Énoncé

Partie 1. Propriété d'une loi de probabilité

On désigne par c un réel strictement positif et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{x^{1+c}} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f peut être considérée comme une densité.
   On considère dans la suite une variable aléatoire X de densité f et on note F sa fonction de répartition. On dit que X suit la loi de Pareto de paramètre c.
2. Déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'expression de $F(x)$ en fonction de x.
3. Soit t un réel strictement supérieur à 1.
   3.a. Déterminer, en distinguant les cas $x \geqslant 1$ et $x < 1$, la probabilité $\mathbb{P}_{[X>t]}\big([X \leqslant tx]\big)$.
   3.b. En déduire que la loi de $\dfrac{X}{t}$ conditionnellement à l'évènement $[X > t]$ est la loi de X.

Partie 2. Réciproque de la propriété précédente.

On considère une variable aléatoire Y de densité g nulle sur $]-\infty; 1[$, strictement positive et continue sur $[1; +\infty[$. On pose $c = g(1)$ et on note G la fonction de répartition de Y.
Dans la suite, on suppose que pour tout $t > 1$:

- $\mathbb{P}\big([Y > t]\big) > 0$
- la loi de $\dfrac{Y}{t}$ conditionnellement à l'évènement $[Y > t]$ est la loi de Y.

On veut alors montrer que Y suit la loi de Pareto de paramètre c.

4. Justifier que $G(1) = 0$.
5. 5.a. Établir :

$$\forall x \geqslant 1,\ \forall t > 1,\ G(x) = \frac{G(tx) - G(t)}{1 - G(t)}$$

   5.b. Justifier que G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1; +\infty[$ et en déduire :

$$\forall x > 1,\ \forall t > 1,\ G'(x) = \frac{tG'(tx)}{1 - G(t)}$$

   5.c. Montrer enfin :

$$\forall t > 1,\ G(t) + \frac{t}{c}G'(t) = 1$$

6. Dans cette question, la lettre y désigne une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1; +\infty[$. On note (E_1) l'équation différentielle $y + \dfrac{t}{c}y' = 0$ et (E_2) l'équation différentielle $y + \dfrac{t}{c}y' = 1$.
   Il convient de noter que ces équations différentielles ne sont pas à coefficients constants.
   6.a. Soit z la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par : $\forall t \in]1; +\infty[,\ z(t) = t^c y(t)$. Montrer que y est solution de (E_1) si, et seulement si, z est constante sur $]1; +\infty[$.
   6.b. Donner alors toutes les solutions de (E_1).
   6.c. Trouver une fonction u, constante sur $]1; +\infty[$, et solution de (E_2).
   6.d. Montrer que y est solution de (E_2) si, et seulement si, $y - u$ est solution de (E_1).
   6.e. En déduire que les solutions de l'équation différentielle (E_2) sont les fonctions y définies par :

$$\forall t > 1,\ y(t) = 1 + \frac{K}{t^c}$$

7. 7.a. Montrer finalement que l'on a : $\forall t > 1,\ G(t) = 1 - \dfrac{1}{t^c}$.
   7.b. Vérifier que la relation s'étend à $[1; +\infty[$ puis conclure quant à la loi de Y.

Partie 3. Simulation d'une variable aléatoire suivant la loi de Pareto de paramètre c.

8. On pose $Z = \ln(X)$ et on admet que Z est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X. On note H sa fonction de répartition.
   8.a. Pour tout réel x, exprimer $H(x)$ à l'aide de la fonction F.
   8.b. En déduire que Z suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
   8.c. Écrire une fonction **Python** d'en-tête `def simuleX(c)` et permettant de simuler X.

Corrigé

Partie 1. Propriété d'une loi de probabilité

On désigne par c un réel strictement positif et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{x^{1+c}} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f peut être considérée comme une densité.

✍ Rédaction
On pense à bien détailler ce genre de questions pour s'assurer d'obtenir tous les points.

- **Positivité ?**
  - On a déjà : $\forall x < 1,\ f(x) \geqslant 0$
  - Ensuite, puisque $c > 0$, on a aussi : $\forall x \geqslant 1,\ f(x) \geqslant 0$.

  Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0$.
- **Continuité ?**
  - Sur $]-\infty; 1[$: f est continue sur cet intervalle, car constante sur cet intervalle.
  - Sur $]1; +\infty[$: f est continue sur cet intervalle, car $x \longmapsto x^{1+c}$ l'est et ne s'annule pas sur cet intervalle.
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$?
  - L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} f(x)dx$ est convergente et vaut 0.
  - Soit $B \in [1; +\infty[$. On a :

$$\begin{aligned} \int_1^B f(x)dx &= \int_1^B cx^{-1-c}dx \\ &= -\int_1^B -cx^{-c-1}dx \\ &= -\left[x^{-c}\right]_1^B \\ &= 1 - \frac{1}{B^c} \end{aligned}$$

$c \neq 0$

Or $c > 0$, donc $\displaystyle\lim_{B \to +\infty} B^c = +\infty$. D'où $\displaystyle\lim_{B \to +\infty} 1 - \frac{1}{B^c} = 1$. Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ est convergente et vaut 1.

Conclusion : l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ est convergente et vaut 1.

Conclusion : f est une densité de probabilité.

Remarque
C'est une loi que l'on rencontre très souvent aux écrits mais aussi aux oraux des concours. En particulier, elle était à l'honneur en 2020 sur les sujets **`emlyon`** et **`Ecricome`** ;mais également en 2025 sur le sujet **`emlyon`** : trois exercices supplémentaires à travailler sans modération !

On considère dans la suite une variable aléatoire X de densité f et on note F sa fonction de répartition. On dit que X suit la loi de Pareto de paramètre c.

2. Déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'expression de $F(x)$ en fonction de x.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} F(x) &= \mathbb{P}\left([X \leqslant x]\right) \\ &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \end{aligned}$$

X est à densité, de densité f

- Si $x < 1$:
  Puisque $x < 1$, on a $]-\infty; x] \subset]-\infty; 1[$ et donc :

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0$$

- Si $x \geqslant 1$:
  Par relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{x} f(t)dt &= \int_{-\infty}^{1} f(t)dt + \int_{1}^{x} f(t)dt \\ &= 1 - \frac{1}{x^c} \end{aligned}$$

$\displaystyle\int_{-\infty}^{1} f(t)dt = 0$ et calcul fait en question précédente, avec $x \geqslant 1$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x^c} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.

3. Soit t un réel strictement supérieur à 1.

3.a. Déterminer, en distinguant les cas $x \geqslant 1$ et $x < 1$, la probabilité $\mathbb{P}_{[X>t]}\big([X \leqslant tx]\big)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Remarquons déjà que $\mathbb{P}\big([X > t]\big) = 1 - F(t) \neq 0$. Ensuite :

- Si $x \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{[X>t]}\big([X \leqslant tx]\big) &= \frac{\mathbb{P}\big([X > t] \cap [X \leqslant tx]\big)}{\mathbb{P}\big([X > t]\big)} && x \geqslant 1\text{, donc } tx \geqslant t \\
&= \frac{\mathbb{P}\big([t < X \leqslant tx]\big)}{1 - F(t)} && X \text{ est à densité} \\
&= \frac{F(tx) - F(t)}{1 - F(t)} && \text{question précédente, avec } t > 1 \\
&= \frac{1 - \frac{1}{(tx)^c} - 1 + \frac{1}{t^c}}{\frac{1}{t^c}} \\
&= t^c \left(\frac{1}{t^c} - \frac{1}{t^c x^c} \right) \\
&= 1 - \frac{1}{x^c} && x \geqslant 1 \\
&= F(x)
\end{aligned}$$

- Si $x < 1$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{[X>t]}\big([X \leqslant tx]\big) &= \frac{\mathbb{P}\big([X > t] \cap [X \leqslant tx]\big)}{\mathbb{P}\big([X > t]\big)} && x < 1\text{, donc } tx < t\text{ ; donc } [X > t] \cap [X \leqslant tx] = \varnothing \\
&= 0 && x < 1 \\
&= F(x)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}_{[X>t]}\big([X \leqslant tx]\big) = F(x)$.

3.b. En déduire que la loi de $\dfrac{X}{t}$ conditionnellement à l'évènement $[X > t]$ est la loi de X.

Notons $G : x \longmapsto \mathbb{P}_{[X>t]}\left(\left[\dfrac{X}{t} \leqslant x\right]\right)$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
G(x) &= \mathbb{P}_{[X>t]}\left(\left[\frac{X}{t} \leqslant x\right]\right) && t > 0 \\
&= \mathbb{P}_{[X>t]}\big([X \leqslant tx]\big) && \text{question précédente} \\
&= F(x)
\end{aligned}$$

Or la fonction de répartition caractérise la loi.

Conclusion : la loi de $\dfrac{X}{t}$ conditionnellement à l'évènement $[X > t]$ est la loi de X.

Remarque

On comprend bien ce qui est en jeu, même si la question est hors programme puisque les couples de variables aléatoires à densité ne sont pas au programme...

Partie 2. Réciproque de la propriété précédente.

On considère une variable aléatoire Y de densité g nulle sur $]-\infty; 1[$, strictement positive et continue sur $[1; +\infty[$. On pose $c = g(1)$ et on note G la fonction de répartition de Y.

Dans la suite, on suppose que pour tout $t > 1$:

- $\mathbb{P}\big([Y > t]\big) > 0$
- la loi de $\dfrac{Y}{t}$ conditionnellement à l'évènement $[Y > t]$ est la loi de Y.

On veut alors montrer que Y suit la loi de Pareto de paramètre c.

4. Justifier que $G(1) = 0$.

$$\begin{aligned}
G(1) &= \mathbb{P}\big([Y \leqslant 1]\big) && Y \text{ est à densité, de densité } g \\
&= \int_{-\infty}^{1} g(x)dx && g \text{ est nulle sur }]-\infty; 1[\\
&= 0
\end{aligned}$$

5. **5.a.** Établir :

$$\forall x \geqslant 1,\ \forall t > 1,\ G(x) = \frac{G(tx) - G(t)}{1 - G(t)}$$

Soients $x \geqslant 1$ et $t > 1$.

- D'une part, puisque la loi de $\frac{Y}{t}$ conditionnellement à l'évènement $[Y > t]$ est la loi de Y, on a :

$$\begin{aligned} G(x) &= \mathbb{P}_{[Y>t]}\left(\left[\frac{Y}{t} \leqslant x\right]\right) \\ &= \mathbb{P}_{[Y>t]}\big([Y \leqslant tx]\big) \end{aligned} \qquad t > 0$$

- D'autre part, d'après le début des calculs de la question **3.a.**, licites car $x \geqslant 1$:

$$\mathbb{P}_{[Y>t]}\big([Y \leqslant tx]\big) = \frac{G(tx) - G(t)}{1 - G(t)}$$

Conclusion : $\forall x \geqslant 1,\ \forall t > 1,\ G(x) = \dfrac{G(tx) - G(t)}{1 - G(t)}$.

5.b. Justifier que G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1; +\infty[$ et en déduire :

$$\forall x > 1,\ \forall t > 1,\ G'(x) = \frac{tG'(tx)}{1 - G(t)}$$

- Puisque g est continue sur $]1; +\infty[$ et que G est une primitive de g sur cet intervalle, on en déduit que G est $\mathscr{C}^1$ sur $]1; +\infty[$.
- Soit $t > 1$. En dérivant la relation obtenue en question précédente par rapport à x, on obtient :

$$G'(x) = \frac{tG'(tx) - 0}{1 - G(t)}$$

Remarque
Le résultat est directement donné, c'est un peu dommage. Attention toutefois : t est alors fixé, donc $x \longmapsto G(t)$ est une constante ! Et pour dériver $x \longmapsto G(tx)$, il s'agit d'une composée de fonctions...

Conclusion : $\forall x > 1,\ \forall t > 1,\ G'(x) = \dfrac{tG'(tx)}{1 - G(t)}$.

5.c. Montrer enfin :

$$\forall t > 1,\ G(t) + \frac{t}{c}G'(t) = 1$$

Soit $t > 1$. D'après la question précédente :

$$\forall x > 1,\ G'(x) = \frac{tG'(tx)}{1 - G(t)}$$

Ensuite :

- d'une part

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} G'(x) &= \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} g(x) \\ &= g(1) \\ &= c \end{aligned} \qquad g \text{ est continue sur } [1; +\infty[$$

- d'autre part, G est $\mathscr{C}^1$ sur $]1; +\infty[$ (question précédente) donc G' est continue sur $]1; +\infty[$ et ainsi, puisque $t > 1$, G' est continue en t d'où :

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} G'(tx) = G'(t)$$

On obtient alors, en faisant $x \underset{x>1}{\to} 1$:

$$c = \frac{tG'(t)}{1 - G(t)}$$

D'où :

$$c\big(1 - G(t)\big) = tG'(t)$$

Et comme $g(1) = c$ et que g est strictement positive sur $[1; +\infty[$, on a $c > 0$; d'où :

$$1 - G(t) = \frac{t}{c}G'(t)$$

Conclusion : $\forall t > 1,\ G(t) + \dfrac{t}{c}G'(t) = 1$.

Remarque
Question pas si évidente quand on veut faire les choses rigoureusement...

6. Dans cette question, la lettre y désigne une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1; +\infty[$. On note (E_1) l'équation différentielle $y + \frac{t}{c}y' = 0$ et (E_2) l'équation différentielle $y + \frac{t}{c}y' = 1$.
Il convient de noter que ces équations différentielles ne sont pas à coefficients constants.

6.a. Soit z la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par : $\forall t \in]1;+\infty[,\ z(t) = t^c y(t)$. Montrer que y est solution de (E_1) si, et seulement si, z est constante sur $]1;+\infty[$.

La fonction z est dérivable sur $]1;+\infty[$ comme produit de telles fonctions ; et, pour tout $t > 1$:

$$z'(t) = ct^{c-1}y(t) + t^c y'(t)$$

Ensuite :

$$\begin{aligned}
\big(y \text{ est solution de } (E_1)\big) &\iff \forall t > 1,\ y(t) + \frac{t}{c}y'(t) = 0 \\
&\iff \forall t > 1,\ ct^{c-1}y(t) + t^c y'(t) = 0 && \forall t > 1,\ ct^{c-1} \neq 0 \\
&\iff \forall t > 1,\ z'(t) = 0 \\
&\iff \big(z \text{ est constante sur }]1;+\infty[\big) &&]1;+\infty[\text{ est un intervalle}
\end{aligned}$$

Conclusion : y est solution de (E_1) si, et seulement si, z est constante sur $]1;+\infty[$.

6.b. Donner alors toutes les solutions de (E_1).

D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
\big(y \text{ est solution de } (E_1)\big) &\iff \exists K \in \mathbb{R}\ /\ \forall t > 1\ z(t) = K \\
&\iff \exists K \in \mathbb{R}\ /\ \forall t > 1,\ t^c y(t) = K \\
&\iff \exists K \in \mathbb{R}\ /\ \forall t > 1,\ y(t) = \frac{K}{t^c} && \forall t > 1,\ t^c \neq 0
\end{aligned}$$

Conclusion : l'ensemble des solutions de (E_1) est $\left\{t \longmapsto \frac{K}{t^c},\ K \in \mathbb{R}\right\}$.

✓ Rigueur !

Il y avait un problème de rigueur dans l'énoncé initial qui disait "en notant K la constante évoquée à la question précédente". Cela est confus ; on pourrait alors penser que (E_1) possède une unique solution. J'ai préféré modifier l'énoncé.

✗ Attention !

Il s'agit d'un ensemble de fonctions !

6.c. Trouver une fonction u, constante sur $]1;+\infty[$, et solution de (E_2).

Conclusion : la fonction $u : t \longmapsto 1$ est solution de (E_2).

6.d. Montrer que y est solution de (E_2) si, et seulement si, $y - u$ est solution de (E_1).

$$\begin{aligned}
\big(y \text{ est solution de } (E_2)\big) &\iff y + \frac{t}{c}y' = 1 \\
&\iff y + \frac{t}{c}y' = u + \frac{t}{c}u' && u \text{ est solution de } (E_2) \text{, donc } u + \frac{t}{c}u' = 1 \\
&\iff (y-u) + \frac{t}{c}(y-u)' = 0 && \text{linéarité de la dérivation} \\
&\iff \big(y - u \text{ est solution de } (E_1)\big)
\end{aligned}$$

Important !

Le cadre du programme est celui des équations différentielles linéaires à coefficients constants. Ce n'est pas le cas ici, donc l'énoncé doit faire démontrer le résultat sur la structure de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire. C'est l'objet de cette question. On procède comme dans Question classique 43.

6.e. En déduire que les solutions de l'équation différentielle (E_2) sont les fonctions y définies par :

$$\forall t > 1,\ y(t) = 1 + \frac{K}{t^c}$$

Soit y une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1;+\infty[$. D'après les deux questions précédentes :

$$\begin{aligned}
\big(y \text{ est solution de } (E_2)\big) &\iff \big(y - 1 \text{ est solution de } (E_1)\big) && \text{question } \mathbf{6.b.} \\
&\iff \exists K \in \mathbb{R}\ /\ \forall t > 1,\ y(t) - 1 = \frac{K}{t^c} \\
&\iff \exists K \in \mathbb{R}\ /\ \forall t > 1,\ y(t) = 1 + \frac{K}{t^c}
\end{aligned}$$

Conclusion : l'ensemble des solutions de (E_2) est $\left\{t \longmapsto 1 + \frac{K}{t^c},\ K \in \mathbb{R}\right\}$.

7. 7.a. Montrer finalement que l'on a : $\forall t > 1,\ G(t) = 1 - \frac{1}{t^c}$.

D'après la question **5.c.**, G est solution de (E_2). Ainsi, d'après la question précédente, il existe $K \in \mathbb{R}$, que l'on considère ensuite, tel que : $\forall t > 1,\ G(t) = 1 + \frac{K}{t^c}$.

Or, G est continue en 1 (fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité), donc $\lim\limits_{\substack{t \to 1 \\ t > 1}} G(t) = G(1) = 0$ (d'après la question **4.**). D'où, en faisant $t \underset{t>1}{\to} 1$ dans la relation ci-dessus : $K = -1$.

Conclusion : $\forall t > 1,\ G(t) = 1 - \frac{1}{t^c}$.

7.b. Vérifier que la relation s'étend à $[1;+\infty[$ puis conclure quant à la loi de Y.

- Puisque $G(1) = 0$, la relation est encore valable si $t = 1$.
- Ensuite, G est nulle sur $]-\infty;1[$ (car g l'est sur $]-\infty;0[$) ; donc :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \ G(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{t^c} & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}$$

On retrouve la fonction de répartition de la question 2.. Or la fonction de répartition caractérise la loi...

> **Conclusion :** Y suit la loi de Pareto de paramètre c.

Partie 3. Simulation d'une variable aléatoire suivant la loi de Pareto de paramètre c.

8. On pose $Z = \ln(X)$ et on admet que Z est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X. On note H sa fonction de répartition.

8.a. Pour tout réel x, exprimer $H(x)$ à l'aide de la fonction F.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} H(x) &= \mathbb{P}\big([Z \leqslant x]\big) \\ &= \mathbb{P}\big([\ln(X) \leqslant x]\big) \\ &= \mathbb{P}\big([X \leqslant e^x]\big) && \text{stricte croissance de exp sur } \mathbb{R} \\ &= F(e^x) \end{aligned}$$

> **Conclusion :** $\forall x \in \mathbb{R},\ \ H(x) = F(e^x)$.

8.b. En déduire que Z suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente :

$$H(x) = F(e^x) \underset{\text{question 2.}}{=} \begin{cases} 0 & \text{si } e^x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{(e^x)^c} & \text{si } e^x \geqslant 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-cx} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre c.

> **Conclusion :** Z suit la loi exponentielle de paramètre c.

♥ Astuce du chef ♥
On remplace tous les x de $F(x)$ par e^x : même ceux dans les disjonctions de cas !

8.c. Écrire une fonction **Python** d'en-tête `def simuleX(c)` et permettant de simuler X.

Puisque $Z = \ln(X)$, on a $X = \exp(Z)$. D'où le programme :

```python
import numpy.random as rd
import numpy as np

def simuleX(c):
    Z=rd.exponential(1/c)
    X=np.exp(Z)
    return X
```

☞ Rappel...
En **Python**, le paramètre à saisir pour simuler la loi exponentielle est son espérance, qui vaut ici $\dfrac{1}{c}$.