Devoir surveillé 2
Samedi 12 octobre 2024 - 4h00

Consignes à lire !

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :

- ***la copie doit être prise de sorte que la marge se situe à droite de chaque page,***
- ***la première page de la copie doit rester vierge et sera réservée aux appréciations,***
- ***toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,***
- ***les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),***
- ***les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.***

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

"Face à la roche, le ruisseau l'emporte toujours, non pas par la force mais par la persévérance."
Horace Jackson Brown

Les arguments / éléments qu'il ne fallait pas oublier...
Les arguments / éléments non notés mais qui font tellement plaisir...

✘ Attention !
Les éléments surlignées ne sont pas les seuls éléments de barème ! Ils sont simplement ceux qui ont souvent été oubliés...

Exercice 1 (EDHEC 2000 E)

Question de cours. Convergence et divergence des suites réelles monotones.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$$

1. 1.a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ n'a qu'une seule solution positive, notée u_n.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- La fonction f_n est polynomiale, donc dérivable sur $\mathbb{R}^+$.
  Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On a :
  $$f'_n(x) = nx^{n-1} + 18x$$
  Or $x \geqslant 0$, donc $nx^{n-1} + 18x$ est une somme de termes positifs ; elle est donc positive et vaut 0 si, et seulement si, ses deux termes sont nuls. Ainsi :
  - ⋆ si $x > 0$: $f'_n(x) > 0$
  - ⋆ $f'_n(0) = 0$

  Conclusion : f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
- On a ainsi :
  - ✓ f_n est continue sur $\mathbb{R}^+$ car polynomiale,
  - ✓ f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

  Par théorème de bijection, f_n est bijective de $\mathbb{R}^+$ dans $f_n(\mathbb{R}^+) = [-4; +\infty[$.
  Or $0 \in [-4; +\infty[$.
  Par conséquent, 0 possède un unique antécédent par f_n sur $\mathbb{R}^+$.

☞ Rappels...
- Si g' est positive sur un intervalle I et ne s'annule qu'en un nombre fini de réels, alors g est strictement croissante sur I.
- Autre argument possible : si g est strictement croissante sur $]a; b]$ et continue en a, alors g est strictement croissante sur $[a; b]$.

Important !
La rédaction de cette question doit être parfaite !

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ n'a qu'une seule solution positive, notée u_n.

1.b. Calculer u_1 et u_2.

- Par définition, u_1 est la solution positive de l'équation $9x^2 + x - 4 = 0$.

Conclusion : $u_1 = \dfrac{-1+\sqrt{145}}{18}$.

- Par définition, u_2 est la solution positive de l'équation $10x^2 - 4 = 0$.

Conclusion : $u_2 = \sqrt{\dfrac{2}{5}}$.

1.c. Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \in \left]0, \dfrac{2}{3}\right[$.

➠Réflexe !
Pour comparer des antécédents, on compare leurs images...

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$f_n(0) = -4 \quad ; \quad f_n(u_n) = 0 \quad ; \quad f_n\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Ainsi :

$$f_n(0) < f_n(u_n) < f_n\left(\frac{2}{3}\right)$$

D'où, par stricte croissance de f_n sur $\mathbb{R}^+$ (licite car $0, u_n, \frac{2}{3} \in \mathbb{R}^+$), on a :

$$0 < u_n < \frac{2}{3}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \in \left]0, \dfrac{2}{3}\right[$.

2. 2.a. Montrer que, pour tout $x \in]0, 1[$, on a : $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0; 1[$. On a :

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) - f_n(x) &= x^{n+1} + 9x^2 - 4 - (x^n + 9x^2 - 4) \\ &= x^{n+1} - x^n \\ &= x^n(x-1) \end{aligned}$$

Or $x \in]0; 1[$, donc $x^n > 0$ et $x - 1 < 0$. Par conséquent :

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) < 0$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in]0,1[$, on a : $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.

2.b. En déduire les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.D'après la question précédente avec $x = u_n$, licite car $u_n \in]0;1[$ d'après la question **1.c** :

$$f_{n+1}(u_n) < f_n(u_n)$$

Or $f_n(u_n) = 0$, mais on a aussi $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$... D'où :

$$f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$$

Ainsi, par stricte croissante de f_{n+1} sur $\mathbb{R}^+$ (licite car $u_n, u_{n+1} \in \mathbb{R}^+$) :

$$u_n < u_{n+1}$$

Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

➠Réflexe !
On souhaite comparer u_n et u_{n+1}, on compare donc leurs images par f_{n+1} (ou par f_n c'est aussi possible).

2.c. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. On note ℓ sa limite.

D'après la question précédente et la question **1.c** : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée (par $\frac{2}{3}$).

Conclusion : par théorème de convergence monotone, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ.

3. 3.a. Déterminer la limite de $(u_n)^n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

D'après la question **1.c** et par croissance de la fonction $.^n$ sur $\mathbb{R}^+$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant u_n \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Or $\frac{2}{3} \in]-1;1[$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$.

Conclusion : par théorème d'encadrement, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)^n = 0$.

✘ Attention !
Le simple fait que $0 < u_n < 1$ ne permet pas de conclure !
Exemple : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right) \neq 0$...

3.b. Donner enfin la valeur de ℓ.

D'après les questions précédentes :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n^n + 9u_n^2 - 4 = 0$,
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$,
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)^n = 0$.

D'où par opérations :

$$9\ell^2 - 4 = 0$$

Par conséquent :

$$\ell = \frac{2}{3} \quad \text{ou} \quad \ell = -\frac{2}{3}$$

Or on sait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive, donc $\ell \geqslant 0$.

Conclusion : $\ell = \frac{2}{3}$.

4. La série de terme général u_n est-elle convergente ?

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers 0...

Conclusion : la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est (grossièrement) divergente.

☞ Rappel...
La convergence vers 0 de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une condition nécessaire de convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$.
Mais ça n'est pas une condition suffisante !

5. 5.a. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2 - 3u_n \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$u_n^n + 9u_n^2 - 4 = 0$$

D'où :

$$u_n^n = 4 - 9u_n^2$$

Autrement dit :

$$u_n^n = (2-3u_n)(2+3u_n)$$

Puisque $2 + 3u_n \neq 0$, on obtient :

$$2 - 3u_n = \frac{u_n^n}{2+3u_n}$$

Or :

➠Réflexe !
On ne raisonne (presque) jamais pas récurrence pour établir des résultats sur les suites implicites ! En effet, pour raisonner par récurrence, il faut un lien direct entre u_n et u_{n+1}, ce que nous n'avons pas pour ce type de suites.

- $u_n > 0$, donc $2+3u_n \geqslant 2$, ainsi :
$$\frac{1}{2+3u_n} \leqslant \frac{1}{2}$$
- $u_n^n \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$

D'où, puisque $u_n^n > 0$:
$$\frac{u_n^n}{2+3u_n} \leqslant \frac{u_n^n}{2}$$
et ainsi, par transitivité :
$$\frac{u_n^n}{2+3u_n} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2-3u_n \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

5.b. Montrer que la série de terme général $\frac{2}{3} - u_n$ est convergente.

On a :

✓ d'après la question précédente et la question **1.c** : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \frac{2}{3} - u_n \leqslant \frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

✓ puisque $\frac{2}{3} \in]-1;1[$, la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ est une troncature de série convergente, donc est également convergente. Ainsi, la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ est convergente.

Conclusion : par critère de comparaison (par inégalités) sur les séries à termes généraux positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{2}{3} - u_n\right)$ est convergente.

6. Recopier et compléter les lignes manquantes du programme ci-dessous de sorte que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'exécution de **approx_u(n)** renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près obtenue par la méthode de dichotomie.

```python
def f(n,x):
    y=x**n+9*x**2-4
    return y

def approx_u(n):
    a = ......
    b = ......
    while ......
        m = ......
        if f(n,m)>0:
            ......
        elif f(n,m)<0:
            ......
        else :
            ......
    return ......
```

Voici :

```python
def f(n,x):
    y=x**n+9*x**2-4
    return y

def approx_u(n):
    a=0
    b=2/3
    while abs(b-a)>10**(-3):
        m=(a+b)/2
        if f(n,m)>0:
            b=m
        elif f(n,m)<0:
            a=m
        else :
            a,b=m,m
    return (a+b)/2
```

Exercice 2 (Adaptation de EML 2004 E)

Question de cours. Famille génératrice d'un espace vectoriel de dimension finie. Que dire de son cardinal ?

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre trois à coefficients réels, I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et 0_3 la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On considère, pour toute matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, les ensembles $\mathscr{E}_1(A)$ et $\mathscr{E}_2(A)$ suivants :

$$\mathscr{E}_1(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ AM = M\} \quad ; \quad \mathscr{E}_2(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ A^2M = AM\}$$

Partie I

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathscr{E}_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   On admet que $\mathscr{E}_2(A)$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   - ✓ $\mathscr{E}_1(A) \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par définition et $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.
   - ✓ $A \times 0_3 = 0_3$, donc $0_n \in \mathscr{E}_1(A)$: $\mathscr{E}_1(A)$ est donc non vide.
   - ✓ Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $M, N \in \mathscr{E}_1(A)$. Montrons que $aM + bN \in \mathscr{E}_1(A)$.
     On a :
     - ⋆ $aM + bN \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, car $M, N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et que $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel ;
     - ⋆ et :

     $$\begin{aligned} A(aM + bN) &= aAM + bAN \\ &= aM + bN \end{aligned} \qquad M, N \in \mathscr{E}_1(A)$$

     Donc $aM + bN \in \mathscr{E}_1(A)$.

   Conclusion : $\mathscr{E}_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Rédaction
Pour démontrer qu'un ensemble E est inclus dans un ensemble F, on commence toujours pas "Soit $e \in E$."

✘ Attention !
Multiplier par une matrice ne conserve pas les équivalences, sauf si cette matrice est inversible.

2. 2.a. Établir : $\mathscr{E}_1(A) \subset \mathscr{E}_2(A)$.
   Soit $M \in \mathscr{E}_1(A)$. Montrons que $M \in \mathscr{E}_2(A)$. On a :

   $$\begin{aligned} A^2M &= A \times AM \\ &= A \times M \end{aligned} \qquad M \in \mathscr{E}_1(A), \text{ donc } AM = M$$

   Donc $M \in \mathscr{E}_1(A)$.

   Conclusion : $\mathscr{E}_1(A) \subset \mathscr{E}_2(A)$.

   2.b. Montrer que si A est inversible, alors $\mathscr{E}_1(A) = \mathscr{E}_2(A)$.
   Supposons que A est inversible.
   - D'après la question précédente, on a déjà $\mathscr{E}_1(A) \subset \mathscr{E}_2(A)$.
   - Montrons que $\mathscr{E}_2(A) \subset \mathscr{E}_1(A)$.
     Soit $M \in \mathscr{E}_2(A)$. Ainsi :
     $$A^2M = AM$$
     Or A est inversible, donc en multipliant par A^{-1} par la gauche :
     $$AM = M$$
     Autrement dit, $M \in \mathscr{E}_1(A)$.
     Par conséquent : $\mathscr{E}_2(A) \subset \mathscr{E}_1(A)$.

   Conclusion : si A est inversible, alors $\mathscr{E}_1(A) = \mathscr{E}_2(A)$.

3. 3.a. Établir que si $A - I_3$ est inversible, alors $\mathscr{E}_1(A) = \{0_3\}$.
   Supposons que $A - I_3$ est inversible.
   - On sait déjà (question 1) que $\{0_3\} \subset \mathscr{E}_1(A)$.
   - Montrons que $\mathscr{E}_1(A) \subset \{0_3\}$.
     Soit $M \in \mathscr{E}_1(A)$. On a : $AM = M$ Autrement dit :
     $$(A - I_3)M = 0_3$$
     Or $A - I_3$ est inversible, donc en multipliant par $(A - I_3)^{-1}$ par la gauche :
     $$M = 0_3$$
     Par conséquent : $\mathscr{E}_1(A) \subset \{0_3\}$.

> **Conclusion :** si $A - I_3$ est inversible, alors $\mathscr{E}_1(A) = \{0_3\}$.

3.b. Un exemple. Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer $\mathscr{E}_1(B)$ et $\mathscr{E}_2(B)$.

➠Réflexe ! Y-a-t-il un lien avec les questions précédentes ?!

On a ainsi :

- B est inversible, car elle est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux non nuls. Par conséquent, d'après la question 2.b :
$$\mathscr{E}_1(B) = \mathscr{E}_2(B)$$
- $B - I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est, par le même argument, également inversible. Par conséquent, d'après la question 3.a :
$$\mathscr{E}_1(B) = \{0_3\}$$

> **Conclusion :** $\mathscr{E}_1(B) = \mathscr{E}_2(B) = \{0_3\}$.

Partie II

On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Calculer $C^2 - C$.

On trouve $C^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$=C.

> **Conclusion :** $C^2 - C = 0_3$.

5. Notons $E_0(C) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ CX = 0_{3,1}\}$ et $E_1(C) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ CX = X\}$. Montrer que $E_0(C)$ et $E_1(C)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et en déterminer une base de chaque.

- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
X \in E_0(C) &\iff CX = 0_{3,1} \\
&\iff \begin{cases} -y + z = 0 \\ -x + z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases} \\
&\underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\iff} \begin{cases} -x + z = 0 \\ -y + z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases} \\
&\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\iff} \begin{cases} -x + z = 0 \\ -y + z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \\
&\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \begin{cases} -x + z = 0 \\ -y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = z \\ y = z \\ z = z \end{cases} \\
&\iff X = z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

D'où :

$$E_0(C) = \left\{ z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ z \in R \right\}$$

$$= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$$

Or $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, donc $E_0(C)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est :

✓ génératrice de $E_0(C)$ par définition,
✓ libre car constituée d'une unique vecteur non nul.

Conclusion : $E_0(C)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$; la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ en est une base.

- Soit $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
X \in E_1(C) &\iff CX = X \\
&\iff \begin{cases} \quad -y + \ z = x \\ -x \quad\ + \ z = y \\ -x - y + 2z = z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -x - y + z = 0 \\ -x - y + z = 0 \\ -x - y + z = 0 \end{cases} \\
&\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \begin{cases} -x - y + z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = -y + z \\ y = \quad y \\ z = \quad z \end{cases} \\
&\iff X = y\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
E_1(C) &= \left\{ y\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ (y,z) \in R^2 \right\} \\
&= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

Or $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, donc $E_1(C)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et la famille $\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est :

✓ génératrice de $E_1(C)$ par définition,
✓ libre car seulement constituée de deux vecteurs non colinéaires.

Conclusion : $E_1(C)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$; la famille $\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ en est une base.

6. Démontrer que la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Montrons que la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est libre.

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Supposons $a\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = 0_{3,1}$.

On a :

$$a\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=0_{3,1} \iff \left\{\begin{array}{l} a+b+c=0\\ a-b=0\\ a+c=0\end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{l} a+\ b+c=0\\ -2b-c=0\\ -\ b=0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} a=0\\ b=0\\ c=0\end{array}\right.$$

D'où : $a=b=c=0$. Par conséquent la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est :

- ✓ libre d'après ce qui précède,
- ✓ de cardinal 3, égal à la dimension de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Conclusion : la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

7. Considérons la matrice $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$. Sans calcul justifier que P est inversible, puis calculer P^{-1}.

On admet alors que $P^{-1}CP=D$, où $D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

- D'après la question précédente, on remarque que les colonnes de P forment une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Conclusion : P est inversible.

- Méthode habituelle pour le calcul de P^{-1}...

Conclusion : $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&-1&2\\1&1&-1\end{pmatrix}$.

8. Soit $M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note $N=P^{-1}M$. Établir :

$$M\in\mathscr{E}_1(C)\iff N\in\mathscr{E}_1(D)$$

On a :

$$\begin{aligned} M\in\mathscr{E}_1(C) &\iff CM=M\\ &\iff PDP^{-1}PN=PN && C=PDP^{-1} \text{ et } M=PN\\ &\iff PDN=PN\\ &\iff DN=N && P \text{ est inversible}\\ &\iff N\in\mathscr{E}_1(D)\end{aligned}$$

9. Montrer que $N\in\mathscr{E}_1(D)$ si, et seulement si, il existe six réels a,b,c,d,e,f tels que $N=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\0&0&0\end{pmatrix}$.

Soit $N=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}$. On a :

$$\begin{aligned} N\in\mathscr{E}_1(D) &\iff DN=N\\ &\iff \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}\\ &\iff \begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\iff \begin{cases} a = a \\ b = b \\ c = c \\ d = d \\ e = e \\ f = f \\ g = 0 \\ h = 0 \\ i = 0 \end{cases}$$

$$\iff N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Conclusion : $N \in \mathscr{E}_1(D)$ si, et seulement si, il existe six réels a, b, c, d, e, f tels que $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

10. En déduire une base de $\mathscr{E}_1(D)$ puis une base de $\mathscr{E}_1(C)$.

- Notons, pour tout $(i, j) \in [\![1; 3]\!]^2$, $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient situé en i-ème ligne et j-ème colonne, qui vaut 1.
La famille $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3})$ est une famille qui est :
  - ✓ génératrice de $\mathscr{E}_1(D)$, car d'après la question précédente on a $\mathscr{E}_1(D) = \mathrm{Vect}(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3})$;
  - ✓ libre car il s'agit d'une sous-famille d'une famille libre, puisque c'est une sous-famille de la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Conclusion : la famille $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3})$ est une base de $\mathscr{E}_1(D)$.

- Soit $M \in \mathscr{E}_1(C)$. D'après la question 8, on en déduit que $P^{-1}M \in \mathscr{E}_1(D)$.
Ainsi, d'après le point précédent, puisque $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3})$ est une base de $\mathscr{E}_1(D)$:

$$\exists!(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6 \ / \ P^{-1}M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par conséquent :

$$\exists!(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6 \ / \ M = P \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Autrement dit :

$$\exists!(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6 \ / \ M = \begin{pmatrix} a+d & b+e & c+f \\ -a & -b & -c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

Et ainsi :

$$\exists!(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6 \ / \ M = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

☞ **Rappel...**
Si besoin, on reprend la définition de base d'un espace vectoriel...

Conclusion : la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathscr{E}_1(C)$.

11. Déterminer $\mathscr{E}_2(C)$.
On sait que $\mathscr{E}_2(C) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ C^2M = CM\}$.
Or, d'après la question 4, $C^2 = C$. D'où :

$$\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \ \ C^2M = CM$$

Conclusion : $\mathscr{E}_2(C) = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 3 (Fait maison)

Question de cours. Définition et propriétés de $\binom{n}{k}$, où $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0;n]\!]$.

Partie I

Dans cette partie, r désigne un entier naturel et x un réel de $]0;1[$.

1. Établir : $\binom{n}{r} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^r}{r!}$.

   Pour $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $n \geqslant r$ et donc :

$$\begin{aligned}\binom{n}{r} &= \frac{n!}{r!(n-r)!}\\ &= \frac{n(n-1) \times \dots \times (n-r+1)}{r!}\\ &= \frac{n(n-1) \times \dots \times n-(r-1))}{r!}\\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^r}{r!}\end{aligned}$$

chaque facteur du numérateur est équivalent à n en $+\infty$; et il y en a r (de $n-0$ à $n-(r-1)$)

> **Conclusion :** $\binom{n}{r} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^r}{r!}$.

2. 2.a. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{r+2}x^n$.

   Puisque $x \in]0;1[$, par croissance comparée, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{r+2}x^n = 0$.

> **Conclusion :** $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{r+2}x^n = 0$.

Petite remarque

On peut réécrire $n^{r+2}x^n$ sous la forme $n^{r+2}e^{n\ln(x)}$ pour se convaincre qu'il s'agit bien d'une croissance comparée… Mais les croissances comparées avec les suites géométriques sont au programme ; on peut donc se contenter de donner le résultat.

2.b. En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant r} \binom{n}{r} x^n$ est convergente.

D'après la question 1 et puisque $x \neq 0$, on a :

$$\binom{n}{r} x^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^r}{r!} x^n$$

Or, d'après la question précédente :

$$n^r x^n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On a ainsi :

- ✓ $\binom{n}{r} x^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{r!} \times \frac{1}{n^2}\right)$
- ✓ $\forall n \in [\![r;+\infty[\![$, $\binom{n}{r} x^n \geqslant 0$, $\frac{1}{r!} \times \frac{1}{n^2} \geqslant 0$
- ✓ la série $\sum\limits_{n\geqslant r} \frac{1}{n^2}$ est une troncature de série de Riemann convergente (car d'exposant 2, et $2 > 1$), elle est donc également convergente ; donc la série $\sum\limits_{n\geqslant r} \frac{1}{r!}\frac{1}{n^2}$ est convergente.

☞ Rappel…

On utilise ici une propriété assez naturelle :

$$\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ v_n \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(w_n)\end{array}\right\} \Longrightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(w_n)$$

que l'on peut aisément démontrer au brouillon en cas de doute !

> **Conclusion :** par critère de comparaison (par négligeabilité) sur les séries à termes généraux positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant r} \binom{n}{r} x^n$ est convergente.

Autre méthode…

On peut procéder légèrement différemment, en deux temps…

- On a :
  - ✓ $\binom{n}{r} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^r}{r!}$, donc, puisque $x \neq 0$:

$$\binom{n}{r} x^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^r}{r!} x^n$$

✓ pour tout $n \in [\![r;+\infty[\![$, $\binom{n}{r} x^n \geqslant 0$; $\frac{n^r}{r!} x^n \geqslant 0$ (car $x > 0$).

Ainsi, par critère de comparaison (par équivalence) sur les séries à termes généraux positifs, les séries $\sum_{n \geqslant r} \binom{n}{r} x^n$ et $\sum_{n \geqslant r} \frac{n^r}{r!} x^n$ ont même nature.

- Ensuite :
  ✓ d'après la question précédente, $n^r x^n \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$;
  ✓ pour tout $n \in [\![r;+\infty[\![$, $n^r x^n \geqslant 0$; $\frac{1}{n^2} \geqslant 0$ (car $x > 0$) ;
  ✓ la série $\sum_{n \geqslant r} \frac{1}{n^2}$ est une troncature de série de Riemann convergente (car d'exposant 2, et $2 > 1$), elle est donc également convergente.

  Ainsi, par critère de comparaison (par négligeabilité) sur séries à termes généraux positifs, la série $\sum_{n \geqslant r} n^r x^n$ est convergente.

  Par conséquent, la série $\sum_{n \geqslant r} \frac{n^r}{r!} x^n$ est également convergente.

Conclusion : des deux points, on en déduit que la série $\sum_{n \geqslant r} \binom{n}{r} x^n$ est convergente.

3. On pose $S_r = \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^n$.

3.a. Calculer S_0.

On a :

$$\begin{aligned} S_0 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{0} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \\ &= \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

Petite remarque

Il est un inutile, d'après la question précédente, de justifier la convergence de la série en jeu dans cette question.

Conclusion : $S_0 = \dfrac{1}{1-x}$.

3.b. Établir, en utilisant la formule du triangle de Pascal, que $(1-x)S_{r+1} = xS_r$.

On a :

$$\begin{aligned} (1-x)S_{r+1} &= (1-x) \sum_{n=r+1}^{+\infty} \binom{n}{r+1} x^n \\ &= \sum_{n=r+1}^{+\infty} \binom{n}{r+1} x^n - \sum_{n=r+1}^{+\infty} \binom{n}{r+1} x^{n+1} \\ &= \sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k+1}{r+1} x^{k+1} - \sum_{n=r+1}^{+\infty} \binom{n}{r+1} x^{n+1} \\ &= \binom{r+1}{r+1} x^{r+1} + \sum_{k=r+1}^{+\infty} \binom{k+1}{r+1} x^{k+1} - \sum_{n=r+1}^{+\infty} \binom{n}{r+1} x^{n+1} \\ &= x^{r+1} + \sum_{n=r+1}^{+\infty} \left(\binom{n+1}{r+1} - \binom{n}{r+1} \right) x^{n+1} \\ &= x^{r+1} + \sum_{n=r+1}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n+1} \\ &= \binom{r}{r} x^{r+1} + \sum_{n=r+1}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n+1} \\ &= \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n+1} \\ &= x \sum_{n=r+1}^{+\infty} \binom{n}{r} x^n \\ &= xS_r \end{aligned}$$

$k = n - 1$ dans la première somme

formule du triangle de Pascal : $\forall n \geqslant r+1$, $\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$

Petite remarque

Dans l'esprit, ce n'est pas si différent de ce que l'on retrouve dans la démonstration (par récurrence) de la formule du binôme de Newton.

> **Conclusion :** $(1-x)S_{r+1} = xS_r$.

3.c. Démontrer alors :

$$\forall r \in \mathbb{N},\ S_r = \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}$$

D'après la question précédente, puisque $1-x \neq 0$, on a :

$$\forall r \in \mathbb{N},\ S_{r+1} = \frac{x}{1-x} S_r$$

Par conséquent, la suite $(S_r)_{r\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{x}{1-x}$ et de premier terme S_0.
D'où :

$$\forall r \in \mathbb{N},\ S_r = S_0 \left(\frac{x}{1-x}\right)^r$$

Or, d'après la question **3.a**, $S_0 = \dfrac{1}{1-x}$...

> **Conclusion :** $\forall r \in \mathbb{N},\ S_r = \dfrac{x^r}{(1-x)^{r+1}}$.

Petite remarque
Il était bien entendu possible de raisonner par récurrence...

4. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On considère un réel $p \in]0;1[$ ainsi que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall k \in \mathbb{N},\ u_k = \binom{k+m-1}{k} p^m(1-p)^k$.
Démontrer que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définit une loi de probabilité. Autrement dit, vérifier :
- $\forall k \in \mathbb{N},\ u_k \geqslant 0$,
- la série $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} u_k$ est convergente de somme égale à 1.

On dira qu'une variable aléatoire X définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suit la *loi binomiale négative de paramètres m et p*, on notera $X \hookrightarrow \mathscr{BN}(m;p)$ lorsque : $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\big([X = k]\big) = \binom{k+m-1}{k} p^m(1-p)^k$.

- Puisque $p \in]0;1[$, on a immédiatement :
$$\forall k \in \mathbb{N},\ u_k \geqslant 0$$
- Soit $N \in \mathbb{N}$. On a :
$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N} u_k &= \sum_{k=0}^{N} \binom{k+m-1}{k} p^m(1-p)^k \\
&= p^m \sum_{k=0}^{N} \binom{k+m-1}{k} (1-p)^k && \text{symétrie des coefficients binomiaux : } \binom{k+m-1}{k} = \binom{k+m-1}{m-1} \\
&= p^m \sum_{k=0}^{N} \binom{k+m-1}{m-1} (1-p)^k && n = k+m-1 \\
&= p^m \sum_{n=m-1}^{N} \binom{n}{m-1} (1-p)^{n-m+1} \\
&= p^m (1-p)^{1-m} \sum_{n=m-1}^{N} \binom{n}{m-1} (1-p)^{n}
\end{aligned}$$
Or, d'après la question **3.c** avec $r = m-1$ et $x = 1-p$, licite car $m \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$ (donc $r \in N$ et $x_i n]0;1[$), on a :
$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=m-1}^{N} \binom{n}{m-1} (1-p)^n = \frac{(1-p)^{m-1}}{(1-(1-p)^m}$$
Par conséquent, la série $\sum\limits_{k\geqslant 0}$ est convergente et :
$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} u_k &= p^m(1-p)^{1-m} \sum_{n=m-1}^{+\infty} \binom{n}{m-1}(1-p)^n \\
&= p^m(1-p)^{1-m} \frac{(1-p)^{m-1}}{(1-(1-p)^m} \\
&= p^m(1-p)^{1-m} \frac{(1-p)^{m-1}}{p^m} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Conclusion : la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définit une loi de probabilité.

Partie II

Soit $p \in]0;1[$. On effectue une succession infinie de lancers d'une même pièce donnant PILE avec la probabilité p et FACE avec la probabilité $q = 1-p$.
On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Y_n la variable aléatoire égale au rang d'apparition du n-ième PILE et X_n le nombre de FACE obtenus avant l'apparition du n-ième PILE.
On définit également une suite de variables aléatoires $(T_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ par :

- $T_1 = Y_1$
- pour tout $k \in [\![2;+\infty[\![$, $T_k = Y_k - Y_{k-1}$.

On admet que toutes les variables aléatoires de l'exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et on admet également que les variables aléatoires $T_1, T_2, \dots$ sont mutuellement indépendantes.

5. Recopier et compléter les lignes manquantes du programme ci-dessous de sorte que l'exécution de **`simulY(n,p)`** simule l'expérience et renvoie une réalisation de la variable aléatoire Y_n.

```python
import numpy.random as rd

def simulY(n,p):
    Y=0
    nb=0
    while .......
        Y=Y+1
        if rd.random()<p:
            ......
    return ......
```

Voici :

```python
import numpy.random as rd

def simulY(n,p):
    Y=0
    nb=0
    while nb<n:
        Y=Y+1
        if rd.random()<p:
            nb=nb+1
    return Y
```

6. 6.a. Donner la loi de Y_1.

- L'expérience consiste en une infinité de répétitions indépendantes de la même épreuve de Bernoulli dont le succès "obtenir PILE" est de probabilité p.
- La variable aléatoire Y_1 prend comme valeur le rang du premier succès.

Conclusion : Y_1 suit la loi géométrique de paramètre p.

6.b. Exprimer X_1 en fonction de Y_1 puis en déduire la loi de X_1 ainsi que son espérance et sa variance.

- Puisque X_1 désigne le nombre de FACE avant l'obtention du premier succès, on a :

$$X_1 = Y_1 - 1$$

- Ainsi $X_1(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([X_1 = k]\big) &= \mathbb{P}\big([Y_1 - 1 = k]\big)\\ &= \mathbb{P}\big([Y_1 = k+1]\big) && Y_1 \hookrightarrow \mathscr{G}(p) \text{ et } k+1 \in \mathbb{N}^*\\ &= (1-p)^k p\end{aligned}$$

- Ensuite, on sait que Y_1 admet une espérance et une variance, donc X_1 également (comme fonction affine de Y_1) et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_1) &= \mathbb{E}(Y_1 - 1) && \text{linéarité de l'espérance}\\ &= \mathbb{E}(Y_1) - 1 && Y_1 \hookrightarrow \mathscr{G}(p)\\ &= \frac{1}{p} - 1\end{aligned}$$

$$= \frac{1-p}{p}$$
$$= \frac{q}{p}$$

puis :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X_1) &= \mathbb{V}(Y_1 - 1) \\
&= \mathbb{V}(Y_1) && Y_1 \hookrightarrow \mathscr{G}(p) \\
&= \frac{1-p}{p^2} \\
&= \frac{q}{p^2}
\end{aligned}$$

Quelle horreur !
Même si $\mathbb{V}(X+b) = \mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(b)$ (car $\mathbb{V}(b) = 0$), la variance n'est pas linéaire !! On écrit d'ailleurs toujours directement $\mathbb{V}(aX+b) = a^2\mathbb{V}(X)$.

> **Conclusion :** $X_1(\Omega) = \mathbb{N}$, $\forall k \in \mathbb{N}, \ \mathbb{P}\big([X_1 = k]\big) = q^k p$
> $\mathbb{E}(X_1) = \dfrac{q}{p}$ et $\mathbb{V}(X_1) = \dfrac{q}{p^2}$.

7. 7.a. Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, T_k suit la loi géométrique de paramètre p.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- Si $k = 1$:
  On sait que $T_1 = Y_1$ et Y_1 suit la loi géométrique de paramètre p d'après la question précédente.
  Conclusion : T_1 suit la loi géométrique de paramètre p.
- Si $k \geqslant 2$:
  Puisque $T_k = Y_k - Y_{k-1}$, la variable aléatoire T_k prend comme valeur le nombre de lancers nécessaires, après l'obtention du $(k-1)$-ième PILE (qui se produit presque-sûrement), afin d'obtenir le k-ième PILE. Ainsi :
  - ⋆ après l'obtention du $(k-1)$-ième PILE, l'expérience s'assimile à une infinité de répétitions indépendantes de la même épreuve de Bernoulli dont le succès "obtenir PILE" est de probabilité p ;
  - ⋆ la variable aléatoire T_k prend comme valeur le nombre de lancers nécessaires à l'obtention du premier succès (autrement au nombre de lancers nécessaires à l'obtention du k-ième PILE).

  Conclusion : $T_k \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.

✓ Rigueur !
Il faut bien distinguer deux cas, car il y a deux définitions différentes de T_k...

> **Conclusion :** $\forall k \in \mathbb{N}^*, \ T_k \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.

7.b. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ Y_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} T_k$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} T_k &= T_1 + \sum_{k=2}^{n} T_k \\
&= T_1 + \sum_{k=2}^{n} (Y_k - Y_{k-1}) && \text{télescopage} \\
&= T_1 + Y_n - Y_1 && T_1 = Y_1 \\
&= Y_n
\end{aligned}$$

✓ Rigueur !
Là encore, il faut bien décomposer la somme en 2 pour isoler le cas $k = 1$ pour lequel T_k a une expression différente (la somme $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} T_k$ est nulle lorsque $n = 1$, car indexée sur un ensemble vide...).

> **Conclusion :** $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ Y_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} T_k$.

7.c. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Y_n possède une espérance et une variance à déterminer.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après les deux questions précédentes, la variable aléatoire Y_n admet une espérance et une variance, comme somme de variables aléatoires admettant une espérance et une variance. Puis :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_n) &= \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} T_k\right) && \text{linéarité de l'espérance} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(T_k) && \forall k \in \mathbb{N}^*, \ Y_k \hookrightarrow Gp \\
&= \frac{n}{p}
\end{aligned}$$

✘ Attention !
L'indépendance des $T_1, \ldots, T_n$ n'intervient pas du tout dans l'existence, ni de l'espérance ni de la variance !

et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(Y_n) &= \mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n} T_k\right) && \text{indépendance des variables aléatoires } T_1, \ldots, T_n \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(T_k) && \forall k \in \mathbb{N}^*,\ Y_k \hookrightarrow Gp \\
&= \frac{nq}{p^2}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{E}(Y_n) = \dfrac{n}{p}$ et $\mathbb{V}(Y_n) = \dfrac{nq}{p^2}$.

7.d. Proposer une fonction **Python**, différente de celle donnée en question 5, qui renvoie une réalisation de la variable aléatoire Y_n.

D'après les questions 7.a et 7.b, la variable aléatoire Y_n est la somme de n variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi géométrique de paramètre p...

Proposons donc :

```python
import numpy.random as rd

def simulYbis(n,p):
    Y=0
    for k in range(1,n+1):
        Y=Y+rd.geometric(p)
    return Y
```

Petite remarque
On pourrait également définir une liste (en compréhension par exemple) et en sommer les éléments ensuite avec la commande `sum`.

8. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y_2.

On a $Y_2 = T_1 + T_2$; et comme $T_1(\Omega) = T_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on a :

$$Y_2(\Omega) \subset [\![2; +\infty[\![$$

Soit $i \in [\![2; +\infty[\![$. D'après la formule des probabilités totales, avec $\big([T_1 = k]\big)_{k \in \mathbb{N}^*}$ comme système complet d'évènements, la série $\sum\limits_{k \geqslant 1} \mathbb{P}\big([T_1 = k] \cap [Y_2 = i]\big)$ est convergente et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([Y_2 = i]\big) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([T_k = 1] \cap [Y_2 = i]\big) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([T_1 = k] \cap [T_1 + T_2 = i]\big) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([T_1 = k] \cap [T_2 = i - k]\big) && \text{indépendance de } T_1 \text{ et } T_2 \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([T_1 = k]\big)\mathbb{P}\big([T_2 = i - k]\big) && \forall k \in \mathbb{N}^*,\ i-k \in T_2(\Omega) \iff i-k \geqslant 1 \iff k \leqslant i-1 \\
& && \text{Donc : } \forall k > i-1,\ \mathbb{P}\big([T_2 = i-k]\big) = 0 \\
&= \sum_{k=1}^{i-1} \mathbb{P}\big([T_1 = k]\big)\mathbb{P}\big([T_2 = i - k]\big) && T_1 \hookrightarrow \mathscr{G}(p) \text{ et } T_2 \hookrightarrow \mathscr{G}(p) \\
&= \sum_{k=1}^{i-1} pq^{k-1}pq^{i-k-1} \\
&= p^2 \sum_{k=1}^{i-1} q^{i-2} \\
&= (i-1)p^2q^{i-2}
\end{aligned}$$

Conclusion : $Y_2(\Omega) = [\![2; +\infty[\![$ et pour tout $i \in [\![2; +\infty[\![,\ \mathbb{P}\big([Y_2 = i]\big) = (i-1)p^2q^{i-2}$.

Petite remarque
On peut conclure sur l'égalité $Y_2(\Omega) = [\![2; +\infty[\![$, car d'après ce qui précède, pour tout $i \in [\![2; +\infty[\![,\ \mathbb{P}\big([Y_2 = i]\big) \neq 0$, donc $[Y_2 = i] \neq \varnothing$...

Autre méthode

Puisque Y_2 prend comme valeur le rang du second succès, on a :

$$Y_2(\Omega) \subset [\![2; +\infty[\![$$

Notons ensuite, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, P_k l'évènement "obtenir PILE au lancer k" et $F_k = \overline{P_k}$.
Soit $i \in [\![2; +\infty[\![$.

$[Y_2 = i]$ est réalisé si, et seulement si, le second PILE est obtenu au lancer i
si, et seulement si, les lancers 1 à $i-1$ donnent un PILE et $i-2$ FACE ; et le lancer i donne un PILE

D'où :

$$\begin{aligned}
[Y_2 = i] &= \left(P_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_{i-1} \cap P_i\right) \\
&\quad \cup \left(F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap \ldots \cap F_{i-1} \cap P_i\right) \\
&\quad \cup \ldots \\
&\quad \ldots \\
&\quad \cup \left(F_1 \cap \ldots F_{i-2} \cap P_{i-1} \cap P_i\right) \\
&= \bigcup_{j=1}^{i-1} \left(P_j \cap \left(\bigcap_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{i-1} F_k \right) \cap P_i \right)
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left([Y_2 = i]\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{i-1} \left(P_j \cap \left(\bigcap_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{i-1} F_k \right) \cap P_i \right) \right) && \text{incompatibilité des évènements de la famille } \left(\left(P_j \cap \left(\bigcap_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{i-1} F_k \right) \cap P_i \right) \right)_{j \in [\![1;n-1]\!]} \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{P}\left(P_j \cap \left(\bigcap_{k=1, k\neq j}^{i-1} F_k \right) \cap P_i \right) && \text{indépendance des lancers} \\
&= \sum_{j=1}^{i-1} p^2 q^{i-2} \\
&= (j-1) p^2 q^{i-2}
\end{aligned}$$

Important ! Il faut impérativement savoir traiter cette question, par les deux méthodes proposées ici.

9. 9.a. Justifier rapidement que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n(\Omega) \subset [\![n; +\infty[\![$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La variable aléatoire Y_n prend comme valeur le rang du n-ième PILE.
Or, pour obtenir un n-ième PILE, il faut effectuer au moins n lancers...

Petite remarque On pourrait également utiliser $Y_n = \sum_{k=1}^{n} T_k$ et le fait que pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, $T_k(\Omega) = \mathbb{N}^*$, car $T_k \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$...

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n(\Omega) \subset [\![n; +\infty[\![$.

9.b. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![n+1; +\infty[\![$. Établir :

$$\sum_{i=n}^{k-1} \binom{i-1}{i-n} = \sum_{i=n}^{k-1} \left(\binom{i}{i-n} - \binom{i-1}{i-1-n} \right) = \binom{k-1}{k-1-n}$$

- D'après la formule du triangle de Pascal :

$$\forall i \in [\![n+1; +\infty[\![, \quad \binom{i-1}{i-n-1} + \binom{i-1}{i-n} = \binom{i}{i-n}$$

Et cette relation est encore valable pour $i = n$, avec la convention que si $j < 0$, alors $\binom{i-1}{j} = 0$.

On a ainsi :

$$\forall i \in [\![n; +\infty[\![, \quad \binom{i-1}{i-n-1} + \binom{i-1}{i-n} = \binom{i}{i-n}$$

D'où, en sommant de n à $k-1$:

$$\sum_{i=n}^{k-1} \binom{i-1}{i-n} = \sum_{i=n}^{k-1} \left(\binom{i}{i-n} - \binom{i-1}{i-1-n} \right)$$

- Ensuite, par télescopage :

$$\sum_{i=n}^{k-1} \left(\binom{i}{i-n} - \binom{i-1}{i-1-n} \right) = \binom{k-1}{k-1-n} - \binom{i-1}{-1}$$

D'où le résultat, avec la même convention que précédemment.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in [\![n+1; +\infty[\![$, $\displaystyle\sum_{i=n}^{k-1} \binom{i-1}{i-n} = \sum_{i=n}^{k-1} \left(\binom{i}{i-n} - \binom{i-1}{i-1-n} \right) = \binom{k-1}{k-1-n}$.

☞ Pour info... La relation obtenue est la formule de Pascal généralisée...

9.c. Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall k \in [\![n;+\infty[\![,\ \mathbb{P}([Y_n = k]) = \binom{k-1}{k-n} p^n q^{k-n}$$

- **Initialisation.** Pour $n = 1$:
  On a, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:
  $$\begin{aligned}\binom{k-1}{k-1} p^1 q^{k-1} &= pq^{k-1} \\ &= \mathbb{P}([Y_1 = k]) \qquad Y_1 \hookrightarrow \mathscr{G}(p)\end{aligned}$$
  L'initialisation est ainsi vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons "$\forall k \in [\![n;+\infty[\![,\ \mathbb{P}([Y_n = k]) = \binom{k-1}{k-n} p^n q^{k-n}$" et montrons "$\forall k \in [\![n+1;+\infty[\![,\ \mathbb{P}([Y_{n+1} = k]) = \binom{k-1}{k-n-1} p^{n+1} q^{k-n-1}$".
  Remarquons déjà que, d'après la question 7.b :
  $$Y_{n+1} = Y_n + T_{n+1}$$
  Soit ensuite $k \in [\![n+1;+\infty[\![$.
  Puisque $Y_n(\Omega) \subset [\![n;+\infty[\![$, d'après la formule des probabilités totales, avec $([Y_n = i])_{i \in [\![n;+\infty[\![}$ comme système complet d'évènements, la série $\sum\limits_{i \geqslant n} \mathbb{P}([Y_n = i] \cap [Y_{n+1} = k])$ est convergente et :
  $$\begin{aligned}\mathbb{P}([Y_{n+1} = k]) &= \sum_{i=n}^{+\infty} \mathbb{P}([Y_n = i] \cap [Y_{n+1} = k]) \\ &= \sum_{i=n}^{+\infty} \mathbb{P}([Y_n = i] \cap [Y_n + T_{n+1} = k]) \\ &= \sum_{i=n}^{+\infty} \mathbb{P}([Y_n = i] \cap [T_{n+1} = k-i]) \\ &= \sum_{i=n}^{+\infty} \mathbb{P}([Y_n = i])\mathbb{P}([T_{n+1} = k-i]) \\ &= \sum_{i=n}^{k-1} \mathbb{P}([Y_n = i])\mathbb{P}([T_{n+1} = k-i]) \\ &= \sum_{i=n}^{k-1} \binom{i-1}{i-n} p^n q^{i-n} p q^{k-i-1} \\ &= p^{n+1} q^{k-n-1} \sum_{i=n}^{k-1} \binom{i-1}{i-n} \\ &= \binom{k-1}{k-1-n} p^{n+1} q^{k-n-1}\end{aligned}$$
  $T_1, \ldots, T_{n+1}$ sont indépendantes, donc par lemme des coalitions, $T_1 + \ldots + T_n$ et T_{n+1} également ; autrement dit, Y_n et T_{n+1} sont indépendantes
  $\forall i \in [\![n;+\infty[\![,\ k-i \in T_{n+1}(\Omega) \iff k-i \geqslant 1 \iff i \leqslant k-1$
  Donc : $\forall i > k-1,\ \mathbb{P}([T_{n+1} = k-i]) = 0$
  hypothèse de récurrence
  question précédente, licite car $n \in \mathbb{N}^*$ et $\geqslant n+1$
  L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $k \in [\![n;+\infty[\![,\ \mathbb{P}([Y_n = k]) = \binom{k-1}{k-n} p^n q^{k-n}$.

➟Réflexe !
Il faut un lien entre Y_{n+1} et Y_n dans l'hérédité...

9.d. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi binomiale négative de paramètres n et p définie à la question 4.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, puisque X_n désigne le nombre de FACE avant l'obtention du n-ième PILE et que Y_n désigne le rang du n-ème PILE, on a :
$$X_n = Y_n - n$$
Par conséquent $X_n(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$:
$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X_n = k]) &= \mathbb{P}([Y_n - n = k]) \\ &= \mathbb{P}([Y_n = n+k]) \\ &= \binom{n+k-1}{k} p^n q^k\end{aligned}$$
question précédente, licite car $n + k \in [\![n;+\infty[\![$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathscr{BN}(n;p)$.

Petite remarque
On peut conclure sur l'égalité $X_n(\Omega) = \mathbb{N}$, car d'après ce qui précède, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X_n = k]) \neq 0$, donc $[X_n = k] \neq \varnothing$...

L'expérience se poursuit maintenant de la sorte : si X_n prend la valeur k, on lance ensuite k fois la pièce et on note Z_n la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus.

10. En utilisant la fonction **Python** de la question 5, écrire une fonction telle que l'exécution de **simulZ(n,p)** renvoie une réalisation de la variable aléatoire Z.

```python
import numpy.random as rd

def simulZ(n,p):
    Y=simulY(n,p)
    X=Y-n
    Z=rd.binomial(X,p)
    return Z
```

11. Démontrer que $Z_n(\Omega) = \mathbb{N}$.

Procédons par double inclusion.

$\boxed{\subset}$ Puisque Z_n prend comme valeurs le nombre de PILE obtenus sur une succession de lancers, Z_n est à valeurs dans $\mathbb{N}$. D'où :
$$Z_n(\Omega) \subset \mathbb{N}$$

$\boxed{\supset}$ Soit $i \in \mathbb{N}$. Montrons que $[Z_n = i] \neq \varnothing$.
L'issue consistant à :

- ⋆ obtenir i FACE puis n PILE,
- ⋆ lancer ensuite i fois la pièce,
- ⋆ obtenir i PILE sur ces i lancers

réalise l'évènement $[Z_n = i]$. Ainsi : $\forall i \in \mathbb{N},\ [Z_n = i] \neq \varnothing$. D'où :
$$\mathbb{N} \subset Z_n(\Omega)$$

Conclusion : $Z_n(\Omega) = \mathbb{N}$.

12. Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Z_n sachant l'évènement $[X_n = k]$ est la loi binomiale de paramètre k et p.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons l'évènement $[X_n = k]$ réalisé. On lance donc f fois la pièce.

- L'expérience s'assimile alors à k répétitions indépendantes de la même épreuve de Bernoulli dont le succès "obtenir PILE" est de probabilité p.
- La variable aléatoire Z_n prend alors comme valeur le nombre de succès sur ces k répétitions.

Petite remarque
Il est possible de distinguer ici les cas $i \in [\![0;k]\!]$ et $i > k$, mais ce n'est pas nécessaire : cette information est incluse dans "la loi conditionnelle de Z_n sachant l'évènement $[X_n = k]$ est la loi binomiale de paramètre k et p".

Conclusion : pour tout $k \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Z_n sachant l'évènement $[X_n = k]$ est la loi binomiale de paramètre k et p.
Autrement dit :
$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall i \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}_{[X=k]}\big([Z_n = i]\big) = \begin{cases} \dbinom{k}{i} p^i q^{k-i} & \text{si } i \in [\![0;k]\!] \\ 0 & \text{si } i > k \end{cases}$$

Important !
On a établi que $Z_n(\Omega) = \mathbb{N}$ en question précédente... Et il faut donc donner la probabilité $\mathbb{P}_{[X=k]}\big([Z = i]\big)$ pour tous les i de $\mathbb{N}$, pas seulement de $[\![0;k]\!]$...

13. Calculer alors, pour tout $i \in \mathbb{N}$, la probabilité $\mathbb{P}\big([Z_n = i]\big)$ puis reconnaître la loi de Z_n.

Soit $i \in \mathbb{N}$. D'après la formule des probabilités totales, avec $\big([X_n = k]\big)_{k \in \mathbb{N}}$ comme système complet d'évènements, la série $\sum\limits_{k \geqslant 0} \mathbb{P}\big([X_n = k] \cap [Z_n = i]\big)$ est convergente et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([Z_n = i]\big) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_n = k] \cap [Z_n = i]\big) && \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([X_n = k]\big) \neq 0 \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_n = k]\big) \mathbb{P}_{[X_n=k]}\big([Z_n = i]\big) && \text{d'après la question précédente : } \forall k < i,\ \mathbb{P}_{[X_n=k]}\big([Z_n = i]\big) = 0 \\
&= \sum_{k=i}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_n = k]\big) \mathbb{P}_{[X_n=k]}\big([Z_n = i]\big) && \text{questions 9.d et 12} \\
&= \sum_{k=i}^{+\infty} \binom{n+k-1}{k} p^n q^k \binom{k}{i} p^i q^{k-i} \\
&= p^{n+i} \sum_{k=i}^{+\infty} \binom{n+k-1}{k} \binom{k}{i} q^k q^{k-i} \\
&= p^{n+i} \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} \frac{k!}{i!(k-i)!} q^k q^{k-i} \\
&= \frac{1}{i!(n-1)!} p^{n+i} \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{(n+k-1)!}{(k-i)!} q^k q^{k-i}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(n+i-1)!}{i!(n-1)!} p^{n+i} \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{(n+k-1)!}{(n+i-1)!(k-i)!} q^k q^{k-i} \\
&= \binom{n+i-1}{i} p^{n+i} \sum_{k=i}^{+\infty} \binom{n+k-1}{k-i} q^k q^{k-i} \qquad j = k-i \\
&= \binom{n+i-1}{i} p^{n+i} \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{n+j+i-1}{j} q^{j+i} q^j \\
&= \binom{n+i-1}{i} p^{n+i} q^i \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{j+n+i-1}{j} (q^2)^j \qquad \text{d'après la question 4 : } \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{j+n+i-1}{j} (1-q^2)^{n+i} (q^2)^j = 1 \text{ (avec } m = n+i \text{ et } p' = 1-q^2\text{)} \\
&= \binom{n+i-1}{i} \frac{p^{n+i} q^i}{(1-q^2)^{n+i}} \\
&= \binom{n+i-1}{i} \frac{p^{n+i} q^i}{(1-q)^{n+i}(1+q)^{n+i}} \\
&= \binom{n+i-1}{i} \left(\frac{1}{1+q}\right)^n \left(\frac{q}{1+q}\right)^i \\
&= \binom{n+i-1}{i} \left(\frac{1}{1+q}\right)^n \left(1 - \frac{1}{1+q}\right)^i
\end{aligned}
$$

Conclusion : $Z_n \hookrightarrow \mathscr{B}\mathscr{N}\left(n; \frac{1}{1+q}\right)$.

★★★★★★★ Fin ★★★★★★★