Devoir surveillé 1

Lundi 23 septembre 2024 - 2h00

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :

- ***la copie doit être prise de sorte que la marge se situe à droite de chaque page,***
- ***la copie devra présenter une en-tête d'au moins une demi-page ainsi qu'une marge suffisante,***
- ***toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,***
- ***les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),***
- ***les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.***

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

Question de cours. Définition de suites équivalentes au voisinage de $+\infty$.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n + n^2} \end{cases}$$

1. Écrire une fonction **Python** telle que l'exécution de `suite_u(n)` renvoie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de u_n.
2. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et à termes strictement positifs.
3. Établir que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
4. Démontrer : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$.
5. Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?
6. 6.a. Démontrer : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 \left(u_n - \dfrac{1}{n^2}\right) = 2$.

   6.b. En déduire :

$$u_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Exercice 2

Question de cours. Définition de l'indépendance de deux variables aléatoires discrètes.

On dispose d'une pièce de monnaie donnant PILE avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$ et FACE avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$.

Partie I. Étude d'une première variable aléatoire

On effectue une succession de lancers avec cette pièce et on définit la variable aléatoire X prenant la valeur du nombre de FACE obtenues avant l'obtention du deuxième PILE.
On note, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

- P_k l'évènement : "obtenir PILE au lancer k"
- F_K l'évènement : "obtenir FACE au lancer k"

1. 1.a. Décrire les évènements $[X = 0]$ et $[X = 1]$ puis calculer leurs probabilités.

   1.b. Donner $X(\Omega)$ puis démontrer : $\forall n \in X(\Omega),\ \mathbb{P}\big([X = n]\big) = (n+1)\dfrac{4}{3^{n+2}}$.
2. Écrire une fonction **Python** d'en-tête `simulX()` qui simule l'expérience et renvoie une réalisation de X.

Partie II. Étude d'une expérience en deux étapes

On effectue une succession de lancers avec la pièce précédente jusqu'à l'obtention du deuxième PILE ; puis si n FACE ont été obtenues, on place $n+1$ boules dans une urne, les boules étant numérotées de 0 à n et indiscernables au toucher, et enfin on pioche au hasard une boule dans cette urne. On note toujours X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de FACE obtenus, et on note U la variable aléatoire prenant la valeur du numéro de la boule obtenue. On pose $V = X - U$.

3. 3.a. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire U.

   3.b. Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de U sachant $[X = n]$.

   3.c. En utilisant la fonction `simulX()` de la partie précédente, écrire une fonction **Python** d'en-tête `simulU()` qui renvoie une réalisation de U.

   3.d. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\big([U = k]\big) = \dfrac{2}{3^{k+1}}$.

   3.e. Montrer que U admet une espérance et une variance et les calculer.
4. Déterminer la loi de V.
5. Montrer que les variables aléatoires U et V sont indépendantes.
6. En déduire $\mathbb{V}(X)$ ainsi que $\mathrm{Cov}(X, U)$.

Partie III. Étude d'un jeu

Deux joueurs, A et B, décident de s'affronter dans un jeu de hasard.

- Le joueur A lance la pièce donnant PILE avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$ jusqu'à l'apparition du second PILE. On note X_A la variable aléatoire égale au nombre de FACE alors obtenues. La variable aléatoire X_A a ainsi la même loi que la variable aléatoire X de la partie I.
- Le joueur B lance une pièce donnant PILE avec la probabilité p ($p \in]0;1[$) jusqu'à l'apparition du premier PILE. On note X_B la variable aléatoire égale au nombre de FACE alors obtenues.

Dans ces conditions de jeu, les variables aléatoires X_A et X_B sont indépendantes. Le gagnant est celui ayant obtenu le moins de FACE. En cas d'égalité, aucun des deux joueurs ne gagne : il y a match nul.
On note :

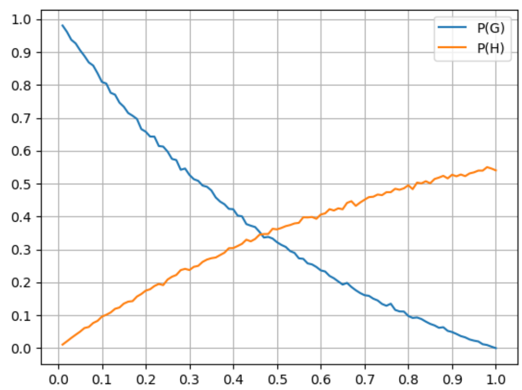
- $q = 1 - p$,
- G l'événement "A gagne",
- H l'événement "B gagne",
- N l'évènement "il y a match nul".

On admet que le jeu se termine presque-sûrement.

7. **Loi de X_B.** On note Y_B le nombre de lancers effectués par le joueur B.
   - 7.a. Reconnaître la loi de Y_B. Préciser $Y_B(\Omega)$, $\mathbb{P}\big([Y_B = k]\big)$ pour tout $k \in Y_B(\Omega)$, puis rappeler son espérance et sa variance.
   - 7.b. En déduire la loi de X_B ainsi que son espérance et sa variance.
   - 7.c. On note E l'évènement "le joueur B obtient un nombre pair de FACE". Calculer $\mathbb{P}(E)$.
8. **Le jeu.** L'objectif de cette question est d'étudier le jeu en question.
   - 8.a. **Simulation informatique.**
     - 8.a.i. Recopier et compléter les lignes manquantes de la fonction ci-dessous de sorte que les variables locales **pG,pH,pN** contiennent respectivement des valeurs approchées de $\mathbb{P}(G)$, $\mathbb{P}(H)$, $\mathbb{P}(N)$.

```
def probas(p):
    nG,nH,nN=0,0,0
    for k in range(10000):
        XA=mystere()
        XB = ......
        if  ......
            nG=nG+1
        elif  ......
            ......
        else:
            ......
    pG,pH,pN = ......
    return pG,pH,pN
```

     - 8.a.ii. L'exécution de la commande `probas(0.66)` renvoie : `(0.1911, 0.4344, 0.3745)`. Interpréter ces valeurs dans le contexte de l'exercice.
     - 8.a.iii. Cette fonction nous permet de tracer, en fonction de p, une estimation de $\mathbb{P}(G)$ et $\mathbb{P}(H)$. On obtient le graphique suivant :



       Interpréter, dans le contexte de l'exercice, l'abscisse du point d'intersection entre ces deux courbes.
   - 8.b. Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([X_B > n]\big) = q^{n+1}$.
   - 8.c. Justifier l'égalité $\mathbb{P}(G) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_A = n]\big)\mathbb{P}\big([X_B > n]\big)$. En déduire que $\mathbb{P}(G) = \dfrac{4q}{(3-q)^2}$.
   - 8.d. Déterminer $\mathbb{P}(N)$.
   - 8.e. En déduire la valeur de p à choisir pour que le jeu soit équitable.

★★★★★★★ Fin ★★★★★★★