Énoncé

On admet que si Z_1 et Z_2 sont deux variables aléatoires à densité, définies sur le même espace probabilisé, alors leur covariance, si elle est existe, est définie par :

$$\mathrm{Cov}(Z_1, Z_2) = \mathbb{E}(Z_1 Z_2) - \mathbb{E}(Z_1)\mathbb{E}(Z_2)$$

On admet également que si Z_1 et Z_2 sont indépendantes, alors leur covariance est nulle.

On considère deux variables aléatoires réelles X et U définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ indépendantes, X suivant la loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$ et U suivant la loi discrète uniforme sur $\{-1; 1\}$.
On pose $Y = UX$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, définie elle aussi sur l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. 1.a. Démontrer :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}\big([Y \leqslant x]\big) = \mathbb{P}\big([U = 1] \cap [X \leqslant x]\big) + \mathbb{P}\big([U = -1] \cap [X \geqslant -x]\big)$$
   1.b. En déduire que Y suit la même loi que X.
2. 2.a. Calculer l'espérance de U puis montrer que $\mathbb{E}(XY) = 0$.
   2.b. En déduire que $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.
3. 3.a. Rappeler la valeur de $\mathbb{E}(X^2)$ et en déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$.
   3.b. Établir :
$$\forall A \in \mathbb{R}^+,\ \int_0^A x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = -A^3 e^{-\frac{A^2}{2}} + 3\int_0^A x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$
   3.c. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ est convergente et vaut $\dfrac{3\sqrt{2\pi}}{2}$.
   3.d. Établir finalement que X possède un moment d'ordre 4 et que $\mathbb{E}(X^4) = 3$.
4. 4.a. Vérifier que $\mathbb{E}(X^2Y^2) = 3$.
   4.b. Déterminer $\mathrm{Cov}(X^2, Y^2)$.
   4.c. En déduire que X^2 et Y^2 ne sont pas indépendantes puis que X et Y ne le sont pas non plus.
   4.d. Cet exercice a permis de montrer qu'un résultat classique concernant les variables aléatoires discrètes est encore valable pour les variables aléatoires à densité, lequel ?

Corrigé

On admet que si Z_1 et Z_2 sont deux variables aléatoires à densité, définies sur le même espace probabilisé, alors leur covariance, si elle est existe, est définie par :

$$\text{Cov}(Z_1, Z_2) = \mathbb{E}(Z_1 Z_2) - \mathbb{E}(Z_1)\mathbb{E}(Z_2)$$

On admet également que si Z_1 et Z_2 sont indépendantes, alors leur covariance est nulle.

On considère deux variables aléatoires réelles X et U définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ indépendantes, X suivant la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$ et U suivant la loi discrète uniforme sur $\{-1;1\}$.
On pose $Y = UX$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, définie elle aussi sur l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. **1.a.** Démontrer :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}\big([Y \leqslant x]\big) = \mathbb{P}\big([U=1]\cap[X\leqslant x]\big) + \mathbb{P}\big([U=-1]\cap[X \geqslant -x]\big)$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.
D'après la formule des probabilités totales, avec $\big([U=-1],[U=1]\big)$ comme système complet d'évènements, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([Y \leqslant x]\big) &= \mathbb{P}\big([U=1]\cap[Y\leqslant x]\big) + \mathbb{P}\big([U=-1]\cap[Y \leqslant -x]\big)\\ &= \mathbb{P}\big([U=1]\cap[UX\leqslant x]\big) + \mathbb{P}\big([U=-1]\cap[UX \leqslant x]\big)\\ &= \mathbb{P}\big([U=1]\cap[X\leqslant x]\big) + \mathbb{P}\big([U=-1]\cap[-X \leqslant x]\big)\\ &= \mathbb{P}\big([U=1]\cap[X\leqslant x]\big) + \mathbb{P}\big([U=-1]\cap[X \geqslant -x]\big)\end{aligned}$$

> **Conclusion :** $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}\big([Y \leqslant x]\big) = \mathbb{P}\big([U=1]\cap[X\leqslant x]\big) + \mathbb{P}\big([U=-1]\cap[X \geqslant -x]\big)$.

1.b. En déduire que Y suit la même loi que X.
Notons F_X et F_Y les fonctions de répartitions respectives de X et Y.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}F_Y(x) &= \mathbb{P}\big([Y\leqslant x]\big)\\ &= \mathbb{P}\big([U=1]\cap[X\leqslant x]\big) + \mathbb{P}\big([U=-1]\cap[X \geqslant -x]\big) && \text{question précédente}\\ &= \mathbb{P}\big([U=1]\big)\mathbb{P}\big([X\leqslant x]\big) + \mathbb{P}\big([U=-1]\big)\mathbb{P}\big([X\geqslant -x]\big) && U \text{ et } X \text{ sont indépendantes}\\ &= \frac{1}{2}F_X(x) + \frac{1}{2}\Big(1-\mathbb{P}\big([X<-x]\big)\Big) && U \text{ suit la loi uniforme sur } \{-1;1\}\\ &= \frac{1}{2}F_X(x) + \frac{1}{2}\big(1-F_X(-x)\big) && X \text{ est à densité}\\ &= F_X(x) && \text{puisque } X \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1), \text{ on a } F_X(-x) = 1-F_X(x)\end{aligned}$$

Par conséquent, les variables aléatoires X et Y ont la même fonction de répartition.

> **Conclusion :** puisque la fonction de répartition caractérise la loi, on en déduit que Y a la même loi que X.

☞ Rappel...
Cette propriété sur la fonction de répartition d'une VA suivant la loi $\mathcal{N}(0;1)$ est encore valable pour toute VA admettant une densité paire sur $\mathbb{R}$.

☞ Pour info...
Et ce résultat sera valable du moment que X est une variable aléatoire symétrique (densité paire) : X et UX auront la même loi (où U suit une uniforme sur $\{-1;1\}$).

2. **2.a.** Calculer l'espérance de U puis montrer que $\mathbb{E}(XY) = 0$.

- Puisque $U(\Omega) = \{-1;1\}$ ($U(\Omega)$ est fini), U admet une espérance et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(U) &= -1\mathbb{P}\big([U=-1]\big) + 1\mathbb{P}\big([U=1]\big)\\ &= 0\end{aligned}$$

- On a :

$$\begin{aligned}XY &= XUX\\ &= X^2U\end{aligned}$$

Or :
✓ X^2 admet une espérance (car $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$, donc X admet un moment d'ordre 2) ;
✓ U admet une espérance ;
✓ X et U sont indépendantes, donc par lemme des coalitions, X^2 et U sont également indépendantes.
Par conséquent, X^2U admet une espérance et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2U) &= \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(U)\\ &= 0 && \text{point précédent}\end{aligned}$$

> **Conclusion :** XY admet une espérance et $\mathbb{E}(XY) = 0$.

☞ Rappel...
Ces trois hypothèses impliquent deux choses :
• l'existence de l'espérance de X^2U
• la relation $\mathbb{E}(X^2U) = \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(U)$.
Attention : de façon générale, l'existence de $\mathbb{E}(Z_1)$ et $\mathbb{E}(Z_2)$ n'implique pas l'existence de $\mathbb{E}(Z_1Z_2)$ (chercher un exemple avec $Z_1 = Z_2$...). Il est donc important de mentionner l'indépendance afin de justifier l'existence.

2.b. En déduire que $\text{Cov}(X,Y) = 0$.
D'après ce qui précède :

✓ $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$ existent (car Y a même loi que X),

✓ $\mathbb{E}(XY)$ existe.

Par conséquent, $\mathrm{Cov}(X, Y)$ existe et :

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\ &= 0 \qquad \text{question précédente et } \mathbb{E}(X) = 0 \text{ car } X \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 1)\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

3\. 3.a. Rappeler la valeur de $\mathbb{E}(X^2)$ et en déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$.

- On sait que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 1)$, donc X admet une variance et, d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2$$

Or $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 1)$, donc $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathbb{V}(X) = 1$.

Conclusion : $\mathbb{E}(X^2) = 1$.

- Par théorème de transfert, licite car $x \longmapsto x^2$ est continue sur $X(\Omega)$ ($X(\Omega) = \mathbb{R}$), l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$ est convergente et :

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

D'où, d'après le point précédent :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \sqrt{2\pi}$$

Or la fonction $x \longmapsto x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}$ est paire, donc :

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

Conclusion : $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$.

3.b. Établir :

$$\forall A \in \mathbb{R}^+, \quad \int_0^A x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = -A^3 e^{-\frac{A^2}{2}} + 3\int_0^A x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

Soit $A \in \mathbb{R}^+$. On a :

$$\int_0^A x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \int_0^A x^3 \times x e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

Posons : $\left|\begin{array}{l} u : x \longmapsto x^3 \\ v : x \longmapsto -e^{-\frac{x^2}{2}} \end{array}\right.$.

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[0; A]$ et pour tout $x \in [0; A]$: $\left|\begin{array}{l} u'(x) = 3x^2 \\ v'(x) = x e^{-\frac{x^2}{2}} \end{array}\right.$.

Par intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^A x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx &= \Big[-x^3 e^{-\frac{x^2}{2}}\Big]_0^A - \int_0^A -3x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \\ &= -A^3 e^{-\frac{A^2}{2}} + 3\int_0^A x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx\end{aligned}$$

Conclusion : $\displaystyle\forall A \in \mathbb{R}^+, \int_0^A x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = -A^3 e^{-\frac{A^2}{2}} + 3\int_0^A x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$.

3.c. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$ est convergente et vaut $\dfrac{3\sqrt{2\pi}}{2}$.

- Pour tout $A \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$A^3 e^{-\frac{A^2}{2}} = (A^2)^{\frac{3}{2}} \left(e^{-A^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Or :

✓ $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} A^2 = +\infty$,

✓ $\displaystyle\lim_{y \to +\infty} y^{\frac{3}{2}} \left(e^{-y}\right)^{\frac{1}{2}} = 0$ par croissances comparées.

✘ Attention !

Les croissances comparées sont des FI de la forme $x^a \left(e^{-x}\right)^b$ en $+\infty$, avec $a, b > 0$...

Il se peut que les points soient attribués sans cet effort de détail pour faire apparaître les CC, ou pas !

Donc par composition :

$$\lim_{A\to+\infty} A^3 e^{-\frac{A^2}{2}} = 0$$

- D'après la question 3.a, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ est convergente et vaut $\dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}$. D'où :

$$\lim_{A\to+\infty} \int_0^A x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$$

On en déduit, d'après la question précédente et les deux points précédents :

$$\lim_{A\to+\infty} \int_0^A x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \frac{3\sqrt{2\pi}}{2}$$

> **Conclusion :** l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ est convergente et vaut $\dfrac{3\sqrt{2\pi}}{2}$.

3.d. Établir finalement que X possède un moment d'ordre 4 et que $\mathbb{E}(X^4) = 3$.

- Par théorème de transfert, licite car la fonction $x \longmapsto x^4$ est continue sur $\mathbb{R}$: :

X admet un moment d'ordre 4 si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 f(x)dx$ est absolument convergente

si, et seulement si, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^4 f(x)dx$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x^4 f(x)dx$ sont convergentes, car il s'agit d'intégrales à intégrandes positives

si, et seulement si, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ sont convergentes

si, et seulement si, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ sont convergentes

- Or, d'après la question précédente, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ est convergente. Ainsi, par parité de $x \longmapsto x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ est également convergente.
- On en déduit que X admet un moment d'ordre 4 et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx && \text{parité de } x \longmapsto x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx && \text{question précédente} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{3\sqrt{2\pi}}{2} \\
&= 3
\end{aligned}$$

> **Conclusion :** X possède un moment d'ordre 4 et que $\mathbb{E}(X^4) = 3$.

4. 4.a. Vérifier que $\mathbb{E}(X^2Y^2) = 3$.

On a :

$$\begin{aligned}
X^2Y^2 &= X^2(UX)^2 \\
&= U^2X^4 \\
&= X^4 && U(\Omega) = \{-1; 1\}, \text{ donc } U^2 \text{ est constante égale à } 1
\end{aligned}$$

Petite remarque
On pourrait également manipuler $(X^2Y^2)(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$, mais ce n'est pas nécessaire.

> **Conclusion :** d'après la question précédente, on en déduit que X^2Y^2 admet une espérance et $\mathbb{E}(X^2Y^2) = 3$.

4.b. Déterminer $\mathrm{Cov}(X^2, Y^2)$.

D'après ce qui précède :

✓ $\mathbb{E}(X^2)$ et $\mathbb{E}(Y^2)$ existent et valent 1 (question 3.a et car Y a même loi que X) ;

✓ $\mathbb{E}(X^2Y^2)$ existe.

Par conséquent, $\text{Cov}(X^2, Y^2)$ existe et :

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X^2, Y^2) &= \mathbb{E}(X^2Y^2) - \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)\\ &= 3 - 1\\ &= 2\end{aligned}$$

> **Conclusion :** $\text{Cov}(X^2, Y^2) = 2$.

4.c. En déduire que X^2 et Y^2 ne sont pas indépendantes puis que X et Y ne le sont pas non plus.

- On sait que si deux variables aléatoires sont indépendantes, alors leur covariance est nulle.
  Or $\text{Cov}(X^2, Y^2) \neq 0$. Ainsi, par contraposée, les variables aléatoires X^2 et Y^2 ne sont pas indépendantes.
- Si X et Y étaient indépendantes, d'après le lemme des coalitions, les variables aléatoires X^2 et Y^2 le seraient également ; ce qui n'est pas le cas.

> **Conclusion :** X et Y ne sont pas indépendantes.

Petite remarque
Raisonnement intéressant dans cette question.

4.d. Cet exercice a permis de montrer qu'un résultat classique concernant les variables aléatoires discrètes est encore valable pour les variables aléatoires à densité, lequel ?

Dans le cas des variables aléatoires discrètes, on sait que la réciproque de "si X et Y sont indépendantes, alors $\text{Cov}(X, Y) = 0$" est fausse.
C'est encore le cas ici. En effet :

✓ $\text{Cov}(X, Y) = 0$ (question 2.b)

✓ et pourtant les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes (question précédente).