Devoir surveillé 1

Samedi 11 septembre - 2h00

"Je ne crois pas au génie, seulement au dur travail."
Michel Petrucciani

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation. Quelques précisions :

- ***les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),***
- ***les questions doivent être présentées dans l'ordre du sujet.***

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.

NOM .... Prénom ....

Exercice 1 - Questions de cours & technique

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Traduire les énoncés suivant avec des quantificateurs (f désigne une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et (u_n) désigne une suite définie sur $\mathbb{N}$) :
   (a) La fonction f est bornée par -1 et 2 sur $\mathbb{R}$.
   $\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leq f(x) \leq 2$
   (b) La fonction f n'est pas majorée sur $\mathbb{R}$.
   $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R} \ /\ f(x) > M$
   (c) La fonction f n'est pas paire.
   $\exists x \in \mathbb{R},\ /\ f(-x) \neq f(x)$
   (d) La fonction f s'annule sur $\mathbb{R}$.
   $\exists x \in \mathbb{R} \ /\ f(x) = 0$
   (e) La suite (u_n) est constante.
   $\exists C \in \mathbb{R} \ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = C$
   (f) L'entier relatif n est impair.
   $\exists k \in \mathbb{Z} \ /\ n = 2k+1$

> ☞ **Rappels...**
> • Soit $M \in \mathbb{R}$. f est majorée sur $\mathbb{R}$ par M lorsque "$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq M$".
> • f est majorée sur $\mathbb{R}$ lorsque : "$\exists M \in \mathbb{R} \ /\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq M$".

> ☞ **Rappel...**
> f, définie sur $\mathbb{R}$, est paire lorsque : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$".

> ✘ **Attention !**
> Ne pas confondre "s'annule" est "est nulle".

2. Écrire, avec des quantificateurs, la négation de l'énoncé suivant :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \Big(x \geq 5 \Longrightarrow f(x) < 0\Big)$$
où f désigne une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
$\exists x \in \mathbb{R} \ /\ \big(x \geq 5 \text{ ET } f(x) \geq 0\big)$

3. Pour chacune des propositions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse, et justifier.
   (a) $\forall a,b,c,d \in \mathbb{R},\ \big(\text{"}a \leq b \text{ ET } c \leq d\text{"} \Longrightarrow ac \leq bd\big)$
   FAUX (montrons que : $\exists a,b,c,d \in \mathbb{R} \ /\ \text{"}a \leq b \text{ ET } c \leq d\text{"} \text{ ET } ac > bd$).
   Posons $a=-2$, $b=1$, $c=-3$ et $d=2$. On a $a \leq b$ ET $c \leq d$, et pourtant $ac = 6 > 2 = bd$.

> **Petite remarque**
> En revanche, si $a,b,c,d \in \mathbb{R}^+$, c'est vrai (il suffit même que $b,c,d \in \mathbb{R}^+$...).

   (b) $\forall a,b \in \mathbb{R}^+,\ \sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$
   FAUX (montrons que : $\exists a,b \in \mathbb{R}^+ \ /\ \sqrt{a+b} \neq \sqrt{a}+\sqrt{b}$).
   Si on pose $a=b=1$, on a d'une part $\sqrt{2}$ et d'autre part 2, qui sont différents.
   (c) $\exists a,b \in \mathbb{R}^* \ /\ \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{2}{a+b}$
   FAUX (montrons que : $\forall a,b \in \mathbb{R}^*,\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \neq \frac{2}{a+b}$).
   Soient $a,b \in \mathbb{R}^*$, on a :
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} = \frac{2}{a+b} \iff \frac{a+b}{ab} = \frac{2}{a+b} \underset{a+b,ab\neq 0}{\iff} (a+b)^2 = 2ab \iff a^2+b^2 = 0$$
   Cette dernière égalité est fausse puisque $a,b \in \mathbb{R}^*$. Étant équivalente à la première égalité, on en déduit que l'égalité $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} = \frac{2}{a+b}$ est fausse pour tous $a,b \in \mathbb{R}^*$.
   (d) $\forall a,b \in \mathbb{R}_*^+ \ /\ \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2$
   VRAI
   En effet, soient $a,b \in \mathbb{R}_*^+$:
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2 \underset{a,b>0}{\iff} a^2+b^2 \geq 2ab \iff a^2-2ab+b^2 \geq 0 \iff (a-b)^2 \geq 0$$
   Cette dernière inégalité est vraie. Étant équivalente à la première inégalité, on en déduit que l'inégalité $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$ est vraie pour tous $a,b \in \mathbb{R}_*^+$.

(e) Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(-2) = -f(2)$, alors f est impaire.

FAUX (montrons qu'il existe une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(-2) = -f(2)$, sans que f ne soit impaire). Posons $f : x \longmapsto (x+2)(x-2)$. Ainsi, $f(-2) = 0$ et $f(2) = 0$, donc $f-2) = -f(2)$; et pourtant f n'est pas impaire puisque $f(-1) = -3 \neq -f(1)$.

> **Petite remarque**
> Ici, f est même paire...

(f) Si f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, telles que f est croissante et g est décroissante, alors $f \circ g$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

VRAI

En effet, soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 < x_2$.

En appliquant g, qui est décroissante sur $\mathbb{R}$, on a :

$$g(x_1) \geq g(x_2)$$

Et en appliquant f, qui est croissante sur $\mathbb{R}$, on obtient :

$$f(g(x_1)) \geq f(g(x_2))$$

Autrement dit :

$$(f \circ g)(x_1) \geq (f \circ g)(x_2)$$

C'est à dire que $f \circ g$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

(g) Si f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, telles que f est croissante et g est décroissante, alors $f + g$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

FAUX (montrons qu'il existe deux fonctions f et g, telles que f croissante, g croissante, mais que $f + g$ ne soit pas décroissante).

Considérons $f : x \longmapsto x$ ainsi que $g : x \longmapsto \frac{-1}{2}x$. La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$, la fonction g est décroissante sur $\mathbb{R}$, et pourtant la fonction $f + g : x \longmapsto \frac{1}{2}x$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

> **Petite remarque**
> Selon les cas, il est possible que $f+g$ soit croissante, décroissante, ou non monotone !

4. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\frac{x-2}{x-1} \neq 1$.

Plusieurs méthodes possibles :

- Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. On a :

$$x - 2 \neq x - 1$$

Donc, en divisant par $x-1$, qui est différent de 0, on obtient :

$$\frac{x-2}{x-1} \neq \frac{x-1}{x-1}$$

Autrement dit :

$$\frac{x-2}{x-1} \neq 1$$

> **Conclusion :** pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\frac{x-2}{x-1} \neq 1$.

- **Par l'absurde.** Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ tel que $\frac{x-2}{x-1} = 1$. En multipliant par $x-1$, on obtient ainsi $x - 2 = x - 1$, et donc $-2 = -1$: absurde.

> **Conclusion :** pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\frac{x-2}{x-1} \neq 1$.

- En montrant que l'équation $\frac{x-2}{x-1} = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ n'a aucune solution.

5. Déterminer tous les réels x tels que $\sqrt{x+1} = \frac{-1}{3}x + 3$.

Raisonnons par analyse synthèse...

- **Analyse.** Soit $x \in \mathbb{R}$.

Si $\sqrt{x+1} = \frac{-1}{3}x + 3$, alors en élevant au carré :

$$x + 1 = \frac{1}{9}x^2 - 2x + 9$$

Et ainsi :

$$\frac{1}{9}x^2 - 3x + 8 = 0$$

Ce qui donne (après calcul du discriminant, qui vaut $\frac{49}{9}$) :

$$\begin{cases} x = 3 \\ \text{ou} \\ x = 24 \end{cases}$$

Conclusion : les candidats-solutions sont 3 et 24.

- **Synthèse.**

Sans difficulté, 3 est solution, mais pas 24.

> **Rédaction**
> On peut également rédiger à l'aide d'implications, mais on commence tout de même avec "Soit $x \in \mathbb{R}$". Le reste sera de la forme :
> $\sqrt{x+1} = \frac{-1}{3}x + 3 \Longrightarrow \ldots$
> et on indiquera alors en bout de ligne les opérations effectuées ainsi que les éventuelles justifications.

> **Conclusion :** il existe un unique réel x tel que $\sqrt{x+1} = \frac{-1}{3}x + 3$, il s'agit de 3.

6. Résoudre l'inéquation $x^3 > x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$x^3 > x \iff x^3 - x > 0 \iff x(x^2-1) > 0 \iff x(x+1)(x-1) > 0$$

Tableau de signes de $x(x+1)(x-1)$:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x(x+1)(x-1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Conclusion : $x^3 > x$ lorsque $x \in]-1;0[\cup]1;+\infty[$.

7. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{4x^2+4x+1}}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.
$f(x)$ existe si, et seulement si, $4x^2+4x+1>0$. Or :

$$4x^2+4x+1 = (2x+1)^2$$

Donc :

$$4x^2+4x+1>0 \iff x \neq \frac{-1}{2}$$

Conclusion : l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{-1}{2}\right\}$.

Petite remarque
Si ça vous chante, vous calculez le discriminant et vous faites un tableau de signes avec la règle "du signe de a à l'extérieur des racines" ! Ce qui justifie que $4x^2+4x+1$ est bien toujours strictement positif dès que $x \neq \frac{-1}{2}$.

8. Considérons la fonction f, définie sur $\mathbb{R}_*^+$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - \ln(x)$. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}_*^+$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_*^+$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+,\ f'(x) = x - \frac{1}{x} \underset{\text{Réflexe !}}{=} \frac{x^2-1}{x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x}$$

D'où on obtient :

x	0		1		$+\infty$
x	0	+		+	
x+1		+		+	
x-1		-	0	+	
$f'(x)$	||	$-$	0	+	
f	||	↘	$\frac{1}{2}$	↗	

9. Considérons la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + n - 1 \end{cases}$.

Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n - n$.

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
  D'une part $u_0 = 1$ et d'autre part $2^0 - 0 = 1 - 0 = 1$: l'initialisation est ainsi vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que "$u_n = 2^n - n$" et montrons que "$u_{n+1} = 2^{n+1} - (n+1)$".
  On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2u_n + n - 1 \\ &= 2(2^n - n) + n - 1 \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= 2^{n+1} - 2n - 1 \\ &= 2^{n+1} - (n+1) \end{aligned}$$

L'hérédité est ainsi vérifiée.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n - n$.

10. Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ \ (1+x)^n \geq 1 + nx$$

Par récurrence...

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
  Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $(1+x)^0 = 1$ et $1 + 0 \times x = 1$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $(1+x)^0 \geq 1 + 0 \times x$: l'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que "$\forall x \in \mathbb{R}^+$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$" et montrons que "$\forall x \in \mathbb{R}^+$, $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$".
  Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Par hypothèse de récurrence, on a :

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

D'où, en multipliant par $1+x$ (positif car $x \in \mathbb{R}^+$) :

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x)$$

C'est à dire :

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + nx + x + nx^2$$

Mais $n \geq 0$ et $x^2 \geq 0$, donc $nx^2 \geq 0$. Ainsi :

$$1 + nx + x + nx^2 \geq 1 + nx + x = 1 + (n+1)x$$

On en déduit donc :

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$$

L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : par récurrence, on a démontré que pour tout $n \in \mathrm{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

✓ Rigueur !
Ne pas oublier de quantifier le x... Soit dans la récurrence (en début d'initialisation puis en début d'hérédité) ; soit avant la récurrence pour être tranquille.

Important !
On mentionne les arguments utiles sur la manipulation des inéquations.

✘ Attention !
On ne veut pas d'équivalence dans l'hérédité... Déjà parce-que l'hérédité consiste à vérifier une implication ; et aussi parce-qu'en général, vous ne savez pas rédiger correctement par équivalence !

Exercice 2 - QCM

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chaque question, une seule des quatre réponses est exacte. Entourer cette réponse.

1. Les solutions de l'équation $x^2 - x - 2 = 0$ sont :

   a) 1 et 2 | b) -1 et 2 | c) cette équation n'a pas de solution réelle | d) aucune des trois propositions

   Sans difficulté : réponse b.

2. Si pour tout $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{1}{x} + x$, alors, pour tout $x \neq 0$, $f'(x) =$

   a) $\dfrac{-1+x^2}{x^2}$ | b) $\dfrac{1}{x^2} + 1$ | c) $\dfrac{-1}{x^2} + x$ | d) aucune des trois propositions

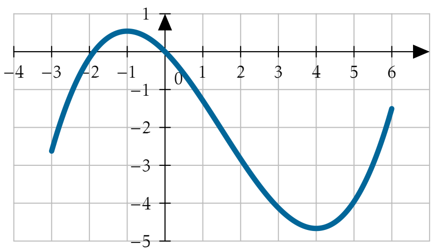
   Sans difficulté : réponse a.

3. Si pour tout $x \neq \dfrac{1}{2}$, $f(x) = \dfrac{x+1}{2x-1}$, alors, pour tout $x \neq \dfrac{1}{2}$, $f'(x) =$

   a) $\dfrac{1}{(2x-1)^2}$ | b) $\dfrac{3}{(2x-1)^2}$ | c) $\dfrac{-1}{(2x-1)^2}$ | d) aucune des trois propositions

   On trouve : $f'(x) = \dfrac{-3}{(2x-1)^2}$. Réponse *d*.

4. On considère la fonction f, définie et dérivable sur $[-3;6]$, dont la courbe représentative est donnée :



   On a :

   a) $f'(0) = 0$ | b) $f'(0) = -1$ | c) $f'(-1) = 0,6$ | d) $f'(-2) = -1$

   Sans difficulté : réponse b ($f'(0)$ représente le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0).

5. Dans le même contexte que la question précédente,

   a) $f'(x) \geq 0$ sur $[-2;0]$ | b) $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = -1$ | c) f' est monotone sur $[-3;6]$ | d) aucune des trois propositions

   Réponse d...
   En effet :
   - la réponse a est fausse car la fonction f n'est pas croissante sur $[-2;0]$;
   - la réponse b est fausse, car $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ \text{ou} \\ x = 4 \end{cases}$ ...
   - la réponse c est fausse puisque f' passe de positif à négatif puis à nouveau positif (car f est croissante, puis décroissante puis à nouveau croissante) ; elle ne peut donc pas être monotone.

Exercice 3 - Étude d'une fonction

Notons f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^3-4}{4x+4}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Étudier la parité de f.
   Puisque l'ensemble de définition de f, qui est $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, n'est pas symétrique par rapport à 0, la fonction f n'est ni paire ni impaire.

✘ Attention !
Il est faux de dire : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $f(-x) \neq f(x)$ (car $f(-0) = f(0)$...) ! La négation de "f est paire" est :"$\exists x \in \mathcal{D}_f$ / $f(-x) \neq f(x)$".

2. Déterminer la dérivée de f.

On a : $f=\dfrac{u}{v}$ avec $u : x \longmapsto x^3-4$ et $v : x \longmapsto 4x+4$.
Puisque u et v sont dérivables et que v ne s'annule pas sur $]-\infty;-1[$ et $]-1;+\infty[$, on en déduit que f est dérivable sur $]-\infty;-1[$ et $]-1;+\infty[$. De plus :

$$\forall x \neq -1,\ \ f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2}=\frac{3x^2(4x+4)-4(x^3-4)}{(4x+4)^2}=\frac{12x^3+12x^2-4x^3+16}{(4x+4)^2}=\frac{8x^3+12x^2+16}{(4x+4)^2}$$

3. On considère maintenant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=2x^3+3x^2+4$.
   (a) Dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.
   Pour cela, étudions le signe de la dérivée de g.
   g est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme) et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ g'(x)=6x^2+6x=6x(x+1)$$

   On en déduit :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
signe de $6x$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de g		$\nearrow$	5	$\searrow$	4	$\nearrow$	

   (b) Calculer $g(-2)$ puis en déduire le tableau de signes de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
   $g(-2)=0$.
   Puisque g est croissante sur $]-\infty;-1[$ et que $g(-2)=0$, on en déduit que g est négative sur $]-\infty;-2]$ et positive sur $[-2;-1[$. Et le minimum de g sur $]-1;+\infty[$ est 4. Donc g est positive sur cet intervalle. Pour résumer :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	

4. Déduire des questions précédentes le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. *Les limites de f ne sont pas demandées.*
Il suffit de remarquer que :

$$\forall x \neq -1,\ \ f'(x)=\frac{4g(x)}{(x+1)^2}$$

Ainsi, $f'(x)$ est du signe de $g(x)$... et d'après le résultat de la question précédente, on obtient :

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	
variations de f		$\searrow$	3	$\nearrow$	$\|$	$\nearrow$	

5. Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0, notée $\mathcal{T}_0$.
Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{T}_0$.

- $\mathcal{T}_0 : y=f'(0)(x-0)+f(0)$, autrement dit, $\mathcal{T}_0$ a pour équation réduite $y=x-1$.
- Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$. On a :

$$f(x)-(x-1)=\ldots=\frac{x^2(x-4)}{4x+4}$$

Or :

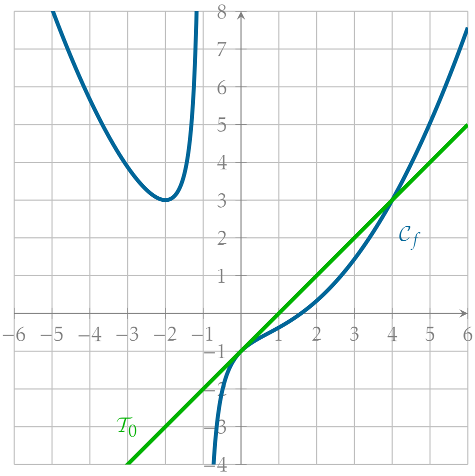
x	$-\infty$		-1		0		4		$+\infty$
x^2		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$4x+4$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x^2\dfrac{x-4}{4x+4}$		$+$	$\|$	$-$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi :

$$\forall x \in]-\infty;-1[,\ f(x)>x-1$$
$$\forall x \in]-1;4[,\ f(x)\leq x-1$$
$$\forall x \in]4;+\infty[,\ f(x)>x-1$$

Conclusion : $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{T}_0$ sur $]-\infty;-1[$ et $]4;+\infty[$;
$\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $\mathcal{T}_0$ sur $]-1;4[$;
$\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{T}_0$ se rencontrent en les points de coordonnées $(0,-1)$ et $(4,3)$.

6. Représenter l'allure de $\mathcal{C}_f$ dans un repère du plan judicieusement choisi.



Exercice 4 - Une équation fonctionnelle

Déterminer toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x)f(y) - f(xy) = x + y$$

Par analyse-synthèse...

- **Analyse.** Supposons qu'il existe une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x)f(y) - f(xy) = x + y$$

  On a alors :
  - En prenant $x = y = 0$: $f(0)^2 - f(0) = 0$. Donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.
  - En prenant $x = 1$ et $y = 0$, on obtient $f(1)f(0) - f(0) = 1$, c'est à dire $f(0)(f(1) - 1) = 1$. Donc nécessairement, $f(0) \neq 0$. Par conséquent, avec ce qui précède : $f(0) = 1$.
  - Avec $x \in \mathbb{R}$ quelconque et $y = 0$, on obtient $f(x)f(0) - f(0) = x$, ce qui implique, puisque $f(0) = 1$: $f(x) = 1 + x$.

  Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + x$.
  La *candidate-solution* est la fonction $x \longmapsto 1 + x$.
- **Synthèse.** Regardons si cette fonction convient.
  Si $f(x) = 1 + x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors on obtient :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x)f(y) - f(xy) = (1 + x)(1 + y) - (1 + xy) = 1 + x + y + xy - 1 - xy = x + y$$

  La fonction $x \longmapsto 1 + x$ est bien solution du problème.

Conclusion : la seule fonction définie sur $\mathbb{R}$, telle que $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x)f(y) - f(xy) = x + y$, est la fonction $x \longmapsto 1 + x$.

✍ **Rédaction**
Le but de l'analyse (dans l'analyse-synthèse), et de trouver le tête d'une hypothétique solution. Il ne faut donc pas oublier de préciser que l'on suppose l'existence d'une solution f ici...