Devoir surveillé 2
Samedi 12 octobre 2024 - 4h00

Consignes à lire !

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :

- ***la copie doit être prise de sorte que la marge se situe à droite de chaque page,***
- ***la première page de la copie doit rester vierge et sera réservée aux appréciations,***
- ***toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,***
- ***les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),***
- ***les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.***

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

"Face à la roche, le ruisseau l'emporte toujours, non pas par la force mais par la persévérance."
Horace Jackson Brown

Exercice 1

Question de cours. Convergence et divergence des suites réelles monotones.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$$

1. 1.a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ n'a qu'une seule solution positive, notée u_n.
   1.b. Calculer u_1 et u_2.
   1.c. Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \in \left]0, \dfrac{2}{3}\right[$.
2. 2.a. Montrer que, pour tout $x \in]0, 1[$, on a : $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
   2.b. En déduire les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   2.c. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. On note ℓ sa limite.
3. 3.a. Déterminer la limite de $(u_n)^n$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   3.b. Donner enfin la valeur de ℓ.
4. La série de terme général u_n est-elle convergente ?
5. 5.a. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2 - 3u_n \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.
   5.b. Montrer que la série de terme général $\dfrac{2}{3} - u_n$ est convergente.
6. Recopier et compléter les lignes manquantes du programme ci-dessous de sorte que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'exécution de **`approx_u(n)`** renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près obtenue par la méthode de dichotomie.

```python
def f(n,x):
    y=x**n+9*x**2-4
    return y

def approx_u(n):
    a = ......
    b = ......
    while ......
        m = ......
        if f(n,m)>0:
            ......
        elif f(n,m)<0:
            ......
        else :
            ......
    return ......
```

Exercice 2

Question de cours. Famille génératrice d'un espace vectoriel de dimension finie. Que dire de son cardinal ?

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre trois à coefficients réels, I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et 0_3 la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On considère, pour toute matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, les ensembles $\mathscr{E}_1(A)$ et $\mathscr{E}_2(A)$ suivants :

$$\mathscr{E}_1(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ /\ AM = M\} \quad ; \quad \mathscr{E}_2(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ /\ A^2M = AM\}$$

Partie I

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathscr{E}_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   On admet que $\mathscr{E}_2(A)$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. 2.a. Établir : $\mathscr{E}_1(A) \subset \mathscr{E}_2(A)$.
   2.b. Montrer que si A est inversible, alors $\mathscr{E}_1(A) = \mathscr{E}_2(A)$.
3. 3.a. Établir que si $A - I_3$ est inversible, alors $\mathscr{E}_1(A) = \{0_3\}$.
   3.b. Un exemple. Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer $\mathscr{E}_1(B)$ et $\mathscr{E}_2(B)$.

Partie II

On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Calculer $C^2 - C$.
5. Notons $E_0(C) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ CX = 0_{3,1}\}$ et $E_1(C) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ CX = X\}$. Montrer que $E_0(C)$ et $E_1(C)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et en déterminer une base de chaque.
6. Démontrer que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
7. Considérons la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Sans calcul justifier que P est inversible, puis calculer P^{-1}.

   On admet alors que $P^{-1}CP = D$, où $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
8. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}M$. Établir :
$$M \in \mathscr{E}_1(C) \iff N \in \mathscr{E}_1(D)$$
9. Montrer que $N \in \mathscr{E}_1(D)$ si, et seulement si, il existe six réels a, b, c, d, e, f tels que $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
10. En déduire une base de $\mathscr{E}_1(D)$ puis une base de $\mathscr{E}_1(C)$.
11. Déterminer $\mathscr{E}_2(C)$.

Exercice 3

Question de cours. Définition et propriétés de $\binom{n}{k}$, où $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0; n]\!]$.

Partie I

Dans cette partie, r désigne un entier naturel et x un réel de $]0; 1[$.

1. Établir : $\displaystyle\binom{n}{r} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^r}{r!}$.
2. 2.a. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^{r+2}x^n$.

   2.b. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant r} \binom{n}{r} x^n$ est convergente.
3. On pose $S_r = \displaystyle\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^n$.

   3.a. Calculer S_0.

   3.b. Établir, en utilisant la formule du triangle de Pascal, que $(1-x)S_{r+1} = xS_r$.

   3.c. Démontrer alors :
$$\forall r \in \mathbb{N},\ S_r = \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}$$
4. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On considère un réel $p \in]0; 1[$ ainsi que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall k \in \mathbb{N},\ u_k = \displaystyle\binom{k+m-1}{k} p^m(1-p)^k$.

   Démontrer que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définit une loi de probabilité. Autrement dit, vérifier :
   - $\forall k \in \mathbb{N},\ u_k \geqslant 0$,
   - la série $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k$ est convergente de somme égale à 1.

   On dira qu'une variable aléatoire X définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suit la *loi binomiale négative de paramètres m et p*, on notera $X \hookrightarrow \mathscr{BN}(m; p)$ lorsque : $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\big([X = k]\big) = \displaystyle\binom{k+m-1}{k} p^m(1-p)^k$.

Partie II

Soit $p \in]0;1[$. On effectue une succession infinie de lancers d'une même pièce donnant PILE avec la probabilité p et FACE avec la probabilité $q = 1-p$.
On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Y_n la variable aléatoire égale au rang d'apparition du n-ième PILE et X_n le nombre de FACE obtenus avant l'apparition du n-ième PILE.
On définit également une suite de variables aléatoires $(T_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ par :

- $T_1 = Y_1$
- pour tout $k \in [\![2;+\infty[\![$, $T_k = Y_k - Y_{k-1}$.

On admet que toutes les variables aléatoires de l'exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et on admet également que les variables aléatoires $T_1, T_2, \ldots$ sont mutuellement indépendantes.

5. Recopier et compléter les lignes manquantes du programme ci-dessous de sorte que l'exécution de **simulY(n,p)** simule l'expérience et renvoie une réalisation de la variable aléatoire Y_n.

```python
import numpy.random as rd

def simulY(n,p):
    Y=0
    nb=0
    while .......
        Y=Y+1
        if rd.random()<p:
            ......
    return ......
```

6. 6.a. Donner la loi de Y_1.
   6.b. Exprimer X_1 en fonction de Y_1 puis en déduire la loi de X_1 ainsi que son espérance et sa variance.
7. 7.a. Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, T_k suit la loi géométrique de paramètre p.
   7.b. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ Y_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} T_k$.
   7.c. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Y_n possède une espérance et une variance à déterminer.
   7.d. Proposer une fonction **Python**, différente de celle donnée en question 5, qui renvoie une réalisation de la variable aléatoire Y_n.
8. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y_2.
9. 9.a. Justifier rapidement que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n(\Omega) \subset [\![n;+\infty[\![$.
   9.b. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![n+1;+\infty[\![$. Établir :

$$\sum_{i=n}^{k-1} \binom{i-1}{i-n} = \sum_{i=n}^{k-1} \left(\binom{i}{i-n} - \binom{i-1}{i-1-n} \right) = \binom{k-1}{k-1-n}$$

   9.c. Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall k \in [\![n;+\infty[\![,\ \mathbb{P}\big([Y_n = k]\big) = \binom{k-1}{k-n} p^n q^{k-n}$$

   9.d. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi binomiale négative de paramètres n et p définie à la question 4.

L'expérience se poursuit maintenant de la sorte : si X_n prend la valeur k, on lance ensuite k fois la pièce et on note Z la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus.

10. En utilisant la fonction **Python** de la question 5, écrire une fonction telle que l'exécution de **simulZ(n,p)** renvoie une réalisation de la variable aléatoire Z.
11. Démontrer que $Z(\Omega) = \mathbb{N}$.
12. Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Z sachant l'évènement $[X_n = k]$ est la loi binomiale de paramètre k et p.
13. Calculer alors, pour tout $i \in \mathbb{N}$, la probabilité $\mathbb{P}\big([Z = i]\big)$ puis reconnaître la loi de Z.

★★★★★★★ Fin ★★★★★★★