Concours blanc 2 - Épreuve 1

Samedi 14 mai - 4h00

NOM .... Prénom ....

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation. Quelques précisions :

- ***la copie devra présenter une marge ainsi qu'une en-tête suffisantes,***
- ***toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,***
- ***les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),***
- ***les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.***

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.

"*L'ambition est impitoyable : tout mérite qui ne la sert pas est méprisable à ses yeux.*"
Joseph Joubert

Exercice 1

On note $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$; on rappelle qu'on a ainsi : $P_0(X) = 1$, $P_1(X) = X$ et $P_2(X) = X^2$. On note également id l'endomorphisme identité sur $\mathbb{R}_2[X]$.
On considère l'application f qui, à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$, associe le polynôme $f(P)$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ f(P)(X) = 2XP(X) - (X^2-1)P'(X)$$

1. (a) Montrer que f est une application linéaire.
   (b) En écrivant $P(X) = aX^2 + bX + c$, définir explicitement $f(P)$ puis en déduire que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (c) Écrire $f(P_0)$, $f(P_1)$ et $f(P_2)$ comme des combinaisons linéaires de P_0, P_1 et P_2, puis en déduire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. *On notera* A *cette matrice.*
   (d) En déduire le rang de f. f est-il un automorphisme ?
2. Justifier que $\ker(f)$ est de dimension un puis en donner une base constituée d'un seul polynôme, noté Q_0.
3. (a) Déterminer les réels λ tels que $f - \lambda\mathrm{id}$ ne soit pas bijectif.
   (b) Pour chaque valeur de λ trouvée à la question précédente : justifier que $\ker(f - \lambda\mathrm{id})$ est de dimension un puis en donner une base constituée d'un seul polynôme noté Q_λ.
   (c) On admet que les polynômes Q_λ obtenus à la question précédente forment une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Donner la matrice de f dans cette base.

★★★★★★★

Exercice 2

Deux joueurs, A et B, décident de s'affronter dans un jeu de hasard.

- Le joueur A lance une pièce donnant PILE avec la probabilité $\frac{2}{3}$, et FACE avec la probabilité $\frac{1}{3}$ jusqu'à l'apparition du second PILE. On note X_A la variable aléatoire égale au nombre de FACE alors obtenues.
- Le joueur B lance une pièce donnant PILE avec la probabilité p ($p \in]0;1[$), et FACE avec la probabilité $q = 1-p$ jusqu'à l'apparition du premier PILE. On note X_B la variable aléatoire égale au nombre de FACE alors obtenues.

Dans ces conditions de jeu, X_A et X_B sont indépendantes. Le gagnant est celui ayant obtenu le moins de FACE. En cas d'égalité, aucun des deux joueurs ne gagne : il y a match nul.
On note :

- G l'événement "A gagne",
- H l'événement "B gagne",
- N l'évènement "il y a match nul".

On admet que le jeu se termine presque-sûrement.

1. **Loi de X_B.** On note Y_B le nombre de lancers effectués par le joueur B.
   (a) Reconnaître la loi de Y_B. Préciser $Y_B(\Omega)$, $\mathbb{P}([Y_B = k])$ pour tout $k \in Y_B(\Omega)$, puis rappeler son espérance et sa variance.
   (b) En déduire la loi de X_B ainsi que son espérance et sa variance.
   (c) On note E l'évènement "le joueur B obtient un nombre pair de FACE". Calculer $\mathbb{P}(E)$.
2. **Loi de X_A.**
   (a) Donner l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X_A.
   (b) Soit $n \in X_A(\Omega)$. Écrire l'évènement $[X_A = n]$ comme union d'évènements deux à deux incompatibles. En déduire :

$$\mathbb{P}([X_A = n]) = (n+1)\frac{4}{3^{n+2}}$$

   (c) Justifier que X_A possède une espérance et la calculer. Interpréter le résultat obtenu.
3. **Le jeu.** L'objectif de cette question est d'étudier le jeu en question.
   (a) **Simulation informatique.**
      i. Écrire une fonction Python de sorte que la commande `simulXB(p)` renvoie une réalisation de la variable aléatoire X_B lorsque la probabilité d'obtenir PILE est p.
      ii. Expliquer ce que permet d'obtenir la fonction `mystere` suivante :

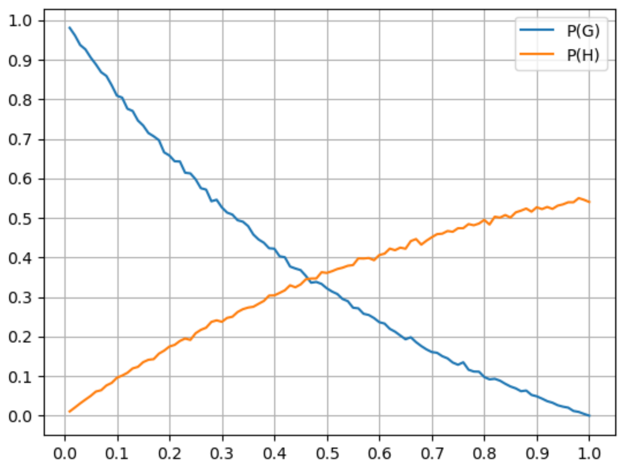
```
import numpy.random as rd

def mystere():
    n=0
    while rd.rand()<1/3:
        n=n+1
    while rd.rand()<1/3:
        n=n+1
    return n
```

iii. Recopier et compléter les lignes manquantes de la fonction ci-dessous de sorte que les variables locales `pG,pH,pN` contiennent respectivement des valeurs approchées de $\mathbb{P}(G)$, $\mathbb{P}(H)$, $\mathbb{P}(N)$.

```python
def probas(p):
    nG,nH,nN=0,0,0
    for k in range(10000):
        XA=mystere()
        XB=simulXB(p)
        if ......
            nG=nG+1
        elif ......
            ......
        else:
            ......
    pG,pH,pN=......
    return pG,pH,pN
```

iv. L'exécution de la commande `probas(0.66)` renvoie : `(0.1911, 0.4344, 0.3745)`. Interpréter ces valeurs dans le contexte de l'exercice.

v. Cette fonction nous permet de tracer, en fonction de p, une estimation de $\mathbb{P}(G)$ et $\mathbb{P}(H)$. On obtient le graphique suivant :



Interpréter, dans le contexte de l'exercice, l'abscisse du point d'intersection entre ces deux courbes.

(b) Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X_B > n]) = q^{n+1}$.

(c) Justifier l'égalité $\mathbb{P}(G) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X_A = n])\mathbb{P}([X_B > n])$. En déduire que $\mathbb{P}(G) = \dfrac{4q}{(3-q)^2}$.

(d) Déterminer $\mathbb{P}(N)$.

(e) En déduire la valeur de p à choisir pour que le jeu soit équitable.

★★★★★★★

Exercice 3

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\,dx$ et $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$.

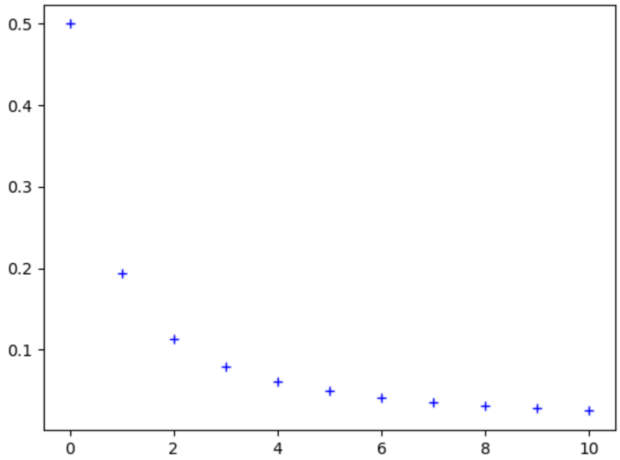
1. Justifier, pour tout entier naturel n, l'existence de I_n et J_n.
2. Calculer I_0 et I_1.
3. Étudier les variations de la suite (I_n).
4. (a) Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n = \dfrac{1}{n+1}$.

   (b) En déduire I_2.
5. (a) A l'aide de la relation établie à la question 4(a), écrire une fonction `Python` d'en-tête `def I(n):` qui renvoie la valeur de I_n pour $n \in \mathbb{N}$.

   (b) On considère le programme suivant :

```python
Labs = ................
Lord = ................
plt.plot(Labs,Lord,'b+')
plt.show()
```

Recopier et compléter les lignes de ce programme, de sorte que son exécution permette d'obtenir le graphique suivant, sur lequel les termes d'indices 0 à 10 de la suite (I_n) sont représentés.



(c) On considère la fonction Python suivante, dans laquelle on utilise la fonction créée à la question 5(a).

```python
def seuil(p):
    n=0
    while I(n)>p:
        n=n+1
    return n
```

Que faudrait-il démontrer sur la suite (I_n) pour avoir la garantie que le programme s'arrête pour toute valeur strictement positive de p ?

6. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \mathrm{I}_n \leq \dfrac{1}{n+1}$. En déduire que la suite (I_n) est convergente et donner sa limite.
7. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{I}_n = n\mathrm{J}_{n-1} - \dfrac{1}{2}$.
8. (a) Calculer J_0 puis exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{J}_{n+1} + \mathrm{J}_n$ en fonction de n.
   (b) En déduire J_1.
9. Démontrer par récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{J}_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$$
10. (a) Utiliser les résultats des questions 6 et 7 pour justifier que la suite (J_n) converge vers 0.
    (b) En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ puis donner la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.
    (c) Démontrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\mathrm{J}_n = \frac{1}{2}$.

★★★★★★★

Exercice 4

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :
$$\forall x \in]0;+\infty[,\ f(x) = x - \ln(x)$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in]0;+\infty[$, admet exactement deux solutions, notées a et b, telles que $0 < a < 1 < b$.
3. Justifier que : $b \in [2;4]$.
4. Recopier et compléter les lignes manquantes du programme suivant afin que l'exécution de `def b(p):` renvoie une valeur approchée de b à p près, où p est un réel strictement positif, obtenue par la méthode de dichotomie.

```python
import numpy as np

def g(x):
    return ......

def b(p):
    x1 =...
    x2 =...
    while ......
        m=(x1+x2)/2
        if g(m)==0:
            ......
        elif ......
            x2=m
        elif ......
            ......
    return ......
```

Partie II : Étude d'une suite

On définit maintenant la suite (u_n) par : $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq b$.
6. Écrire une fonction Python d'en-tête `def u(n):` qui, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}$, renvoie la valeur de u_n.
7. Déterminer la monotonie de la suite (u_n). En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.
8. (a) Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - b \leq \dfrac{1}{2}(u_n - b)$.

   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n - b \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

   (c) Retrouver alors le résultat obtenu à la question 7, puis déterminer un entier à partir duquel u_n est proche de b à 10^{-3} près.

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

Considérons la fonction :

$$\varphi : x \longmapsto \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\, dt$$

9. Montrer que φ est bien définie et dérivable sur $]0;+\infty[$, et que l'on a :

$$\forall x \in]0;+\infty[,\ \varphi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}$$

10. En déduire les variations de φ sur $]0;+\infty[$.
11. Montrer que : $\forall x \in]0;+\infty[$, $0 \leq \varphi(x) \leq x$.
12. (a) Montrer que φ est prolongeable par continuité en 0.
    On note encore φ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\varphi(0)$.

    (b) Montrer que : $\lim\limits_{x \to 0} \varphi'(x) = 0$.
    On admet que la fonction φ est alors dérivable en 0 et que $\varphi'(0) = 0$.
13. (a) Démontrer que pour tout $t \geq 4$: $\dfrac{1}{t} \leq \dfrac{1}{f(t)} \leq \dfrac{1}{t - \sqrt{t}}$.

    (b) Considérons la fonction $h : t \longmapsto 2\ln\left(\sqrt{t} - 1\right)$ définie sur $[4;+\infty[$. Dériver h.

    (c) En déduire que pour tout $x \geq 4$:

$$\ln(2) \leq \varphi(x) \leq 2\ln\left(\frac{\sqrt{2x} - 1}{\sqrt{x} - 1}\right)$$

    (d) Déterminer la limite de φ en $+\infty$.
14. Tracer l'allure de la courbe représentative de φ dans un repère orthonormé du plan. On veillera à faire apparaître les différentes tangentes ou asymptotes connues.
    Donnée : $\varphi(2) \simeq 1,1$.

★★★★★★★

Fin du sujet