Devoir surveillé 1

Lundi 23 septembre 2024 - 2h00

Consignes à lire !

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :

- ***la copie doit être prise de sorte que la marge se situe à droite de chaque page,***
- ***la première page de la copie doit rester vierge et sera réservée aux appréciations,***
- ***toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,***
- ***les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),***
- ***les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.***

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Les arguments / éléments qu'il ne fallait pas oublier...
Les arguments / éléments non notés mais qui font tellement plaisir...

✘ Attention !
Les éléments surlignées ne sont pas les seuls éléments de barème ! Ils sont simplement ceux qui ont souvent été oubliés...

Exercice 1

Question de cours. Définition de suites équivalentes au voisinage de $+\infty$.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n + n^2} \end{cases}$$

1. Écrire une fonction **Python** telle que l'exécution de **suite_u(n)** renvoie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de u_n.
   Proposition :

```python
def suite_u(n):
    u=1
    for k in range(1,n+1): #k=rg du terme calculé
        u=1/(u+(k-1)**2)
    return u
```

2. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et à termes strictement positifs.
   Démontrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 0$.
   - **Initialisation.** Pour $n = 0$:
     u_0 existe et $u_0 = 1$, donc $u_0 > 0$.
     L'initialisation est vérifiée.
   - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que "u_n existe et $u_n > 0$" et montrons que "u_{n+1} existe et $u_{n+1} > 0$".
     Par hypothèse de récurrence, u_n existe et $u_n > 0$, donc, puisque $n^2 \geqslant 0$:
     $$u_n + n^2 > 0$$
     - ⋆ En particulier, $u_n + n^2 \neq 0$, donc u_{n+1} existe.
     - ⋆ Et aussi :
     $$\frac{1}{u_n + n^2} > 0$$
     Autrement dit :
     $$u_{n+1} > 0$$
     L'hérédité est ainsi établie.

Important !
On démontre par récurrence sur n une propriété qui doit dépendre de cet entier n. La phrase "$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et à termes strictement positifs" ne dépend d'aucun entier n... Il faut donc la reformuler !

Petite remarque
A quoi sert l'argument de décroissance de la fonction inverse ici ? A RIEN !

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 0$.
Autrement dit, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et à termes strictement positifs.

3. Établir que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, puisque $u_n > 0$:
   $$u_n + n^2 > n^2$$
   Ainsi, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_*^+$ (licite car $n^2 > 0$ et $u_n + n^2 > 0$) :
   $$\frac{1}{u_n + n^2} < \frac{1}{n^2}$$
   On a ainsi :
   ✓ $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < u_n < \dfrac{1}{n^2}$
   ✓ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$.
   Ainsi, par théorème d'encadrement :
   $$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = 0$$

✘ Attention !
On prend $n \in \mathbb{N}^*$ pour avoir $n^2 > 0$...

Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

4. Démontrer : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$.
   Pour $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a :
   $$\begin{aligned} \frac{u_n}{\frac{1}{n^2}} &= n^2 u_n \\ &= \frac{n^2}{u_{n-1} + (n-1)^2} \\ &= \frac{1}{\frac{u_{n-1}}{n^2} + \frac{(n-1)^2}{n^2}} \end{aligned}$$
   Or :

✘ Attention !
Et oui, $u_n = \dfrac{1}{u_{n-1} + (n-1)^2}$...
Il suffit de remplacer n par $n-1$ hein...

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n-1} = 0$,
- $\dfrac{(n-1)^2}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^2}{n^2} = 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n-1)^2}{n^2} = 1$.

D'où, par opérations :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{u_{n-1}}{n^2}+1}$$

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{\frac{1}{n^2}} = 1$, autrement dit $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$.

✘ Attention !

Obtenir $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ ne permet pas de conclure directement que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$: cela donne l'impression que $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$, ce qui n'est pas toujours le cas (prendre $u_n = e^n$ ou $u_n = \dfrac{1}{2^n}$ par exemple...).

5. Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

On a :

✓ d'après la question précédente : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$,

✓ d'après la question 2 : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n > 0,\ \dfrac{1}{n^2} > 0$

✓ la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $2 > 1$, donc elle est convergente.

Conclusion : par critère de comparaison (par équivalence) sur les séries à termes généraux positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est convergente, donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ également.

6. 6.a. Démontrer : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3\left(u_n - \dfrac{1}{n^2}\right) = 2$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a :

$$\begin{aligned}
n^3\left(u_n - \frac{1}{n^2}\right) &= n^3\left(\frac{1}{u_{n-1}+(n-1)^2} - \frac{1}{n^2}\right)\\
&= n^3\frac{n^2-u_{n-1}-(n-1)^2}{n^2\left((n-1)^2+u_{n-1}\right)}\\
&= n^3\frac{2n-1-u_{n-1}}{n^2\left((n-1)^2+u_{n-1}\right)}\\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \underbrace{n^3\frac{2n}{n^4}}_{=2}
\end{aligned}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n-1} = 0$, donc $2n-1-u_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n$ et $(n-1)^2+u_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} (n-1)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3\left(u_n - \dfrac{1}{n^2}\right) = 2$.

6.b. En déduire :

$$u_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

➠Réflexe !

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell \iff v_n = \ell + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$

D'après la question précédente :

$$n^3\left(u_n - \frac{1}{n^2}\right) = 2 + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$$

D'où :

$$u_n - \frac{1}{n^2} = \frac{2}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Conclusion : $u_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.

Exercice 2

Question de cours. Définition de l'indépendance de deux variables aléatoires discrètes.

On dispose d'une pièce de monnaie donnant PILE avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et FACE avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

Partie I. Étude d'une première variable aléatoire

On effectue une succession de lancers avec cette pièce et on définit la variable aléatoire X prenant la valeur du nombre de FACE obtenues avant l'obtention du deuxième PILE.
On note, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

- P_k l'évènement : "obtenir PILE au lancer k"
- F_K l'évènement : "obtenir FACE au lancer k"

1. 1.a. Décrire les évènements $[X = 0]$ et $[X = 1]$ puis calculer leurs probabilités.

Important !
Cette étape sert à traduire l'évènement étudié : son but est de décrire le(s) déroulé(s) complet(s) de l'expérience qui donne(nt) cet évènement. On n'est pas là pour blablater inutilement...

- $[X = 0]$ est réalisé si, et seulement si, on obtient aucun FACE avant l'apparition du second PILE
  si, et seulement si, les lancers 1 et 2 donnent tous deux PILE

  Ainsi :
  $$[X = 0] = P_1 \cap P_2$$

  ✍ Rédaction
  On veut voir cette égalité !

  D'où :
  $$\begin{aligned} \mathbb{P}\big([X = 0]\big) &= \mathbb{P}(P_1 \cap P_2) \\ &= \mathbb{P}(P_1) \times \mathbb{P}(P_2) \quad \text{indépendance des lancers} \\ &= \frac{4}{9} \end{aligned}$$

- De même :
  $$[X = 1] = (F_1 \cap P_2 \cap P_2) \cup (P_1 \cap F_2 \cap P_3)$$

  ✍ Rédaction
  On veut voir cette égalité !

  D'où :
  $$\begin{aligned} \mathbb{P}\big([X = 1]\big) &= \mathbb{P}\big((F_1 \cap P_2 \cap P_2) \cup (P_1 \cap F_2 \cap P_3)\big) \quad F_1 \cap P_2 \cap P_2 \text{ et } P_1 \cap F_2 \cap P_3 \text{ sont incompatibles (car } P_1 \text{ et } F_1 \\ &= \mathbb{P}(F_1 \cap P_2 \cap P_2) + \mathbb{P}(P_1 \cap F_2 \cap P_3) \quad \text{indépendance des lancers} \\ &= \frac{4}{27} + \frac{4}{27} \\ &= \frac{8}{27} \end{aligned}$$

  ✓ Rigueur !
  - "incompatibilité" → de qui ? ?
  - "indépendance" → de qui ? ?

1.b. Donner $X(\Omega)$ puis démontrer : $\forall n \in X(\Omega),\ \mathbb{P}\big([X = n]\big) = (n + 1)\frac{4}{3^{n+2}}$.

♣ Méthode !
Ici, on disait "donner", la démonstration n'était donc pas attendue. On s'imprègne bien de la méthode...

- Justifions que $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

  $\boxed{\subset}$ X prend comme valeur le nombre de FACE avant l'obtention du deuxième PILE, donc X est à valeurs dans $\mathbb{N}$.
  D'où :
  $$X(\Omega) \subset \mathbb{N}$$

  $\boxed{\supset}$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $n \in X(\Omega)$. Autrement dit, montrons que $[X = n] \neq \varnothing$.
  L'issue consistant à obtenir n FACE puis deux PILE consécutifs (puis ensuite que des PILE) réalise l'évènement $[X = n]$. Ainsi, cet évènement est non vide.
  D'où :
  $$\mathbb{N} \subset X(\Omega)$$

  Conclusion : $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.
  $[X = n]$ est réalisé si, et seulement si, on obtient n FACE avant l'apparition du second PILE
  si, et seulement si, le tirage fournit n FACE et 2 PILE, dont un en $(n+2)$-ième position (et l'autre peut se situer à toutes les places possibles entre 1 et $n + 1$)

Ainsi :

$$[X=n] = \bigcup_{k=1}^{n+1} \left(P_k \cap \left(\bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n+1} F_i \right) \cap P_{n+2} \right)$$

Petite remarque

Il n'est pas nécessaire de l'écrire sous cette forme... On se contente très bien de :
$[X=n] = (P_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_{n+1} \cap P_{n+2})$
$\cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \ldots \cap F_{n+1} \cap P_{n+2})$
$\cup (F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_n \cap P_{n+1} \cap P_{n+2})$.

Par incompatibilité des évènements de la famille $\left(P_k \cap \left(\bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n+1} F_i \right) \cap P_{n+2} \right)_{k \in [\![1;n+1]\!]}$, on obtient :

✓ Rigueur !

Incompatibilité : de qui ?!
On insiste sur la rigueur de la rédaction au début (comme dans 1.c.) pour se dispenser d'avoir à trop en écrire dans d'autres cas plus lourds à écrire...

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X=n]) &= \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}\left(P_k \cap \left(\bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n+1} F_i \right) \cap P_{n+2} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^n \\
&= (n+1) \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^n \\
&= (n+1) \frac{4}{3^{n+2}}
\end{aligned}$$

par indépendance des lancers, donc indépendance mutuelle des P_k et F_k

Explication

Pour réaliser $[X=n]$, on doit obtenir une issue apportant n FACE et 2 PILE, issue dont la probabilité d'apparition est $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^n$; et il y a autant d'issues possibles que de places possibles pour le premier PILE, soit $n+1$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X=n]) = (n+1)\frac{4}{3^{n+2}}$.

2. Écrire une fonction **Python** d'en-tête **simulX()** qui simule l'expérience et renvoie une réalisation de X.
Donnons plusieurs réponses possibles :

```python
import numpy.random as rd

def simulX():
    n=0 #nb de FACE avant 2ème PILE
    while rd.random()<1/3:
        n=n+1
    while rd.random()<1/3:
        n=n+1
    return n

def simulXbis():
    nF=0
    nP=0
    while nP<2:
        if rd.random()<1/3:
            nF=nF+1
        nP=nP+1
    return nF

def simulXter():
    n=0
    for k in range(2):
        while rd.random()<1/3:
            n=n+1
    return n
```

Partie II. Étude d'une expérience en deux étapes

On effectue une succession de lancers avec la pièce précédente jusqu'à l'obtention du deuxième PILE ; puis si n FACE ont été obtenues, on place $n+1$ boules dans une urne, les boules étant numérotées de 0 à n et indiscernables au toucher, et enfin on pioche au hasard une boule dans cette urne. On note toujours X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de FACE obtenus, et on note U la variable aléatoire prenant la valeur du numéro de la boule obtenue. On pose $V = X - U$.

3. 3.a. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire U.
Justifions, par double inclusion, que $U(\Omega) = \mathbb{N}$.

$\boxed{\subset}$ U prend comme valeurs le numéro d'une boule qui est un entier positif.
D'où :

$$U(\Omega) \subset \mathbb{N}$$

Erreur classique !

Attention $\cancel{U(\Omega) = [\![0;n]\!]}$. Ca n'a aucun sens : U ne dépend d'aucun n, puisque l'expérience totale ne dépend d'aucun n...

$\boxed{\supset}$ Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrons que $k \in U(\Omega)$; autrement dit, montrons que $[U = k] \neq \varnothing$.
L'issue consistant à :

* obtenir k FACE puis 2 PILE consécutifs,
* piocher la boule numérotée k dans l'urne qui est alors composée de $k + 1$ boules numérotées de 0 à k,

réalise l'évènement $[U = k]$. Par conséquent : $[U = k] \neq \varnothing$. D'où :

$$\mathbb{N} \subset U(\Omega)$$

✓ Rigueur !
On veut une seule issue. Et une issue est entièrement définie par ce qui s'est passé depuis le début de l'expérience !

> **Conclusion :** $U(\Omega) = \mathbb{N}$.

3.b. Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de U sachant $[X = n]$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons l'évènement $[X = n]$ réalisé ; autrement dit, n FACE ont été obtenues avant le second PILE.
Dans ce cas, on pioche une boule dans une urne composée de $n + 1$ boules numérotées de 0 à n.
Soit $k \in \mathbb{N}$.

➠Réflexe !
On reformule en fonction du contexte !

✗ Attention !
Puisque $U(\Omega) = \mathbb{N}$, il faut donner $\mathbb{P}_{[X=n]}([U = k])$ pour tout $k \in \mathbb{N}$...

* si $k > n$:
Il est alors impossible de piocher une boule numéro k, car les boules sont numérotées de 0 à n seulement ; donc :
$$\mathbb{P}_{[X=n]}\big([U = k]\big) = 0$$
* si $k \leqslant n$:
L'évènement $[U = k]$ est alors réalisé si, et seulement si, on pioche l'unique boule numérotée k dans l'urne composée de $n + 1$ boules...
Par équiprobabilité du choix des boules dans l'urne, on a :
$$\mathbb{P}_{[X=n]}\big([U = k]\big) = \frac{1}{n + 1}$$

> **Conclusion :**
> $$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}_{[X=n]}\big([U = k]\big) = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} & \text{si } k \in [\![0; n]\!] \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$
> Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de U sachant l'évènement $[X = n]$ est la loi uniforme sur $[\![0; n]\!]$.

Petite remarque
C'est donc cette loi conditionnelle qui est associée à un ensemble-image égal à $[\![0; n]\!]$.
Attention : il n'existe pas de notation pour désigner la loi conditionnelle de U sachant l'évènement $[X = n]$.

3.c. En utilisant la fonction **`simulX()`** de la partie précédente, écrire une fonction **`Python`** d'en-tête **`simulU()`** qui renvoie une réalisation de U.

D'après la question précédente :

```python
def simulU():
    n=simulX()
    U=rd.randint(0,n+1)
    return U
```

3.d. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\big([U = k]\big) = \dfrac{2}{3^{k+1}}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$.D'après la formule des probabilités totales, avec $\big([X = n]\big)_{n \in \mathbb{N}}$ comme système complet d'évènements, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \mathbb{P}\big([X = n] \cap [U = k]\big)$ est convergente et :

➠Réflexe !
Une loi conditionnelle pour obtenir la loi : FPT !!

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([U = k]\big) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X = n] \cap [U = k]\big) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X = n]\big)\mathbb{P}_{[X=n]}\big([U = k]\big) && \forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X = n]) \neq 0 \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X = n]\big)\mathbb{P}_{[X=n]}\big([U = k]\big) && \text{d'après la question précédente : } \forall n < k,\ \mathbb{P}_{[X=n]}([U = k]) = 0 \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} (n + 1)\frac{4}{3^{n+2}}\,\frac{1}{n + 1} && \text{question précédente, licite car } k \in [\![0; n]\!] \text{ et question 1.b} \\
&= \frac{4}{3^2}\sum_{n=k}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \\
&= \frac{4}{3^2}\sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{i+k} && \text{décalage d'indice } i = n - k
\end{aligned}$$

$$= \frac{4}{3^{k+2}} \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^i$$
$$= \frac{4}{3^{k+2}} \frac{1}{1-\frac{1}{3}}$$
$$= \frac{4}{3^{k+2}} \frac{3}{2}$$
$$= \frac{2}{3^{k+1}}$$

Conclusion : $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([U=k]\big) = \dfrac{2}{3^{k+1}}$.

3.e. Montrer que U admet une espérance et une variance et les calculer.

- Espérance.
  - ⋆ On sait que :

U admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum\limits_{k\in U(\Omega)} n\mathbb{P}\big([U=k]\big)$ est absolument convergente
si, et seulement si, la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} k\mathbb{P}\big([U=k]\big)$ est convergente, car il s'agit d'une série à terme général positif

  - ⋆ Soit $N \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$. On a :

$$\sum_{k=0}^{N} k\mathbb{P}\big([U=k]\big) = \sum_{k=0}^{N} k\frac{2}{3^{k+1}}$$
$$= \frac{2}{3^2}\sum_{k=0}^{n} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$

Rédaction
On travaille sur la somme partielle ! L'idée est d'avoir une rédaction constante qui fonctionne dans le plus grand nombre de cas (tous ?) : si on doit faire un télescopage ou un changement d'indice, on pourra le faire sur la somme partielle (ne sera pas possible si on travaille sur la série ou seulement son terme général).

Or $\frac{1}{3} \in]-1;1[$, donc la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$ est une série géométrique convergente.
Par conséquent, la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} k\mathbb{P}\big([U=k]\big)$ est convergente.

  - ⋆ On en déduit que U admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(U) = \frac{2}{3^2}\sum_{k=0}^{+\infty} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$
$$= \frac{2}{3^2}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}$$
$$= \frac{2}{3^2}\frac{3^2}{2^2}$$
$$= \frac{1}{2}$$

Conclusion : U admet une espérance et $\mathbb{E}(U) = \dfrac{1}{2}$.

- Variance.
  - ⋆ Par théorème de transfert :

U admet un moment d'ordre 2 si, et seulement si, la série $\sum\limits_{k\in U(\Omega)} k^2\mathbb{P}\big([U=k]\big)$ est absolument convergente
si, et seulement si, la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} k^2\mathbb{P}\big([U=k]\big)$ est convergente, car il s'agit d'une série à terme général positif

  - ⋆ Soit $N \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$. On a :

$$\sum_{k=0}^{N} k^2\mathbb{P}\big([U=k]\big) = \sum_{k=0}^{N} k^2\frac{2}{3^{k+1}}$$
$$= \sum_{k=0}^{N} \big(k(k-1)+k\big)\frac{2}{3^{k+1}}$$

$$= \frac{2}{3^3}\sum_{k=0}^{N} k(k-1)\left(\frac{1}{3}^{k-2}\right) + \sum_{k=0}^{N} k\frac{2}{3^{k+1}}$$

Or :

◇ d'après ce qui précède, la série $\sum_{k\geqslant 0} k\frac{2}{3^{k+1}}$ est convergente de somme égale à $\frac{1}{2}$;

◇ $\frac{1}{3} \in]-1;1[$, donc la série $\sum_{k\geqslant 0} k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}$ est une série géométrique convergente.

Par conséquent, la série $\sum_{k\geqslant 0} k^2\mathbb{P}([U=k])$ est convergente.

⋆ On en déduit que U admet un moment d'ordre 2 et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(U^2) &= \frac{2}{3^3}\sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)\left(\frac{1}{3}^{k-2}\right) + \frac{1}{2}\\
&= \frac{2}{3^3}\frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3} + \frac{1}{2}\\
&= \frac{2}{3^3}\frac{2\times 3^3}{2^3} + \frac{1}{2}\\
&= 1
\end{aligned}$$

⋆ Ainsi, d'après la formule de Koenig-Huygens, U admet une variance et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(U) &= \mathbb{E}(U^2) - \left(\mathbb{E}(U)\right)^2\\
&= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Conclusion : U admet une variance et $\mathbb{V}(U) = \frac{3}{4}$.

Petite remarque
On peut également remarquer que la variable aléatoire $U+1$ suit la loi géométrique de paramètre $\frac{2}{3}$, ce qui réduit considérablement le travail sur cette question...

Petite remarque
L'énoncé initial guidait autrement. Je fais le choix de ne pas guider ici, en attendant donc la méthode mise en place ci-dessous.

4. Déterminer la loi de V.

- On sait que X et U sont à valeurs entières, donc V également. Aussi :

$$\forall \omega \in \Omega,\ \ U(\omega) \leqslant X(\omega)$$

D'où :

$$\forall \omega \in \Omega,\ \ V(\omega) \geqslant 0$$

D'où :

$$\mathbb{V}(\Omega) \subset \mathbb{N}$$

Petite remarque
On a même, comme en question 3.a : $V(\Omega) = \mathbb{N}$.

- Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après la formule des probabilités totales, avec $\left([U=n]\right)_{n\in\mathbb{N}}$ comme système complet d'évènements, la série $\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}\left([U=n]\cap[V=k]\right)$ est convergente et :

➠Réflexe !
On veut la loi d'une somme/différence de VA discrètes : FPT !

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left([V=k]\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left([U=n]\cap[V=k]\right)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left([U=n]\cap[X-U=k]\right)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left([U=n]\cap[U=n+k]\right)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left([X=n+k]\right)\mathbb{P}_{[X=n+k]}\left([U=n]\right)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+k+1)\frac{4}{3^{n+k+2}}\frac{1}{n+k+1}\\
&= \frac{4}{3^{k+2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n\\
&= \frac{4}{3^{k+2}}\frac{1}{1-\frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\left([X=n=+k]\right) \neq 0$

pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $k \in [\![0;n+k]\!]$, donc d'après 3.b : $\mathbb{P}_{[X=n+k]}\left([U=n]\right) = \frac{1}{n+k+1}$

$$= \frac{2}{3^{k+1}}$$

Petite remarque
On pouvait également travailler avec le sce $\left([X = n]\right)_{n\in N}$, mais les calculs sont un peu plus compliqués (comme en question 3.d).

Conclusion : $V(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\left([V = k]\right) = \frac{2}{3^{k+1}}$.

Petite remarque
On retrouve la même loi que U...

5. Montrer que les variables aléatoires U et V sont indépendantes.
Montrons :

$$\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}\left([U = k] \cap [V = n]\right) = \mathbb{P}\left([U = k]\right)\mathbb{P}\left([V = n]\right)$$

Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^2$.
On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left([U = k] \cap [V = n]\right) &= \mathbb{P}\left([U = k] \cap [X - U = n]\right) \\
&= \mathbb{P}\left([U = k] \cap [X = n + k]\right) \\
&= \mathbb{P}\left([X = n + k]\right)\mathbb{P}_{[X=n+k]}\left([U = k]\right) && \mathbb{P}\left([X = n + k]\right) \neq 0 \\
&= (n + k + 1)\frac{4}{3^{n+k+2}}\,\frac{1}{n + k + 1} && \text{questions 1.c et 3.b, licite car } k \in [\![0; n + k]\!] \\
&= \frac{4}{3^{n+k+2}} \\
&= \frac{2}{3^{k+1}} \times \frac{2}{3^{n+1}} \\
&= \mathbb{P}\left([U = k]\right)\mathbb{P}\left([V = n]\right)
\end{aligned}$$

Conclusion : les variables aléatoires U et V sont indépendantes.

6. En déduire $\mathbb{V}(X)$ ainsi que $\mathrm{Cov}(X, U)$.
- Puisque $V = X - U$, on a $X = U + V$. Ainsi, X est la somme de deux variables aléatoires admettant une variance ; par conséquent, X admet également une variance et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{V}(U + V) \\
&= \mathbb{V}(U) + \mathbb{V}(V) && U \text{ et } V \text{ sont indépendantes} \\
&= \frac{3}{2} && U \text{ et } V \text{ ont même loi, et question 3.e}
\end{aligned}$$

- Enfin, puisque U et X admettent une variance, $\mathrm{Cov}(X, U)$ existe et :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X, U) &= \mathrm{Cov}(U + V, U) \\
&= \mathrm{Cov}(U, U) + \mathrm{Cov}(V, U) && \text{linéarité à gauche de la covariance} \\
&= \mathbb{V}(U) + 0 && U \text{ et } V \text{ sont indépendantes} \\
&= \frac{3}{4} && \text{question 3.e}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{V}(X) = \frac{3}{2}$ et $\mathrm{Cov}(X, U) = \frac{3}{4}$.

Partie III. Étude d'un jeu

Deux joueurs, A et B, décident de s'affronter dans un jeu de hasard.

- Le joueur A lance la pièce donnant PILE avec la probabilité $\frac{2}{3}$ jusqu'à l'apparition du second PILE. On note X_A la variable aléatoire égale au nombre de FACE alors obtenues. La variable aléatoire X_A a ainsi la même loi que la variable aléatoire X de la partie I.
- Le joueur B lance une pièce donnant PILE avec la probabilité p ($p \in]0; 1[$) jusqu'à l'apparition du premier PILE. On note X_B la variable aléatoire égale au nombre de FACE alors obtenues.

Dans ces conditions de jeu, les variables aléatoires X_A et X_B sont indépendantes. Le gagnant est celui ayant obtenu le moins de FACE. En cas d'égalité, aucun des deux joueurs ne gagne : il y a match nul.
On note :

- $q = 1 - p$,
- G l'événement "A gagne",
- H l'événement "B gagne",
- N l'évènement "il y a match nul".

On admet que le jeu se termine presque-sûrement.

7. **Loi de X_B.** On note Y_B le nombre de lancers effectués par le joueur B.

7.a. Reconnaître la loi de Y_B. Préciser $Y_B(\Omega)$, $\mathbb{P}\big([Y_B = k]\big)$ pour tout $k \in Y_B(\Omega)$, puis rappeler son espérance et sa variance.

- **Expérience :** pour le joueur B, l'expérience consiste en une infinité de répétitions indépendantes de la même épreuve de Bernoulli dont le succès "obtenir PILE" est de probabilité p.
- **Variable aléatoire :** Y_B prend alors comme valeur le rang de ce premier succès.

Important ! On identifie clairement l'expérience et ce que fait la variable aléatoire !

Conclusion : $Y_B \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$
$Y_B(\Omega) = \mathbb{N}^*$; $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([Y_B = n]\big) = q^{n-1}p$
$\mathbb{E}(Y_B) = \dfrac{1}{p}$; $\mathbb{V}(Y_B) = \dfrac{q}{p^2}$

7.b. En déduire la loi de X_B ainsi que son espérance et sa variance.
X_B renvoie le nombre de FACE obtenues avant le premier PILE ; donc :

$$X_B = Y_B - 1$$

On en déduit :

- $X_B(\Omega) = \mathbb{N}$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([X_B = k]\big) &= \mathbb{P}\big([Y_B - 1 = k]\big)\\ &= \mathbb{P}\big([Y_B = k+1]\big)\\ &= q^k p \qquad k+1 \in Y(\Omega)\end{aligned}$$

- Puisque Y_B possède une espérance et une variance, et que X_B est une transformée affine de Y_B, on en déduit que X_B possède également une espérance et une variance et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_B) &= \mathbb{E}(Y_B - 1)\\ &= \mathbb{E}(Y_B) - 1 \qquad \text{linéarité de l'espérance}\\ &= \frac{1-p}{p}\\ &= \frac{q}{p}\end{aligned}$$

ainsi que :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X_B) &= \mathbb{V}(Y_B - 1)\\ &= \mathbb{V}(Y_B)\\ &= \frac{q}{p^2}\end{aligned}$$

☞ Rappel... $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$

Conclusion : $X_B(\Omega) = \mathbb{N}$; $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([X_B = k]\big) = q^k p$
$\mathbb{E}(X_B) = \dfrac{q}{p}$; $\mathbb{V}(X_B) = \dfrac{q}{p^2}$.

7.c. On note E l'évènement "le joueur B obtient un nombre pair de FACE". Calculer $\mathbb{P}(E)$.
On a :

l'évènement E est réalisé	si, et seulement si,	le joueur B obtient un nombre pair de FACE
	si, et seulement si,	le joueur B obtient 0 FACE ou 2 FACE ou 4 FACE ou ...

Part conséquent :

$$E = \bigcup_{k=0}^{+\infty} [X_B = 2k]$$

Important ! Il faut savoir écrire sans erreur cet évènement...

Or, la famille $\big([X_B = 2k]\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est constituée d'évènements deux à deux incompatibles, d'où :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_B = 2k]\big)\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} q^{2k}p\\ &= p\sum_{k=0}^{+\infty} \left(q^2\right)^k \qquad p \neq 0, \text{ donc } q \neq 1\\ &= p\,\frac{1}{1-q^2}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{p}{(1-q)(1+q)} && \text{car } p = 1-q \\
&= \frac{1}{1+q}
\end{aligned}
$$

Conclusion : $\mathbb{P}(E) = \dfrac{1}{1+q}$.

8. **Le jeu.** L'objectif de cette question est d'étudier le jeu en question.

8.a. **Simulation informatique.**

8.a.i. Recopier et compléter les lignes manquantes de la fonction ci-dessous de sorte que les variables locales **pG,pH,pN** contiennent respectivement des valeurs approchées de $\mathbb{P}(G)$, $\mathbb{P}(H)$, $\mathbb{P}(N)$.

```
def probas(p):
    nG,nH,nN=0,0,0
    for k in range(10000):
        XA=mystere()
        XB = ......
        if ......
            nG=nG+1
        elif ......
            ......
        else:
            ......
    pG,pH,pN = ......
    return pG,pH,pN
```

Le voici, complet :

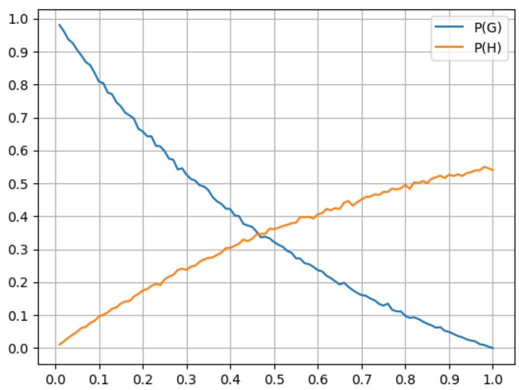
```
import numpy.random as rd

def probas(p):
    nG,nH,nN=0,0,0
    for k in range(10000):
        XA=mystere()
        XB=rd.geometric()-1
        if XA<XB:
            nG=nG+1
        elif XA>XB:
            nH=nH+1
        else:
            nN=nN+1
    pG,pH,pN=nG/10000,nH/10000,nN/10000
    return pG,pH,pN
```

Petite remarque

Le résultat est basé sur la loi faible des grands nombres (que nous verrons en fin d'année) qui affirme que, pour un grand nombre de répétitions, la fréquence observée s'approche de la probabilité.

8.a.ii. L'exécution de la commande `probas(0.66)` renvoie : `(0.1911, 0.4344, 0.3745)`. Interpréter ces valeurs dans le contexte de l'exercice.
Quand $p = 0,66$, on a : $\mathbb{P}(G) \simeq 0,2$; $\mathbb{P}(H) \simeq 0,43$ et $\mathbb{P}(N) \simeq 0,37$.

8.a.iii. Cette fonction nous permet de tracer, en fonction de p, une estimation de $\mathbb{P}(G)$ et $\mathbb{P}(H)$. On obtient le graphique suivant :



Interpréter, dans le contexte de l'exercice, l'abscisse du point d'intersection entre ces deux courbes.
Le point d'intersection correspond à une équité du jeu. Autrement dit, les joueurs A et B semblent avoir à peu près la même probabilité de victoire lorsque $p \simeq 0,47$.

8.b. Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([X_B > n]\big) = q^{n+1}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Puisque $X_B(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on a :

$$[X_B > n] = \bigcup_{k=n+1}^{+\infty} [X_B = k]$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([X_B > n]\big) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n+1}^{+\infty} [X_B = k]\right) \\
&= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_B = k]\big) && \text{incompatibilité des évènements de } \big([X_B = k]\big)_{k\in\mathbb{N}^*} \\
&= \sum_{k=n+1}^{+\infty} q^k p && \text{question 7.b} \\
&= p \sum_{i=0}^{+\infty} q^{i+n+1} && \text{changement d'indice } i = k-(n+1) \\
&= pq^{n+1} \sum_{i=0}^{+\infty} q^i \\
&= pq^{n+1} \frac{1}{1-q} && q \neq 1 \\
&= q^{n+1} && p = 1-q
\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([X_B > n]\big) = q^{n+1}$.

Méthode !

On peut procéder autrement en travaillant sur l'évènement $[X_B > n]$...

L'évènement $[X_B > n]$ est réalisé si, et seulement si, le joueur B effectue plus de n lancers pour obtenir le premier PILE ; si, et seulement si, les n premiers lancers ont tous donnés FACE.

D'où :

$$[X_B > n] = F_1 \cap \ldots \cap F_n$$

Et par indépendance des lancers, on obtient directement le résultat. Très pratique et plus court que la méthode calculatoire : y penser quand on a une expérience associée à une VA suivant une loi géométrique...

Petite remarque

On pouvait aussi démarrer de : $\mathbb{P}\big([X_B > n]\big) = 1 - \mathbb{P}\big([X_B \leqslant n]\big)$... Et on pense tout de même à l'argument $X_B(\Omega) = \mathbb{N}^*$ pour $[X_B \leqslant n] = \bigcup_{k=1}^{n} [X_B = k]$.

8.c. Justifier l'égalité $\mathbb{P}(G) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_A = n]\big)\mathbb{P}\big([X_B > n]\big)$. En déduire que $\mathbb{P}(G) = \dfrac{4q}{(3-q)^2}$.

- Remarquons déjà que :

$$G = [X_A < X_B]$$

Ensuite, d'après la formule des probabilités totales, avec $\big([X_A = n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ comme système complet d'évènements, la série $\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}\big([X_A = n] \cap [X_A < X_B]\big)$ est convergente et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([X_A < X_B]\big) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_A = n] \cap [X_A < X_B]\big) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_A = n] \cap [n < X_B]\big) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_A = n]\big)\mathbb{P}\big([X_B > n]\big) && X_A \text{ et } X_B \text{ sont indépendantes}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{P}(G) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_A = n]\big)\mathbb{P}\big([X_B > n]\big)$.

- Reprenons le calcul :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(G) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_A = n]\big)\mathbb{P}\big([X_B > n]\big) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\frac{4}{3^{n+2}} q^{n+1} && \text{questions 1.b et 8.b} \\
&= \frac{4q}{9} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\left(\frac{q}{3}\right)^n \\
&= \frac{4q}{9} \sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{q}{3}\right)^{k-1} && \text{changement d'indice } k = n+1 \\
&= \frac{4q}{9} \frac{1}{\left(1-\frac{q}{3}\right)^2} \\
&= \frac{4q}{(3-q)^2}
\end{aligned}$$

Petite remarque

On peut aussi justifier que

$$[X_A < X_B] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [X_A = n] \cap [X_B > n]$$

puis appliquer $\mathbb{P}$ sur cette union d'évènements deux à deux incompatibles... Mais le bon réflexe reste l'utilisation de la FPT, qui évite d'oublier l'argument que $X_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$ pour écrire l'union sur $\mathbb{N}^*$...

Conclusion : $\mathbb{P}(G) = \dfrac{4q}{(3-q)^2}$.

8.d. Déterminer $\mathbb{P}(N)$.

Remarquons déjà que :

$$N = [X_A = X_B]$$

Ensuite, d'après la formule des probabilités totales, avec $\big([X_A = n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ comme système complet d'évènements, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathbb{P}\big([X_A = n] \cap [X_A = X_B]\big)$ est convergente et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([X_A = X_B]\big) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_A = n] \cap [X_A = X_B]\big)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_A = n] \cap [X_B = n]\big)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_A = n]\big)\mathbb{P}\big([X_B = n]\big)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\frac{4}{3^{n+2}} q^n p\\
&= \frac{4p}{9}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\left(\frac{q}{3}\right)^n\\
&= \frac{4p}{9}\,\frac{1}{\left(1-\frac{q}{3}\right)^2}\\
&= \frac{4p}{(3-q)^2}
\end{aligned}$$

X_A et X_B sont indépendantes

questions 1.b et 7.b

calcul de la question précédente

Petite remarque

On peut aussi justifier que

$$[X_A = X_B] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [X_A = n] \cap [X_B = n]$$

puis appliquer $\mathbb{P}$ sur cette union d'évènements deux à deux incompatibles... Mais le bon réflexe reste l'utilisation de la FPT, qui évite d'oublier l'argument que $X_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$ pour écrire l'union sur $\mathbb{N}^*$...

Conclusion : $\mathbb{P}(N) = \dfrac{4p}{(3-q)^2}$.

★Subtil...★

(G, H, N) n'est pas un système complet d'évènement, car l'issue conduisant à aucun PILE pour le joueur B et pas de 2ème PILE (ou aucun PILE) pour le joueur A n'appartient à aucun de ces trois évènements...
En revanche, puisque le jeu a presque-sûrement une fin, on a bien $\mathbb{P}(G) + \mathbb{P}(H) + \mathbb{P}(N) = 1$: autrement dit, (G, H, N) est un système quasi-complet d'évènements. C'est une condition suffisante pour appliquer, par exemple, la FPT (même si elle n'est au programme qu'avec des SCE)...

8.e. En déduire la valeur de p à choisir pour que le jeu soit équitable.

Le jeu est équitable si, et seulement si, $\mathbb{P}(G) = \mathbb{P}(H)$.
Or (G, H, N) est un système quasi-complet d'évènements, d'où :

$$\mathbb{P}(H) = 1 - \mathbb{P}(G) - \mathbb{P}(N)$$

Par conséquent :

le jeu est équitable si, et seulement si, $\mathbb{P}(G) = 1 - \mathbb{P}(G) - \mathbb{P}(N)$
si, et seulement si, $2\mathbb{P}(G) + \mathbb{P}(N) = 1$

Or :

$$\begin{aligned}
2\mathbb{P}(G) + \mathbb{P}(N) = 1 &\iff \frac{8q+4p}{(3-q)^2} = 1\\
&\iff 4 + 4q = (3-q)^2\\
&\iff q^2 - 10q + 5 = 0\\
&\iff \left\{\begin{array}{l} q = 5 - 2\sqrt{5}\\ \text{ou}\\ q = 5 + 2\sqrt{5}\end{array}\right.\\
&\iff q = 5 - 2\sqrt{5}\\
&\iff p = 2\sqrt{5} - 4
\end{aligned}$$

$3 - q \neq 0$; $p = 1 - q$

$q \in]0;1[$

Conclusion : le jeu est équitable lorsque $p = 2\sqrt{5} - 4 \simeq 0,47$.

Petite remarque

Cela confirme le graphique de la question 8.a.iii...

★★★★★★★ FIN ★★★★★★★