrale  $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$  est convergente.
  - On en déduit que  $X$  admet un moment d'ordre 2 et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx \\ &= \int_0^{+\infty} x^3 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= I_3 \\ &= 2^1 \times 1! \quad \left. \begin{array}{l} \curvearrowright \\ \end{array} \right\} \text{question 3.d.} \\ &= 2 \end{aligned}$$

- Ainsi  $X$  admet une variance et, d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \\ &= 2 - \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{4 - \pi}{2} \end{aligned}$$

Conclusion :  $\mathbb{V}(X) = \frac{4 - \pi}{2}$ .

**Important !**

On rédige parfaitement ces deux questions, comme d'habitude, pour prendre tous les points !

4.c. On désigne par  $F$  et  $G$  les fonctions de répartition respectives des variables aléatoires  $X$  et  $Y = X^2$ .

4.c.i. Établir :

$$\forall x \in \mathbb{R}, G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ F(\sqrt{x}) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On a déjà  $Y(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

- Si  $x < 0$  :

$$\begin{aligned} G(x) &= \mathbb{P}([Y \leq x]) \\ &= \mathbb{P}(\emptyset) \quad \left. \begin{array}{l} \curvearrowright \\ \end{array} \right\} x < 0 \text{ et } Y(\Omega) \subset \mathbb{R}^+, \text{ donc } [Y \leq x] = \emptyset \\ &= 0 \end{aligned}$$

- Si  $x \geq 0$  :

$$\begin{aligned} G(x) &= \mathbb{P}([Y \leq x]) \\ &= \mathbb{P}([X^2 \leq x]) \quad \left. \begin{array}{l} \curvearrowright \\ \end{array} \right\} x \geq 0 \end{aligned}$$

**Remarque**

J'ai légèrement changé cette fin d'exercice.

$$= \mathbb{P}([-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}])$$

$$= F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x}) \quad \left. \begin{array}{l} \curvearrowright \\ \end{array} \right\} X \text{ est à densité}$$

Or :

$$F(-\sqrt{x}) = \mathbb{P}([X \leq -\sqrt{x}])$$

$$= \int_{-\infty}^{-\sqrt{x}} f(t) dt \quad \left. \begin{array}{l} \curvearrowright \\ \end{array} \right\} X \text{ est à densité, de densité } f$$

$$= 0 \quad \left. \begin{array}{l} \curvearrowright \\ \end{array} \right\} -\sqrt{x} \leq 0, \text{ donc } f \text{ est nulle sur } ]-\infty; -\sqrt{x}[$$

Ainsi :

$$G(x) = F(\sqrt{x})$$

**Conclusion :**  $\forall x \in \mathbb{R}, G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ F(\sqrt{x}) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

4.c.ii. Démontrer que  $Y$  est une variable aléatoire à densité puis en donner une densité. Reconnaître alors la loi de  $Y$ .

• Continuité ?

- \* Sur  $] -\infty; 0[$  :  
 $G$  est continue sur  $] -\infty; 0[$  car constante sur cet intervalle ;
- \* Sur  $]0; +\infty[$  :  
 $\sqrt{\cdot}$  est continue sur  $]0; +\infty[$  et à valeurs dans  $]0; +\infty[$   
 $\times F$  est continue sur  $]0; +\infty[$ , car  $X$  est à densité.  
 Donc  $G$  est continue sur  $]0; +\infty[$ .
- \* En 0 :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} G(x) = 0 ; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} G(x) = G(0) = F(0) = 0$$

Donc  $G$  est continue en 0.

Par conséquent,  $G$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

• Caractère  $\mathcal{C}^1$  ?

Par des arguments similaires, la fonction  $G$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  sauf éventuellement en 0.

**Conclusion :** la variable aléatoire  $Y$  est à densité et admet pour densité la fonction  $g$  définie par :

- pour tout  $x < 0$

$$g(x) = G'(x) = 0$$

- pour tout  $x > 0$

$$g(x) = G'(x)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} F'(\sqrt{x})$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} f(\sqrt{x})$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \sqrt{x} e^{-\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}$$

- et on pose  $g(0) = 0$ .

Ainsi,  $Y$  admet pour densité la fonction  $g : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ .

On reconnaît une densité d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre  $\frac{1}{2}$ .

**Conclusion :**  $Y \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right)$ .

4.c.iii. Retrouver le moment d'ordre 2 de la variable aléatoire  $X$  et déterminer son moment d'ordre 4.

- On a :

$$\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(Y)$$

$$= 2 \quad \left. \begin{array}{l} \curvearrowright \\ \end{array} \right\} Y \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right)$$

**♣ Méthode !**

Je choisis de procéder ainsi mais il est également possible de remarquer que l'on peut calculer explicite  $F(x)$  en fonction de  $x$  :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

et il est alors plus rapide et élémentaire de calculer explicitement  $G(x)$  pour répondre à la question...

**Remarque**

L'énoncé aurait pu procéder autrement en demandant de calculer  $F(x)$  en question précédente. On aurait alors plus naturellement pensé à calculer  $G(x)$  et on aurait alors reconnu la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre  $\frac{1}{2}$ .

Conclusion : on retrouve  $\mathbb{E}(X^2) = 2$ .

- Enfin, puisque  $X^4 = Y^2$  et que  $Y$  admet une variance, donc un moment d'ordre 2, on en déduit que  $X$  admet un moment d'ordre 4. Puis :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^4) &= \mathbb{E}(Y^2) \\ &= \mathbb{V}(Y) + (\mathbb{E}(Y))^2 && \left. \begin{array}{l} \curvearrowright \text{ formule de Koenig-Huygens} \\ \curvearrowright Y \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right) \end{array} \right\} \\ &= 4 + 4 \\ &= 8\end{aligned}$$

Conclusion :  $\mathbb{E}(X^4) = 8$ .

- 4.c.iv. Écrire une fonction **Python** permettant de simuler une réalisation de la variable aléatoire  $X$ .  
On sait que  $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$  et  $X^2 = Y$ , donc :

$$X = \sqrt{Y}$$

D'où le programme :

```
1 import numpy as np
2 import numpy.random as rd
3
4 def simuleX():
5     Y=rd.exponential(2)
6     X=np.sqrt(Y)
7     return X
```