Énoncé

PARTIE I : Étude d'une variable aléatoire

On considère l'application $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $\mathbb{R}$, par : $f(t) = \dfrac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}$.

1. Vérifier que la fonction f est paire.
2. Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire réelle.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire réelle X à densité, de densité f.

3. Déterminer la fonction de répartition de X.
4. **4.a.** Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)dt$ converge.

   4.b. En utilisant l'imparité de la fonction $t \longmapsto tf(t)$, montrer que X admet une espérance et que l'on a : $\mathbb{E}(X) = 0$.

PARTIE II. Étude d'une autre variable aléatoire

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $\mathbb{R}$, par : $\varphi(x) = \ln(1+e^x)$.

5. Montrer que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I à préciser.
6. Exprimer, pour tout y de I, $\varphi^{-1}(y)$.

On considère la variable aléatoire réelle Y définie par : $Y = \varphi(X)$.

7. Justifier : $\mathbb{P}\big([Y \leqslant 0]\big) = 0$.
8. Déterminer la fonction de répartition de Y.
9. Reconnaître alors la loi de Y et donner, sans calcul, son espérance et sa variance.

PARTIE III : Étude d'une convergence en loi

On considère une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, mutuellement indépendantes, de même densité f, où f a été définie dans la partie I. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $T_n = \max(X_1, ..., X_n)$ et $U_n = T_n - \ln(n)$.

10. **10.a.** Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction de répartition de T_n.

    10.b. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}\big([U_n \leqslant x]\big) = \left(1 + \dfrac{e^{-x}}{n}\right)^{-n}$.
11. En déduire que la suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle à densité dont on précisera la fonction de répartition et une densité.

Corrigé

PARTIE I : Étude d'une variable aléatoire

On considère l'application $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $\mathbb{R}$, par : $f(t) = \dfrac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}$.

1. Vérifier que la fonction f est paire.
   La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, qui est un ensemble symétrique par rapport à 0 et, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(-t) &= \frac{e^{t}}{(1+e^{t})^2} \\ &= \frac{e^{t} \times e^{-2t}}{(1+e^{t})^2 \times e^{-2t}} \\ &= \frac{e^{-t}}{(1+e^{t})^2(e^{-t})^2} \\ &= \frac{e^{-t}}{(e^{-t}+1)^2} \\ &= f(t) \end{aligned}$$

Petite remarque
Puisque le résultat est donné, on peut également démontrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(-t) - f(t) = 0$...

♣ Méthode !
Pour comparer deux fractions on peut :
- les mettre sous même dénominateur et comparer alors leurs numérateurs ;
- faire en sorte que les numérateurs soient égaux et comparer alors leurs dénominateurs.

> **Conclusion :** la fonction f est paire.

2. Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire réelle.
   - **Positivité.**
     On a immédiatement : $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) \geqslant 0$.
   - **Continuité.**
     La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
   - $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$?

     ⋆ $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(t)dt$?
     Soit $B \in \mathbb{R}^+$. On a :

$$\begin{aligned} \int_0^B f(t)dt &= \int_0^B \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}dt \\ &= \left[\frac{1}{1+e^{-t}}\right]_0^B \\ &= \frac{1}{1+e^{-B}} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

➠Réflexe !
Une fraction ? On regarde si elle correspond à une des formes suivantes :
- $\dfrac{u'}{u}$
- $\dfrac{u'}{u^2}$
- $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
- $\dfrac{u'}{u^n}$

Or, par composition et opérations :

$$\lim_{B\to+\infty} \frac{1}{1+e^{-B}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Conclusion : l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est convergente et vaut $\dfrac{1}{2}$.

⋆ $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)dt$?
On sait que :

✓ l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est convergente et vaut $\dfrac{1}{2}$,

✓ f est paire.

Conclusion : l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)dt$ est convergente et vaut $\dfrac{1}{2}$.

Conclusion : l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ est convergente et, par relation de Chasles, vaut 1.

> **Conclusion :** f est une densité de probabilité.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire réelle X à densité, de densité f.

3. Déterminer la fonction de répartition de X.

Notons F la fonction de répartition de X.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} F(x) &= \mathbb{P}([X \leqslant x]) \\ &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \qquad \text{X est à densité, de densité f} \\ &= \left[\frac{1}{1+e^{-t}}\right]_{t\to-\infty}^{x} \\ &= \frac{1}{1+e^{-x}} \end{aligned}$$

Rédaction Cette rédaction est tolérée si la convergence est déjà connue et si le calcul de la limite ne donne pas une FI...

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

4. 4.a. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)dt$ converge.

Puisque $t \longmapsto tf(t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, cette intégrale n'est impropre qu'en $+\infty$. Puis :

- ✓ comme $\lim\limits_{t\to+\infty} 1+e^{-t} = 1$, on a : $tf(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} te^{-t}$;
- ✓ $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ tf(t) \geqslant 0 \quad ; \quad te^{-t} \geqslant 0$;
- ✓ l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}dt$ est l'espérance d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1, elle est donc convergente.

Important ! On rencontre très souvent cette intégrale, il faut la reconnaître et donc savoir qu'elle est convergente et qu'elle vaut 1.
De la même façon, on reconnaît $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2e^{-t}dt$, ou plus largement $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-at}dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2e^{-at}dt$ avec $a > 0$...

Conclusion : par critère de comparaison (par équivalence) sur les intégrales à intégrandes positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)dt$ est convergente.

4.b. En utilisant l'imparité de la fonction $t \longmapsto tf(t)$, montrer que X admet une espérance et que l'on a : $\mathbb{E}(X) = 0$.

Rédaction On ne change pas nos bonnes habitudes, on commence toujours de cette façon...

- On sait que :

X admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$ est absolument convergente
si, et seulement si, les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} |t|f(t)dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} |t|f(t)dt$ sont convergentes
si, et seulement si, les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} -tf(t)dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)dt$ sont convergentes
si, et seulement si, les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} tf(t)dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)dt$ sont convergentes

- Or :
  - ⋆ d'après la question précédente, $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)dt$ est convergente ;
  - ⋆ puis, comme f est paire, la fonction $t \longmapsto tf(t)$ est impaire ; et donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} tf(t)dt$ est également convergente.
- On en déduit que X admet une espérance et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{0} tf(t)dt + \int_0^{+\infty} tf(t)dt \\ &= -\int_0^{+\infty} tf(t)dt + \int_0^{+\infty} tf(t) \qquad \text{$t \longmapsto tf(t)$ est impaire} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Conclusion : X admet une espérance et $\mathbb{E}(X) = 0$.

★ Classique ! ★ Question très classique, pas si simple, qu'il faut bien comprendre et savoir parfaitement rédiger.

Partie II. Étude d'une autre variable aléatoire

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $\mathbb{R}$, par : $\varphi(x) = \ln(1 + e^x)$.

5. Montrer que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I à préciser.

   ✓ φ est continue sur $\mathbb{R}$, comme composée de fonctions continues sur les intervalles adéquats ;

   ✓ $x \longmapsto 1 + e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]1; +\infty[$ et ln est strictement croissante sur $]1; +\infty[$, donc φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   Par théorème de bijection, φ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\varphi(\mathbb{R})$.
   Et, puisque φ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$: $\varphi(\mathbb{R}) =]\lim_{-\infty} \varphi, \lim_{+\infty} \varphi[=]0; +\infty[$.

   Conclusion : φ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_*^+$.

> **☞ Rappel...**
> Si :
> ✓ u est [...] sur I et à valeurs dans J ;
> ✓ g est [...] sur J
> Alors : $g \circ u$ est [...] sur I.
> Où [...] désigne "continue", ou "dérivable", ou "$\mathscr{C}^1$",...

> **Petite remarque**
> Bien évidemment, les variations peuvent s'obtenir en dérivant φ (après justification rapide de dérivabilité).

6. Exprimer, pour tout y de I, $\varphi^{-1}(y)$.
   Soit $y \in \mathbb{R}_*^+$. Résolvons l'équation $y = \varphi(x)$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} y = \varphi(x) &\iff y = \ln(1 + e^x) \\ &\iff e^y = 1 + e^x && \text{bijectivité de exp sur } \mathbb{R} \\ &\iff e^x = e^y - 1 \\ &\iff x = \ln(e^y - 1) && y > 0, \text{ donc } e^y > 1 \text{ et donc } e^y - 1 > 0 \text{ et bijectivité de ln sur } \mathbb{R}_*^+ \end{aligned}$$

   Conclusion : $\forall y \in \mathbb{R}_*^+,\ \varphi(y) = \ln(e^y - 1)$.

> **★Subtil...★**
> Il est attendu ce qui a été fait dans ces deux questions. En revanche, démontrer que pour tout $y \in J$, l'équation $y = g(x)$ d'inconnue $x \in I$, possède une unique solution permet de démontrer que g est bijective de I dans J. Méthode qui fait gagner du temps quand la question est "Démontrer que g est bijective de I dans J et déterminer l'expression de g^{-1}.

On considère la variable aléatoire réelle Y définie par : $Y = \varphi(X)$.

7. Justifier : $\mathbb{P}\big([Y \leqslant 0]\big) = 0$.
   D'après la densité donnée pour X, on considère $X(\Omega) = \mathbb{R}$. D'où :

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= \varphi\big(X(\Omega)\big) \\ &= \varphi(\mathbb{R}) \\ &= \mathbb{R}_*^+ && \text{question 5} \end{aligned}$$

   Par conséquent $[Y \leqslant 0] = \varnothing$.

   Conclusion : $\mathbb{P}\big([Y \leqslant 0]\big) = 0$.

> **Petite remarque**
> On peut se contenter ici de dire que, puisque φ est à valeurs dans $\mathbb{R}_*^+$, la variable aléatoire $\varphi(X)$ également, d'où le résultat.

8. Déterminer la fonction de répartition de Y.
   Notons F_Y la fonction de répartition de Y. Soit $x \in \mathbb{R}$.

   - Si $x \leqslant 0$:

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}\big([Y \leqslant x]\big) \\ &= \mathbb{P}(\varnothing) && x \leqslant 0 \text{ et } Y(\Omega) = \mathbb{R}_*^+, \text{ donc } [Y \leqslant x] = \varnothing \\ &= 0 \end{aligned}$$

   - Si $x > 0$:

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}\big([Y \leqslant x]\big) \\ &= \mathbb{P}\big([\varphi(X) \leqslant x]\big) \\ &= \mathbb{P}\big([X \leqslant \varphi^{-1}(x)]\big) && \varphi^{-1} \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_*^+ \text{ et } x > 0 \\ &= F\big(\varphi^{-1}(x)\big) \\ &= \frac{1}{1 + e^{-\ln(e^x - 1)}} && \text{questions 3 et 6} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1}{e^x - 1}} \\ &= \frac{e^x - 1}{e^x} \end{aligned}$$

   Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

9. Reconnaître alors la loi de Y et donner, sans calcul, son espérance et sa variance.
   On reconnaît, dans la question précédente, la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1. Or la fonction de répartition caractérise la loi...

   Conclusion : Y suit la loi exponentielle de paramètre 1 et ainsi, $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{V}(Y) = 1$.

PARTIE III : ÉTUDE D'UNE CONVERGENCE EN LOI

On considère une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, mutuellement indépendantes, de même densité f, où f a été définie dans la partie I.
On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $T_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ et $U_n = T_n - \ln(n)$.

10. 10.a. Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction de répartition de T_n.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note F_n la fonction de répartition de T_n.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \mathbb{P}\big([T_n \leqslant x]\big) \\ &= \mathbb{P}\big([\max(X_1, \dots, X_n) \leqslant x]\big) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k \leqslant x]\right) \\ &= F(x)^n \\ &= \frac{1}{(1+\mathrm{e}^{-x})^n} \end{aligned}$$

$X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et de même loi que X

question 3

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ F_n(x) = \dfrac{1}{(1+\mathrm{e}^{-x})^n}$.

10.b. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \mathbb{P}\big([U_n \leqslant x]\big) = \left(1 + \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)^{-n}$.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big([U_n \leqslant x]\big) &= \mathbb{P}\big([T_n \leqslant x + \ln(n)]\big) \\ &= \frac{1}{(1+\mathrm{e}^{-(x+\ln(n))})^n} \\ &= \frac{1}{\left(1+\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{\ln(n)}}\right)^n} \\ &= \frac{1}{\left(1+\frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)^n} \end{aligned}$$

question précédente

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \mathbb{P}\big([U_n \leqslant x]\big) = \left(1 + \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)^{-n}$.

11. En déduire que la suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle à densité dont on précisera la fonction de répartition et une densité.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, F_{U_n} la fonction de répartition de U_n.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} F_{U_n}(x) &= \left(1 + \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)^{-n} \\ &= \exp\left(-n \ln\left(1 + \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

Or :

✓ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n} = 0$

✓ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n} \neq 0$

Donc :

$$\ln\left(1 + \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}$$

D'où $-n \ln\left(1 + \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\mathrm{e}^{-x}$ puis :

$$\lim_{n\to+\infty} -n \ln\left(1 + \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right) = -\mathrm{e}^{-x}$$

Ainsi, par composition :

$$\lim_{n\to+\infty} \exp\left(-n \ln\left(1 + \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)\right) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}, \ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} F_{U_n}(x) = G(x)$, où $G : x \longmapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}$.

✘ Attention !
A ce stade, puisqu'on ne sait pas si G est une fonction de répartition, nous ne pouvons pas encore affirmer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi.

- Montrons que G est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.
  - ✓ $\lim\limits_{x\to-\infty} -e^{-x} = -\infty$, donc par composition :
  $$\lim_{x\to-\infty} e^{-e^{-x}} = 0$$
  de même :
  $$\lim_{x\to+\infty} e^{-e^{-x}} = 1$$
  - ✓ La fonction G est continue sur $\mathbb{R}$, comme composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
  - ✓ De même, G est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
  - ✓ Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
  $$G'(x) = e^{-x}e^{-e^{-x}} > 0$$
  Par conséquent, G est (strictement) croissante sur $\mathbb{R}$.

  La fonction G est donc la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité, admettant pour densité la fonction $g : x \longmapsto e^{-x}e^{-e^{-x}}$.

Petite remarque

"$\mathscr{C}^1$ sauf éventuellement en un nombre fini de points" suffit.

Conclusion : la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité Z dont la fonction de répartition est $G : x \longmapsto e^{-e^{-x}}$ et une densité est $g : x \longmapsto e^{-x}e^{-e^{-x}}$.

★ Classique ! ★

C'est une loi classique : la loi de Gumbel.