Devoir surveillé 1
Samedi 11 septembre - 2h00

"Je ne crois pas au génie, seulement au dur travail."
Michel Petrucciani

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation. Quelques précisions :

- ***les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),***
- ***les questions doivent être présentées dans l'ordre du sujet.***

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.

NOM .... Prénom ....

Exercice 1 - Questions de cours & technique

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Traduire les énoncés suivant avec des quantificateurs (f désigne une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et (u_n) désigne une suite définie sur $\mathbb{N}$) :
   (a) La fonction f est bornée par -1 et 2 sur $\mathbb{R}$.
   (b) La fonction f n'est pas majorée sur $\mathbb{R}$.
   (c) La fonction f n'est pas paire.
   (d) La fonction f s'annule sur $\mathbb{R}$.
   (e) La suite (u_n) est constante.
   (f) L'entier relatif n est impair.
2. Écrire, avec des quantificateurs, la négation de l'énoncé suivant :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \left(x \geq 5 \Longrightarrow f(x) < 0\right)$$
   où f désigne une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
3. Pour chacune des propositions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse, et justifier.
   (a) $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, \left(\text{"}a \leq b \text{ ET } c \leq d\text{"} \Longrightarrow ac \leq bd\right)$
   (b) $\forall a, b \in \mathbb{R}^+, \ \sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$
   (c) $\exists a, b \in \mathbb{R}^* \ / \ \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{2}{a+b}$
   (d) $\forall a, b \in \mathbb{R}_*^+ \ / \ \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2$
   (e) Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(-2) = -f(2)$, alors f est impaire.
   (f) Si f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, telles que f est croissante et g est décroissante, alors $f \circ g$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.
   (g) Si f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, telles que f est croissante et g est décroissante, alors $f + g$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.
4. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\dfrac{x-2}{x-1} \neq 1$.
5. Déterminer tous les réels x tels que $\sqrt{x+1} = \dfrac{-1}{3}x + 3$.
6. Résoudre l'inéquation $x^3 > x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
7. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{4x^2 + 4x + 1}}$.
8. Considérons la fonction f, définie sur $\mathbb{R}_*^+$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - \ln(x)$. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}_*^+$.
9. Considérons la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = 2u_n + n - 1 \end{cases}$.
   Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n - n$.
10. Démontrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in \mathbb{R}^+, \ \ (1+x)^n \geq 1 + nx$$

Exercice 2 - QCM

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chaque question, une seule des quatre réponses est exacte. Entourer cette réponse.

1. Les solutions de l'équation $x^2 - x - 2 = 0$ sont :

   a) 1 et 2 b) -1 et 2 c) cette équation n'a pas de solution réelle d) aucune des trois propositions

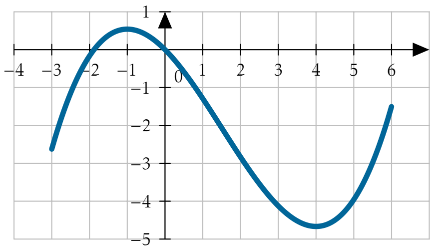
2. Si pour tout $x \neq 0$, $f(x) = \frac{1}{x} + x$, alors, pour tout $x \neq 0$, $f'(x) =$

   a) $\frac{-1+x^2}{x^2}$ b) $\frac{1}{x^2} + 1$ c) $\frac{-1}{x^2} + x$ d) aucune des trois propositions

3. Si pour tout $x \neq \frac{1}{2}$, $f(x) = \frac{x+1}{2x-1}$, alors, pour tout $x \neq \frac{1}{2}$, $f'(x) =$

   a) $\frac{1}{(2x-1)^2}$ b) $\frac{3}{(2x-1)^2}$ c) $\frac{-1}{(2x-1)^2}$ d) aucune des trois propositions

4. On considère la fonction f, définie et dérivable sur $[-3;6]$, dont la courbe représentative est donnée :



   On a :

   a) $f'(0) = 0$ b) $f'(0) = -1$ c) $f'(-1) = 0,6$ d) $f'(-2) = -1$

5. Dans le même contexte que la question précédente,

   a) $f'(x) \geq 0$ sur $[-2;0]$ b) $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = -1$ c) f' est monotone sur $[-3;6]$ d) aucune des trois propositions

Exercice 3 - Étude d'une fonction

Notons f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \frac{x^3 - 4}{4x+4}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Étudier la parité de f.
2. Déterminer la dérivée de f.
3. On considère maintenant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4$.
   (a) Dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.
   (b) Calculer $g(-2)$ puis en déduire le tableau de signes de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
4. Déduire des questions précédentes le tableau de variations de f sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. *Les limites de f ne sont pas demandées.*
5. Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0, notée $\mathcal{T}_0$.
   Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{T}_0$.
6. Représenter l'allure de $\mathcal{C}_f$ dans un repère du plan judicieusement choisi.

Exercice 4 - Une équation fonctionnelle

Déterminer toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x)f(y) - f(xy) = x + y$$