Énoncé

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère deux variables aléatoires X et Y, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes, telles que $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, x)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n, y)$, où x, y sont deux réels de $]0;1[$.
On pose $Z = 2n - X - Y$.

1. **1.a.** Déterminer $Z(\Omega)$.

   1.b. Exprimer en fonction de n, x et y les probabilités :

$$\mathbb{P}\big([Z=0]\big)\ ,\ \mathbb{P}\big([Z=2n]\big)\ ,\ \mathbb{P}\big([Z=2n-1]\big)\ ,\ \mathbb{P}\big([Z=1]\big)$$

2. **2.a.** Déterminer $\mathbb{E}(X^2)$ et $\mathbb{E}(Y^2)$.

   2.b. On pose $W = XYZ$. Justifier que W possède une espérance et que $\mathbb{E}(W) = n^2(n-1)xy(2-x-y)$.

3. On note $D =]0;1[\times]0;1[$ et on considère la fonction $f : (x,y) \longmapsto xy(2-x-y)$, définie sur D.

   3.a. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur D.

   3.b. Démontrer que f possède un unique point critique (x_0, y_0) à déterminer.

   3.c. Montrer que f possède un maximum local en (x_0, y_0) de valeur $\dfrac{8}{27}$.

   3.d. Établir :

$$\forall (x,y) \in D,\ f(x,y) - \frac{8}{27} = \frac{1}{4}\left(y - \frac{2}{3}\right)^2\left(y - \frac{8}{3}\right) - y\left(x + \frac{1}{2}y - 1\right)^2$$

   En déduire que ce maximum local est global sur D.

   3.e. Justifier ce maximum global n'est atteint qu'en (x_0, y_0).

4. Que peut-on alors dire de $\mathbb{E}(W)$?

Corrigé

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère deux variables aléatoires X et Y, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes, telles que $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, x)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n, y)$, où x, y sont deux réels de $]0; 1[$.
On pose $Z = 2n - X - Y$.

Remarque
Puisque le résultat n'est pas donné dans l'énoncé, se contenter de le donner suffit probablement pour avoir une bonne partie des points.

1. 1.a. Déterminer $Z(\Omega)$.

Justifions que $Z(\Omega) = [\![0; 2n]\!]$.

$\boxed{\subset}$ Puisque $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![0; n]\!]$, on a :

$$(X+Y)(\Omega) \subset [\![0; 2n]\!]$$

Et ainsi :

$$Z(\Omega) \subset [\![0; 2n]\!]$$

$\boxed{\supset}$ Soit $k \in [\![0; 2n]\!]$. Montrons que $[Z = k] \neq \varnothing$.
Distinguons deux cas :

- si $k \in [\![0; n]\!]$:
Dans ce cas, remarquons que $[X = n] \cap [Y = n - k] \subset [Z = k]$.
D'où :

$$\mathbb{P}\big([X = n] \cap [Y = n_k]\big) \leqslant \mathbb{P}\big([Z = k]\big)$$

Ainsi, par indépendance de X et Y :

$$\mathbb{P}\big([X = n]\big)\mathbb{P}\big([Y = n - k]\big) \leqslant \mathbb{P}\big([Z = k]\big)$$

Mais $\mathbb{P}\big([X = n]\big) \neq 0$ et, comme $n - k \in [\![0; n]\!]$, $\mathbb{P}\big([Y = n - k]\big) \neq 0$. Par conséquent :

$$\mathbb{P}\big([Z = k]\big) \neq 0$$

Et donc :

$$[Z = k] \neq \varnothing$$

- si $k \in [\![n + 1; 2n]\!]$:
Dans ce cas, remarquons que $[X = 0] \cap [Y = 2n - k] \subset [Z = k]$.
Et on conclut comme dans le cas précédent.

Par conséquent :

$$[\![0; 2n]\!] \subset Z(\Omega)$$

Conclusion : $Z(\Omega) = [\![0; 2n]\!]$.

1.b. Exprimer en fonction de n, x et y les probabilités :

$$\mathbb{P}\big([Z = 0]\big) \ , \ \mathbb{P}\big([Z = 2n]\big) \ , \ \mathbb{P}\big([Z = 2n - 1]\big) \ , \ \mathbb{P}\big([Z = 1]\big)$$

- On a :

$$[Z = 0] = [X = n] \cap [Y = n]$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([Z = 0]\big) &= \mathbb{P}\big([X = n] \cap [Y = n]\big) \\
&= \mathbb{P}\big([X = n]\big)\mathbb{P}\big([Y = n]\big) && \text{indépendance de } X \text{ et } Y \\
&= x^n y^n \\
&= (xy)^n
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{P}\big([Z = 0]\big) = (xy)^n$.

- On a :

$$[Z = 2n] = [X = 0] \cap [Y = 0]$$

Puis on procède de la même façon que ci-dessus.

Conclusion : $\mathbb{P}\big([Z = 2n]\big) = \big((1 - x)(1 - y)\big)^n$.

- On a :
$$[Z = 2n-1] = \big([X=0]\cap[Y=1]\big) \cup \big([X=1]\cap[Y=0]\big)$$
D'où :
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([Z=2n-1]\big) &= \mathbb{P}\Big(\big([X=0]\cap[Y=1]\big)\cup\big([X=1]\cap[Y=0]\big)\Big) \\
&= \mathbb{P}\big([X=0]\cap[Y=1]\big) + \mathbb{P}\big([X=1]\cap[Y=0]\big) && \text{incompatibilité de } [X=0]\cap[Y=1] \text{ et } [X=1]\cap[Y=0] \\
&= (1-x)^n \binom{n}{1} y(1-y)^{n-1} + (1-y)^n \binom{n}{1} x(1-x)^{n-1} && \text{indépendance de } X \text{ et } Y \\
&= ny(1-x)^n(1-y)^{n-1} + nx(1-y)^n(1-x)^{n-1} \\
&= n(1-x)^{n-1}(1-y)^{n-1}\big(y(1-x)+x(1-y)\big) \\
&= n(1-x)^{n-1}(1-y)^{n-1}(x+y-2xy)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{P}\big([Z=2n-1]\big) = n(1-x)^{n-1}(1-y)^{n-1}(x+y-2xy)$.

- On a :
$$[Z=1] = \big([X=n]\cap[Y=n-1]\big)\cup\big([X=n-1]\cap[Y=n]\big)$$
Et, de même que ci-dessus, on obtient :
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([Z=1]\big) &= nx^{n-1}y^{n-1}\big(1-x+1-y-2(1-x)(1-y)\big) \\
&= n(xy)^{n-1}(x+y-2xy)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{P}\big([Z=1]\big) = n(xy)^{n-1}(x+y-2xy)$.

2. 2.a. Déterminer $\mathbb{E}(X^2)$ et $\mathbb{E}(Y^2)$.

- Puisque X suit la loi binomiale de paramètres n et x, X admet une variance et, d'après la formule de Koenig-Huygens :
$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2$$
D'où :
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \mathbb{V}(X) + \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 \\
&= nx(1-x) + n^2x^2 \\
&= nx(1-x+nx)
\end{aligned}$$

- De même :
$$\mathbb{E}(Y^2) = ny(1-y+ny)$$

Conclusion : $\mathbb{E}(X^2) = nx(1-x+nx)$ et $\mathbb{E}(Y^2) = ny(1-y+ny)$.

✘ Attention !
X et Y sont indépendantes, mais X et Y ne sont pas indépendantes de Z !

2.b. On pose $W = XYZ$. Justifier que W possède une espérance et que $\mathbb{E}(W) = n^2(n-1)xy(2-x-y)$.

On a :
$$\begin{aligned}
W &= XYZ \\
&= XY(2n-X-Y) \\
&= 2nXY - X^2Y - XY^2
\end{aligned}$$

Remarque
On pourrait procéder autrement en mentionnant que X et Y admettent une espérance et sont indépendantes pour justifier que $\mathbb{E}(XY)$ existe... et on procéderait de façon analogue pour les deux autres.

Puisque $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis, les variables aléatoires XY, X^2Y et XY^2 sont également finies et admettent donc une espérance.Par conséquent, W admet une espérance comme combinaison linéaires de variables aléatoires admettant une espérance et :
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(W) &= \mathbb{E}(2nXY - X^2Y - XY^2) \\
&= 2n\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X^2Y) - \mathbb{E}(XY^2) && \text{linéarité de l'espérance, licite car chacune existe} \\
&= 2n\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y^2) && X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes ; et par lemme des coalitions, } X^2 \text{ et } Y \text{ également ainsi que } X \text{ et } Y^2 \\
&= 2n^3xy - n^2xy(1-x+nx) - n^2xy(1-y+ny) && \text{question précédente} \\
&= n^2xy\big(2n - (1-x+nx) - (1-y+ny)\big) \\
&= n^2xy\big(2n-2+x+y-nx-ny\big) \\
&= n^2xy\big(2(n-1)-(n-1)x-(n-1)y\big) \\
&= n^2xy(n-1)(2-x-y)
\end{aligned}$$

Remarque
Si on coince pour établir l'égalité demandée, on peut développer $(n-1)(2-x-y)$ pour retrouver $2n-(1-x+nx)-(1-y+ny)$...

Conclusion : W possède une espérance et $\mathbb{E}(W) = n^2(n-1)xy(2-x-y)$.

3. On note $D =]0;1[\times]0;1[$ et on considère la fonction $f : (x,y) \longmapsto xy(2-x-y)$, définie sur D.

3.a. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur D.

La fonction f est polynomiale, elle est donc de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et donc en particulier sur D.

3.b. Démontrer que f possède un unique point critique (x_0, y_0) à déterminer.

On a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = 2xy - x^2y - xy^2$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\partial_1 f(x,y) = 2y - 2xy - y^2 \quad ; \quad \partial_2 f(x,y) = 2x - x^2 - 2xy$$

☞ Rappels...

• Le gradient de f en (x, y), noté $\nabla f(x, y)$, est défini par :

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x,y) \\ \partial_2 f(x,y) \end{pmatrix}$$

• Les points critiques sont les couples (x, y) tels que $\nabla f(x, y) = 0_{2,1}$.

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\nabla f(x,y) = 0_{2,1} \quad & \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ll} 2y - 2xy - y^2 & = 0 \\ 2x - x^2 - 2xy & = 0 \end{array}\right. \\
& \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} -2x - y + 2 = 0 \\ -x - 2y + 2 = 0 \end{array}\right. \\
& \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} 2x + y = 2 \\ x + 2y = 2 \end{array}\right. \\
& \underset{L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{\begin{array}{l} 2x + y = 2 \\ 3y = 2 \end{array}\right. \\
& \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{2}{3} \\ y = \dfrac{2}{3} \end{array}\right.
\end{aligned}$$

$x \neq 0$ et $y \neq 0$

Conclusion : f admet un unique point critique en $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$.

Vérification

Puisque x et y ont des rôles symétriques dans l'expression de $f(x, y)$, il est normal qu'elles aient encore des rôles symétriques dans le point critique trouvé.

3.c. Montrer que f possède un maximum local en (x_0, y_0) de valeur $\dfrac{8}{27}$.

On a, pour tout $(x, y) \in D$:

$$\partial^2_{1,1} f(x,y) = -2y \quad ; \quad \partial^2_{2,1} f(x,y) = 2 - 2x - 2y \quad ; \quad \partial^2_{1,2} f(x,y) = 2 - 2x - 2y \quad ; \quad \partial^2_{2,2} f(x,y) = -2x$$

D'où :

$$\nabla^2 f\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{-4}{3} & \dfrac{-2}{3} \\ \dfrac{-2}{3} & \dfrac{-4}{3} \end{pmatrix}$$

Notons A cette matrice.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \quad & \Longleftrightarrow \quad \det(A - \lambda I_2) = 0 \\
& \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{-4}{3} - \lambda\right)^2 - \left(\frac{-2}{3}\right)^2 = 0 \\
& \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{-4}{3} - \lambda = -\dfrac{2}{3} \\ \text{OU} \\ \dfrac{-4}{3} - \lambda = \dfrac{2}{3} \end{array}\right. \\
& \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \lambda = -\dfrac{2}{3} \\ \text{OU} \\ \lambda = -2 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Remarque

On peut aussi remarquer que -2 est VP associée au $\overrightarrow{\text{VP}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$...

et que $\dfrac{-2}{3}$ est VP associée au $\overrightarrow{\text{VP}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Par conséquent, $\nabla^2 f\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$ possède deux valeurs propres strictement négatives.

Conclusion : f possède un maximum local en $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$ et :

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) & = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(2 - \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right) \\
& = \frac{4}{9} \times \frac{2}{3} \\
& = \frac{8}{27}
\end{aligned}$$

3.d. Établir :

$$\forall (x,y) \in D,\ f(x,y) - \frac{8}{27} = \frac{1}{4}\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 \left(y - \frac{8}{3}\right) - y\left(x + \frac{1}{2}y - 1\right)^2$$

En déduire que ce maximum local est global sur D.

- Soit $(x,y) \in D$. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 \left(y - \frac{8}{3}\right) - y\left(x + \frac{1}{2}y - 1\right)^2 &= \frac{1}{4}\left(y^2 - \frac{4}{3}y + \frac{4}{9}\right)\left(y - \frac{8}{3}\right) - y\left(x^2 + \frac{1}{4}y^2 + 1 + xy - 2x - y\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(y^3 - 4y^2 + 4y - \frac{32}{27}\right) - yx^2 - \frac{1}{4}y^3 - y - xy^2 + 2xy + y^2 \\
&= \frac{-8}{27} - x^2y - xy^2 + 2xy \\
&= f(x,y) - \frac{8}{27}
\end{aligned}$$

- Soit $(x,y) \in D$.
  - ∗ $\frac{1}{4}\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 \geqslant 0$ et, comme $y < 1$, on a $y - \frac{8}{3} < 0$, d'où :

$$\frac{1}{4}\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 \left(y - \frac{8}{3}\right) \leqslant 0$$

  - ∗ $y > 0$ et $\left(x + \frac{1}{2}y - 1\right)^2 \geqslant 0$, donc :

$$-y\left(x + \frac{1}{2}y - 1\right)^2 \leqslant 0$$

  On en déduit :

$$\forall (x,y) \in D,\ f(x,y) - \frac{8}{27} \leqslant 0$$

  Autrement dit :

$$\forall (x,y) \in D,\ f(x,y) \leqslant f\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

> **Conclusion :** ce maximum, égal à $\frac{8}{27}$ et atteint en $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, est global.

3.e. Justifier ce maximum global n'est atteint qu'en (x_0, y_0).

- On sait déjà que ce maximum global est atteint en (x_0, y_0).
- Ensuite, supposons qu'il soit atteint en un ("autre") point (x_1, y_1) de D.
  Puisque D est ouvert, on aurait alors :

$$\nabla f(x_1, y_1) = 0_{2,1}$$

  Or f ne possède qu'une unique point critique sur D : (x_0, y_0). D'où nécessairement : $(x_0, y_0) = (x_1, y_1)$.

☞ Rappel...
Sur un ouvert, les extrema sont des points critiques (réciproque fausse).

> **Conclusion :** ce maximum global n'est atteint qu'en (x_0, y_0).

4. Que peut-on alors dire de $\mathbb{E}(W)$?
Remarquons que $\mathbb{E}(W) = n^2(n-1)f(x,y)$. Or $n^2(n-1) > 0$...

> **Conclusion :** $\mathbb{E}(W)$ est maximale lorsque $x = y = \frac{2}{3}$ et vaut alors $\frac{8}{27}$.