Énoncé

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère deux variables aléatoires X et Y, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes, telles que $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, x)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n, y)$, où x, y sont deux réels de $]0;1[$.
On pose $Z = 2n - X - Y$.

1. 1.a. Déterminer $Z(\Omega)$.
   1.b. Exprimer en fonction de n, x et y les probabilités :
   $$\mathbb{P}\big([Z=0]\big)\ ,\ \mathbb{P}\big([Z=2n]\big)\ ,\ \mathbb{P}\big([Z=2n-1]\big)\ ,\ \mathbb{P}\big([Z=1]\big)$$
2. 2.a. Déterminer $\mathbb{E}(X^2)$ et $\mathbb{E}(Y^2)$.
   2.b. On pose $W = XYZ$. Justifier que W possède une espérance et que $\mathbb{E}(W) = n^2(n-1)xy(2-x-y)$.
3. On note $D =]0;1[\times]0;1[$ et on considère la fonction $f : (x, y) \longmapsto xy(2-x-y)$, définie sur D.
   3.a. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur D.
   3.b. Démontrer que f possède un unique point critique (x_0, y_0) à déterminer.
   3.c. Montrer que f possède un maximum local en (x_0, y_0) de valeur $\dfrac{8}{27}$.
   3.d. Établir :
   $$\forall (x,y) \in D,\ f(x,y) - \frac{8}{27} = \frac{1}{4}\left(y - \frac{2}{3}\right)^2\left(y - \frac{8}{3}\right) - y\left(x + \frac{1}{2}y - 1\right)^2$$
   En déduire que ce maximum local est global sur D.
4. Que peut-on alors dire de $\mathbb{E}(W)$?

Corrigé

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère deux variables aléatoires X et Y, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes, telles que $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, x)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n, y)$, où x, y sont deux réels de $]0; 1[$.
On pose $Z = 2n - X - Y$.

1. 1.a. Déterminer $Z(\Omega)$.

Justifions que $Z(\Omega) = [\![0; 2n]\!]$.

Petite remarque
Donner le résultat suffit probablement pour avoir une bonne partie, sinon la totalité, des points.

$\boxed{\subset}$ Puisque $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![0; n]\!]$, on a :

$$(X + Y)(\Omega) \subset [\![0; 2n]\!]$$

Et ainsi :

$$Z(\Omega) \subset [\![0; 2n]\!]$$

$\boxed{\supset}$ Soit $k \in [\![0; 2n]\!]$. Montrons que $[Z = k] \neq \varnothing$.
Distinguons deux cas :

⋆ si $k \in [\![0; n]\!]$:
Dans ce cas, remarquons que $[X = n] \cap [Y = n - k] \subset [Z = k]$.
D'où :

$$\mathbb{P}\big([X = n] \cap [Y = n_k]\big) \leqslant \mathbb{P}\big([Z = k]\big)$$

Ainsi, par indépendance de X et Y :

$$\mathbb{P}\big([X = n]\big)\mathbb{P}\big([Y = n - k]\big) \leqslant \mathbb{P}\big([Z = k]\big)$$

Mais $\mathbb{P}\big([X = n]\big) \neq 0$ et, comme $n - k \in [\![0; n]\!]$, $\mathbb{P}\big([Y = n - k]\big) \neq 0$. Par conséquent :

$$\mathbb{P}\big([Z = k]\big) \neq 0$$

Et donc :

$$[Z = k] \neq \varnothing$$

⋆ si $k \in [\![n + 1; 2n]\!]$:
Dans ce cas, remarquons que $[X = 0] \cap [Y = 2n - k] \subset [Z = k]$.
Et on conclut comme dans le cas précédent.

Par conséquent :

$$[\![0; 2n]\!] \subset Z(\Omega)$$

Conclusion : $Z(\Omega) = [\![0; 2n]\!]$.

1.b. Exprimer en fonction de n, x et y les probabilités :

$$\mathbb{P}\big([Z = 0]\big)\ ,\ \mathbb{P}\big([Z = 2n]\big)\ ,\ \mathbb{P}\big([Z = 2n - 1]\big)\ ,\ \mathbb{P}\big([Z = 1]\big)$$

- On a :

$$[Z = 0] = [X = n] \cap [Y = n]$$

D'où :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([Z = 0]\big) &= \mathbb{P}\big([X = n] \cap [Y = n]\big) \\ &= \mathbb{P}\big([X = n]\big)\mathbb{P}\big([Y = n]\big) \\ &= x^n y^n \\ &= (xy)^n\end{aligned}$$

indépendance de X et Y

- On a :

$$[Z = 2n] = [X = 0] \cap [Y = 0]$$

Et, de même que ci-dessus, on obtient :

$$\mathbb{P}\big([Z = 2n]\big) = \big((1 - x)(1 - y)\big)^n$$

- On a :

$$[Z = 2n - 1] = \big([X = 0] \cap [Y = 1]\big) \cup \big([X = 1] \cap [Y = 0]\big)$$

D'où :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([Z = 2n - 1]\big) &= \mathbb{P}\Big(\big([X = 0] \cap [Y = 1]\big) \cup \big([X = 1] \cap [Y = 0]\big)\Big) \\ &= \mathbb{P}\big([X = 0] \cap [Y = 1]\big) + \mathbb{P}\big([X = 1] \cap [Y = 0]\big) \\ &= (1 - x)^n \binom{n}{1} y(1 - y)^{n-1} + (1 - y)^n \binom{n}{1} x(1 - x)^{n-1} \\ &= ny(1 - x)^n(1 - y)^{n-1} + nx(1 - y)^n(1 - x)^{n-1} \\ &= n(1 - x)^{n-1}(1 - y)^{n-1}\big(y(1 - x) + x(1 - y)\big) \\ &= n(1 - x)^{n-1}(1 - y)^{n-1}(x + y - 2xy)\end{aligned}$$

incompatibilité de $[X = 0] \cap [Y = 1]$ et $[X = 1] \cap [Y = 0]$

indépendance de X et Y

- On a :

$$[Z=1] = \big([X=n]\cap[Y=n-1]\big)\cup\big([X=n-1]\cap[Y=n]\big)$$

Et, de même que ci-dessus, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([Z=1]\big) &= nx^{n-1}y^{n-1}\big(1-x+1-y-2(1-x)(1-y)\big)\\ &= n(xy)^{n-1}(x+y-2xy)\end{aligned}$$

2. 2.a. Déterminer $\mathbb{E}(X^2)$ et $\mathbb{E}(Y^2)$.

- Puisque X suit la loi binomiale de paramètres n et x, X admet une variance et, d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2$$

D'où :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \mathbb{V}(X) + \big(\mathbb{E}(X)\big)^2\\ &= nx(1-x)+n^2x^2\\ &= nx(1-x+nx)\end{aligned}$$

- De même :

$$\mathbb{E}(Y^2) = ny(1-y+ny)$$

Conclusion : $\mathbb{E}(X^2) = nx(1-x+nx)$ et $\mathbb{E}(Y^2) = ny(1-y+ny)$.

2.b. On pose $W = XYZ$. Justifier que W possède une espérance et que $\mathbb{E}(W) = n^2(n-1)xy(2-x-y)$.

✘ Attention !
X et Y sont indépendantes, mais X et Y ne sont pas indépendantes de Z !

On a :

$$\begin{aligned}W &= XYZ\\ &= XY(2n-X-Y)\\ &= 2nXY - X^2Y - XY^2\end{aligned}$$

Petite remarque
On pourrait procéder autrement en mentionnant que X et Y admettent une espérance et sont indépendantes pour justifier que $\mathbb{E}(XY)$ existe... et on procéderait de façon analogue pour les deux autres.

Puisque $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis, les variables aléatoires XY, X^2Y et XY^2 sont également finies et admettent donc une espérance.Par conséquent, W admet une espérance comme combinaison linéaires de variables aléatoires admettant une espérance et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(W) &= \mathbb{E}(2nXY - X^2Y - XY^2)\\ &= 2n\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X^2Y) - \mathbb{E}(XY^2) && \text{linéarité de l'espérance, licite car chacune existe}\\ &= 2n\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y^2) && X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes ; et par lemme des coalitions, } X^2 \text{ et } Y \text{ également ainsi que } X \text{ et } Y^2\\ &= 2n^3xy - n^2xy(1-x+nx) - n^2xy(1-y+ny) && \text{question précédente}\\ &= n^2xy\big(2n-(1-x+nx)-(1-y+ny)\big)\\ &= n^2xy\big(2n-2+x+y-nx-ny\big)\\ &= n^2xy\big(2(n-1)-(n-1)x-(n-1)y\big)\\ &= n^2xy(n-1)(2-x-y)\end{aligned}$$

Petite remarque
Si on coince pour établir l'égalité demandée, on peut développer $(n-1)(2-x-y)$ pour retrouver $2n-(1-x+nx)-(1-y+ny)$...

Conclusion : W possède une espérance et $\mathbb{E}(W) = n^2(n-1)xy(2-x-y)$.

3. On note $D =]0;1[\times]0;1[$ et on considère la fonction $f : (x,y) \longmapsto xy(2-x-y)$, définie sur D.

3.a. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur D.
La fonction f est polynomiale, elle est donc de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et donc en particulier sur D.

3.b. Démontrer que f possède un unique point critique (x_0, y_0) à déterminer.
On a, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = 2xy - x^2y - xy^2$$

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On a :

$$\partial_1 f(x,y) = 2y - 2xy - y^2 \quad ; \quad \partial_2 f(x,y) = 2x - x^2 - 2xy$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\nabla f(x,y) = 0_{2,1} &\iff \begin{cases}2y-2xy-y^2 &= 0\\ 2x-x^2-2xy &= 0\end{cases} && x\neq 0 \text{ et } y\neq 0\\ &\iff \begin{cases}-2x-\ \ y+2=0\\ -x-2y+2=0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}2x+\ \ y=2\\ x+2y=2\end{cases}\\ &\underset{L_2\leftarrow 2L_2-L_1}{\iff} \begin{cases}2x+\ \ y=2\\ 3y=2\end{cases}\end{aligned}$$

$$\iff \quad \begin{cases} x = \dfrac{2}{3} \\ y = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Vérification
Puisque x et y ont des rôles symétriques dans l'expression de $f(x,y)$, il est normal qu'elles aient encore des rôles symétriques dans le point critique trouvé.

Conclusion : f admet un unique point critique en $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$.

3.c. Montrer que f possède un maximum local en (x_0, y_0) de valeur $\dfrac{8}{27}$.

On a :

$$\partial^2_{1,1} f(x,y) = -2y \ ; \ \partial^2_{2,1} f(x,y) = 2 - 2x - 2y \ ; \ \partial^2_{1,2} f(x,y) = 2 - 2x - 2y \ ; \ \partial^2_{2,2} f(x,y) = -2x$$

D'où :

$$\nabla^2 f\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{-4}{3} & \dfrac{-2}{3} \\ \dfrac{-2}{3} & \dfrac{-4}{3} \end{pmatrix}$$

Notons A cette matrice...
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Sp}(A) &\iff \det(A - \lambda I_2) = 0 \\ &\iff \left(\frac{-4}{3} - \lambda\right)^2 - \left(\frac{-2}{3}\right)^2 = 0 \\ &\iff \begin{cases} \dfrac{-4}{3} - \lambda & = -\dfrac{2}{3} \\ \text{ou} & \\ \dfrac{-4}{3} - \lambda & = \dfrac{2}{3} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda & = -\dfrac{2}{3} \\ \text{ou} & \\ \lambda & = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Petite remarque
On peut aussi remarquer que -2 est VP associée au $\overrightarrow{\mathrm{VP}}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$... et que $\dfrac{-2}{3}$ est VP associée au $\overrightarrow{\mathrm{VP}}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Par conséquent, $\nabla^2 f\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$ possède deux valeurs propres strictement négatives.

Conclusion : f possède un maximum local en $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$ et :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(2 - \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{4}{9} \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{8}{27} \end{aligned}$$

3.d. Établir :

$$\forall (x,y) \in D, \ f(x,y) - \frac{8}{27} = \frac{1}{4}\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 \left(y - \frac{8}{3}\right) - y\left(x + \frac{1}{2}y - 1\right)^2$$

En déduire que ce maximum local est global sur D.

- Soit $(x,y) \in D$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 \left(y - \frac{8}{3}\right) - y\left(x + \frac{1}{2}y - 1\right)^2 &= \frac{1}{4}\left(y^2 - \frac{4}{3}y + \frac{4}{9}\right)\left(y - \frac{8}{3}\right) - y\left(x^2 + \frac{1}{4}y^2 + 1 + xy - 2x - y\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(y^3 - 4y^2 + 4y - \frac{32}{27}\right) - yx^2 - \frac{1}{4}y^3 - y - xy^2 + 2xy + y^2 \\ &= \frac{-8}{27} - x^2y - xy^2 + 2xy \\ &= f(x,y) - \frac{8}{27} \end{aligned}$$

calcul en question 3.b

- Soit $(x,y) \in D$.
  - $\star$ $\dfrac{1}{4}\left(y - \dfrac{2}{3}\right)^2 \geqslant 0$ et, comme $y < 1$, on a $y - \dfrac{8}{3} < 0$, d'où :

$$\frac{1}{4}\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 \left(y - \frac{8}{3}\right) \leqslant 0$$

$\star$ $y > 0$ et $\left(x + \frac{1}{2}y - 1\right)^2 \geqslant 0$, donc :

$$-y\left(x + \frac{1}{2}y - 1\right)^2 \leqslant 0$$

On en déduit :

$$\forall (x, y) \in D,\ f(x, y) - \frac{8}{27} \leqslant 0$$

Autrement dit :

$$\forall (x, y) \in D,\ f(x, y) \leqslant f\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Conclusion : f possède un maximum global sur D, égal à $\frac{8}{27}$ et atteint en $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

4. Que peut-on alors dire de $\mathbb{E}(W)$?
Remarquons que $\mathbb{E}(W) = n^2(n-1)f(x, y)$. Or $n^2(n-1) > 0$...

Conclusion : $\mathbb{E}(W)$ est maximale lorsque $x = y = \frac{2}{3}$ et vaut alors $\frac{8}{27}$.