Les Chartreux

Devoir surveillé 2

Samedi 9 octobre - 4h00

"Ce n'est pas la force, mais la persévérance, qui fait les grandes œuvres"
Samuel Johnson

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation. Quelques précisions :

- ***les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),***
- ***les questions doivent être présentées dans l'ordre du sujet.***

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.

NOM .... Prénom ....

Exercice 1

Les questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres.

1. **Vrai ou faux.** Pour chacune des affirmations ci-dessous, préciser si elle est vraie ou fausse, et justifier.

1.a. $\forall a, b \in \mathbb{R},\ \exp(a+b) = \exp(a) + \exp(b)$.
FAUX.
Contre-exemple : $a = b = 0$. On a $\exp(0+0) = 1$ et $\exp(0) + \exp(0) = 2$.

> ☞ **Rappel...**
> La négation de "$\forall a, b \in \mathbb{R},\ \exp(a+b) = \exp(a) + \exp(b)$" est "$\exists a, b \in \mathbb{R},\ \exp(a+b) \neq \exp(a) + \exp(b)$". Il suffit donc d'un contre-exemple...

1.b. $\forall a, b \in \mathbb{R}^*,\ \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.
FAUX.
Contre-exemple : $a = b = -1$. On a $\ln(ab) = 0$ et pourtant, $\ln(a)$ et $\ln(b)$ n'existe pas.

1.c. $\forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R}^*,\ \left(\dfrac{a}{b} \geq 1 \Longrightarrow a \geq b\right)$
FAUX.
Contre-exemple : $a = -2$ et $b = -1$. On a $\dfrac{a}{b} \geq 1$ et pourtant, $a < b$.

1.d. Le produit de deux suites géométriques est une suite géométrique.
VRAI.
Soient $q, q' \in \mathbb{R}$ ainsi que (u_n) une suite géométrique de raison q et (v_n) une suite géométrique de raison q'. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1}v_{n+1} = qu_n \times q'v_n = qq'(u_nv_n)$. Par définition, la suite (u_nv_n) est géométrique (de raison qq').

> **Petite remarque**
> Inutile de s'encombrer avec l'expression des termes généraux... On revient simplement à la définition !

1.e. Il existe deux suites arithmético-géométriques différentes dont la somme est une suite arithmético-géométrique.
VRAI.
Exemple : (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 0$, $v_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$ et $v_{n+1} = 2v_n + 2$.
Ces deux suites sont arithmético-géométriques, et sont différentes puisque $u_1 = 1$ et $v_1 = 2$. Et de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} + v_{n+1} = 2(u_n + v_n) + 3$. Par définition, $(u_n + v_n)$ est donc une suite arithmético-géométrique.

> **Petite remarque**
> Inutile de s'encombrer avec l'expression des termes généraux, que vous n'avez pas à connaitre.. On revient simplement à la définition !

1.f. Sur les 6 propositions de ce vrai ou faux, 2 exactement sont vraies.
A méditer...

2. Soit f une fonction strictement monotone sur un intervalle I. Démontrer :

$$\forall a, b \in \mathrm{I},\ \big(a = b \iff f(a) = f(b)\big)$$

Soient $a, b \in \mathrm{I}$. Il s'agit de démontrer une équivalence... Raisonnons donc par double implication.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $a = b$. Alors en appliquant f : $f(a) = f(b)$.

> ✘ **Attention !**
> Nul besoin de la stricte monotonie pour cette implication !!

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $f(a) = f(b)$ et montrons que $a = b$. Pour cela, raisonnons par contraposée. Montrons donc :

$$a \neq b \Longrightarrow f(a) \neq f(b)$$

Supposons ainsi que $a \neq b$ et distinguons deux cas :

- Si $a < b$. Alors, puisque f est strictement monotone sur I, $f(a) < f(b)$ (si f est strictement croissante) ou $f(a) > f(b)$ (si f est strictement décroissante). Dans les deux cas, $f(a) \neq f(b)$.
- De même si $a > b$.

Dans tous les cas, $f(a) \neq f(b)$.
On a ainsi établi :

$$a \neq b \Longrightarrow f(a) \neq f(b)$$

Autrement dit, on a montré :

$$f(a) = f(b) \Longrightarrow a = b$$

Conclusion : si f est strictement monotone sur I, alors : $\forall a, b \in \mathrm{I},\ \big(a = b \iff f(a) = f(b)\big)$.

3. Notons f la fonction définie sur $\mathbb{R}_*^+$ par $f(x) = \ln(x) + x^2 + x - 5 + e^x$. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}_*^+$.
f est une somme de fonctions strictement croissantes sur $\mathbb{R}_*^+$, elle est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_*^+$.

4. Considérons $f : x \longmapsto \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$.

4.a. Déterminer l'ensemble de définition de f.
L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}^*$.

4.b. Étudier sa parité.
$f(1) = e$ et $f(-1) = e^{-1}$.
Ainsi : $f(-1) \neq f(1)$, la fonction f n'est pas paire.
Et : $f(-1) \neq -f(1)$, la fonction f n'est pas impaire.

Conclusion : f n'est ni paire, ni impaire.

4.c. Dresser son tableau de variations.
Posons $u : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ et $v : x \longmapsto x^2$ de sorte que $f = \dfrac{\exp \circ u}{v}$.

- u est dérivable sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$, donc $\exp \circ u$ également. De plus, v est dérivable et ne s'annule pas sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$, donc f est dérivable sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.
- On a, pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \times x^2 - 2xe^{\frac{1}{x}}}{x^4} \\ &= \frac{-e^{\frac{1}{x}}(1+2x)}{x^4} \end{aligned}$$

- D'où, on déduit immédiatement :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	
variations de f		$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

5. Considérons $f : x \longmapsto x^x$ sur $\mathbb{R}_*^+$. Étudier les variations de f.
Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$. On a : $f(x) = x^x \underset{\text{Réflexe !}}{=} e^{x\ln(x)}$.
La fonction $x \longmapsto x\ln(x)$ est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_*^+$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$; et, par conséquent, f l'est également. Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$. On a :

$$f'(x) = (\ln(x) + 1)e^{x\ln(x)}$$

De plus :

$$\begin{aligned} \ln(x) + 1 > 0 &\iff \ln(x) > -1 \\ &\iff x > e^{-1} \end{aligned}$$

par stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}_*^+$ (ou exp sur $\mathbb{R}$)

D'où :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
signe de $f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
variations de f	$\Vert$	$\searrow$	$e^{-e^{-1}}$	$\nearrow$	

6. Calculer $\displaystyle\sum_{k=5}^{22} (k-4)^2$.
En effectuant le changement d'indice $i = k - 4$, on a :

$$\sum_{k=5}^{22} (k-4)^2 = \sum_{i=1}^{18} i^2$$

Puis :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{18} i^2 &= \frac{18 \times 19 \times 37}{6} \\ &= 3 \times 19 \times 37 \\ &= 3 \times 703 \\ &= 2109 \end{aligned}$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.
On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1-k}{k(k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) && \text{par linéarité de la somme} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} && \text{par télescopage} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Conclusion : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = 1-\frac{1}{n+1}$.

8. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Calculer $\ln\left(\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\right)$.

On a :

$$\begin{aligned}
\ln\left(\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\right) &= \ln\left(\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)\right) && \text{identité remarquable}\\
&= \ln\left(\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\right)\right)\\
&= \ln\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\times\prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k}\right) && \text{télescopages}\\
&= \ln\left(\frac{1}{n}\times\frac{n+1}{2}\right)\\
&= \ln\left(\frac{n+1}{2n}\right)
\end{aligned}$$

9. Démontrer par récurrence : $\forall n\in\mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k = \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}$.

- **Initialisation.** Pour $n=0$. D'un part : $\displaystyle\sum_{k=0}^{0}(-1)^k k = 0$; et d'autre part : $\dfrac{(-1)^n(2\times+1)-1}{4} = 0$.

  On a bien $\displaystyle\sum_{k=0}^{0}(-1)^k k = \frac{(-1)^n(2\times+1)-1}{4}$: l'initialisation est vérifiée.

- **Hérédité.** Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons "$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k = \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}$" et montrons "$\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k k = \frac{(-1)^n(2n+3)-1}{4}$".

  On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k k &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k + (-1)^{n+1}(n+1) && \text{par hypothèse de récurrence}\\
&= \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4} + (-1)^{n+1}(n+1)\\
&= \frac{(-1)^n(2n+1)-1+(-1)^{n+1}(4n+4)}{4}\\
&= \frac{(-1)^{n+1}\big(-(2n+1)+(4n+4)\big)-1}{4}\\
&= \frac{(-1)^{n+1}(2n+3)-1}{4}
\end{aligned}$$

  L'hérédité est établie.

Pourquoi ?
$(-1)^{n+1}\times(-1) = (-1)^{n+2} = (-1)^n\times(-1)^2 = (-1)^n$.

Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k = \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}$.

10. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 0\\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n+1\end{cases}$

10.a. Déterminer le terme général de (u_n).

Méthode habituelle : recherche de point fixe de la fonction $x\longmapsto\frac{3}{4}x+1$ (qui vaut 4), suite (v_n) auxiliaire (qui sera géométrique)...

✘ Attention !
Ce n'est pas le point fixe de la suite ; c'est celui de la fonction !

Conclusion : pour tout $n\in\mathbb{N},\ u_n = -4\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^n+4$.

10.b. En déduire une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}u_k$ pour $n\in\mathbb{N}$.

Soit $n\in\mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}u_k &\underset{\text{linéarité}}{=} -4\times\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{3}{4}\right)^n+\sum_{k=0}^{n}4\\
&= -4\times\frac{1-(3/4)^{n+1}}{1-3/4}+4(n+1)\\
&= 16\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right)+4(n+1)\\
&= 16\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}+4n-12
\end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $n\in\mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n}u_k = 16\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}+4n-12$.

11. Montrer : $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R}^+,\ e^x\geq\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$.

Par récurrence...

- **Initialisation.** Pour $n=0$.
  Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} \frac{x^k}{k!} = \frac{x^0}{0!} = 1$.
  Or $x \in \mathbb{R}^+$, donc $e^x \geq 1$. L'initialisation est ainsi vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons "$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ e^x \geq \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$" et montrons "$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ e^x \geq \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!}$".

  Posons $f : x \longmapsto e^x - \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!}$, définie sur $\mathbb{R}^+$.

  f est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^+$, elle est donc également dérivable sur $\mathbb{R}^+$. Et, par linéarité de la dérivation, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{kx^{k-1}}{k!} \\ &= e^x - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} && \text{changement d'indice } j = k-1 \\ &= e^x - \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} \end{aligned}$$

  Or, par hypothèse de récurrence, on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $e^x \geq \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!}$.

  Ainsi :
$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f'(x) \geq 0$$
  On obtient alors :

x	0 $\quad +\infty$
signe de $f'(x)$	$+$
variations de f	0 $\nearrow$

  Le minimum de f sur $\mathbb{R}^+$ est 0, atteint en 0 ; par conséquent :
$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) \geq 0$$
  Autrement dit :
$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ e^x \geq \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!}$$
  L'hérédité est établie.

Petite remarque
En cas de difficulté à dériver f sous cette forme, écrire $f(x) = e^x - (1 + x + \ldots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!})$ puis $f'(x) = e^x - (0+1+\ldots+\frac{x^n}{n!})$, et réécrire sous forme de somme (plus de changement d'indice à faire).

Conclusion : par récurrence, on a montré : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ e^x \geq \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

12. Déterminer toutes les fonctions f, définies sur $\mathbb{R}$, telles que :
$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(xy) = f(x+y)$$

Par analyse-synthèse...
- **Analyse.** Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(xy) = f(x+y)$$
  En particulier, en prenant $y=0$, on a :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(0) = f(x)$$
  Par conséquent, f est constante sur $\mathbb{R}$.
  Les candidats-solutions sont les fonctions constantes sur $\mathbb{R}$.
- **Synthèse.** Si f est constante sur $\mathbb{R}$, alors on a bien, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $f(xy) = f(x+y)$.
  Les fonctions constantes sur $\mathbb{R}$ sont donc des solutions.

Conclusion : les seules fonctions f définies sur $\mathbb{R}$, telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ $f(xy) = f(x+y)$, sont les fonctions constantes sur $\mathbb{R}$.

13. On a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} k^4 = 1 + 2^4 + 3^4 + 4^4 = 354$ et $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{4} k\right)^4 = (1+2+3+4)^4 = 10^4 = 10000$.

La différence entre $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{4} k\right)^4$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} k^4$ est alors de 9646.

Écrire une fonction, d'en-tête `def difference(n):` qui renvoie la valeur de la différence entre $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\right)^4$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4$.

```python
def difference(n):
    S,C=0,0
    for k in range(1,n+1):
        S=S+k**4
        C=C+k
    C=C**4
    return C-S
```

★★★★★★★

Exercice 2

Soient a, b des réels strictement positifs. Notons f la fonction définie sur $\mathbb{R}_*^+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+,\ f(x) = \ln(ax)\left(1 - \frac{b}{x}\right)$$

On suppose que $f(1) = 0$ et $f'(1) = 0$.

1. Déterminer les valeurs de a et b.
   - On sait que $f(1) = 0$. Or :
   $$f(1) = 0 \iff \ln(a)(1-b) = 0 \iff \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ \text{ou} \\ b = 1 \end{array}\right.$$
   On a donc : $a = 1$ ou $b = 1$.

   Petite remarque
   C'est ainsi que l'on raisonne par équivalences...

   - On sait que $f'(1) = 0$. f étant dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$, comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_*^+$, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$:
   $$f'(x) = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{b}{x}\right) + \ln(ax)\frac{b}{x^2}$$
   Ainsi :
   $$f'(1) = 0 \iff (1-b) + b\ln(a) = 0$$
   - Distinguons deux cas, obtenus dans le premier point.
     - **Si $a = 1$.** Alors on obtient :
     $$f'(1) = 0 \iff 1 - b = 0 \iff b = 1$$
     Et donc $b = 1$.
     - **Si $b = 1$.** Alors on obtient :
     $$f'(1) = 0 \iff \ln(a) = 0 \iff a = 1$$
     Et donc $a = 1$.

   Conclusion : dans tous les cas, on trouve $a = b = 1$. Et ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}_*^+,\ f(x) = \ln(x)\left(1 - \frac{1}{x}\right)$.

2. Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, $f'(x) = \dfrac{\ln(x) + x - 1}{x^2}$.

   Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$. On avait obtenu : $f'(x) = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{b}{x}\right) + \ln(ax)\frac{b}{x^2}$.

   Puisque $a = b = 1$, on a ainsi :
   $$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \ln(x)\frac{1}{x^2} \\ & = & \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{\ln(x)}{x^2} \\ & = & \frac{\ln(x) + x - 1}{x^2} \end{array}$$

   Conclusion : pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, $f'(x) = \frac{\ln(x) + x - 1}{x^2}$.

   Petite remarque
   Sinon, on dérive g...
   On peut aussi traiter cette question en distinguant des cas selon les valeurs de x.

3. **3.a.** Étudier le signe de $\ln(x) + x - 1$ en fonction des valeurs de $x \in \mathbb{R}_*^+$.

   Posons $g : x \longmapsto \ln(x) + x - 1$, définie sur $\mathbb{R}_*^+$.
   g est une somme de deux fonctions strictement croissantes sur $\mathbb{R}_*^+$ (fonctions $x \longmapsto \ln(x)$ et $x \longmapsto x - 1$), donc g est également strictement croissante sur $\mathbb{R}_*^+$.
   Et comme $g(1) = 0$, on obtient :

x	0		1		$+\infty$
signe de $\ln(x) + x - 1$	$\|$	$-$	0	$+$	

   Pourquoi ?
   Soit on le remarque... Soit on remarque que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ et on sait que $f'(1) = 0$...

   3.b. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}_*^+$.

   Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$. On sait que $f'(x) = \frac{\ln(x) + x - 1}{x^2}$. Ainsi, d'après la question précédente on obtient :

x	0		1		$+\infty$
signe de $f'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
variations de f	$\|$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

★★★★★★★

Exercice 3

On considère la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{2}xe^{-x}$, définie sur $\mathbb{R}$, ainsi que la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan.

Le but de l'exercice est d'étudier la suite (u_n) en fonction des différentes valeurs de son premier terme u_0.

1. Étude de f.

1.a. Discuter du signe de $f(x)$ selon les valeurs du réel x.

On a directement ($f(x)$ est déjà exprimé sous forme factorisée) :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $\frac{1}{2}x$		$-$	0	$+$	
signe de e^{-x}		$+$		$+$	
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

1.b. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

Posons $u : x \longmapsto \frac{1}{2}x$ et $v : x \longmapsto e^{-x}$ de sorte que $f = uv$.

u est une fonction affine, donc dérivable sur $\mathbb{R}$; et v est la composée d'une fonction affine par la fonction exponentielle, elle est donc également dérivable sur $\mathbb{R}$.

Par produit, f est ainsi dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}xe^{-x} \\ &= \frac{1}{2}e^{-x}(1-x) \end{aligned}$$

On en déduit :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{e^{-1}}{2}$	$\searrow$	0

1.c. Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0, notée $\mathcal{T}_0$.

On a : $\mathcal{T}_0 : y = f'(x)(x-0) + f(0)$.

Or $f'(0) = \frac{1}{2}$ et $f(0) = 0$.

Conclusion : $\mathcal{T}_0 : y = \frac{1}{2}x$.

1.d. Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq \frac{1}{2}x$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f(x) - \frac{1}{2}x &= \frac{1}{2}xe^{-x} - \frac{1}{2}x \\ &= \frac{1}{2}x(e^{-x}-1) \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} e^{-x} - 1 > 0 &\iff e^{-x} > 1 \\ &\iff -x > \ln(1) \\ &\iff x < 0 \end{aligned}$$

par stricte croissance de la fonction ln sur $\mathbb{R}_*^+$ (ou exp sur $\mathbb{R}$)

D'où on déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $\frac{1}{2}x$		$-$	0	$+$	
signe de $e^{-x}-1$		$+$	0	$-$	
signe de $f(x) - \frac{1}{2}x$		$-$	0	$-$	

On obtient ainsi :

$$f(x) - \frac{1}{2}x \leq 0$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq \frac{1}{2}x$.

1.e. Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite d'équation $y = x$ et préciser leurs éventuels points d'intersection.

Pour cela, étudions le signe de $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{1}{2}xe^{-x} - x \\ &= x\left(\frac{1}{2}e^{-x} - 1\right) \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}e^{-x} - 1 > 0 &\iff \frac{1}{2}e^{-x} > 1 \\ &\iff e^{-x} > 2 \\ &\iff -x > \ln(2) \\ &\iff x < -\ln(2) \end{aligned}$$

par stricte croissance de la fonction ln sur $\mathbb{R}_*^+$ (ou exp sur $\mathbb{R}$)

D'où on déduit le tableau de signes suivant :

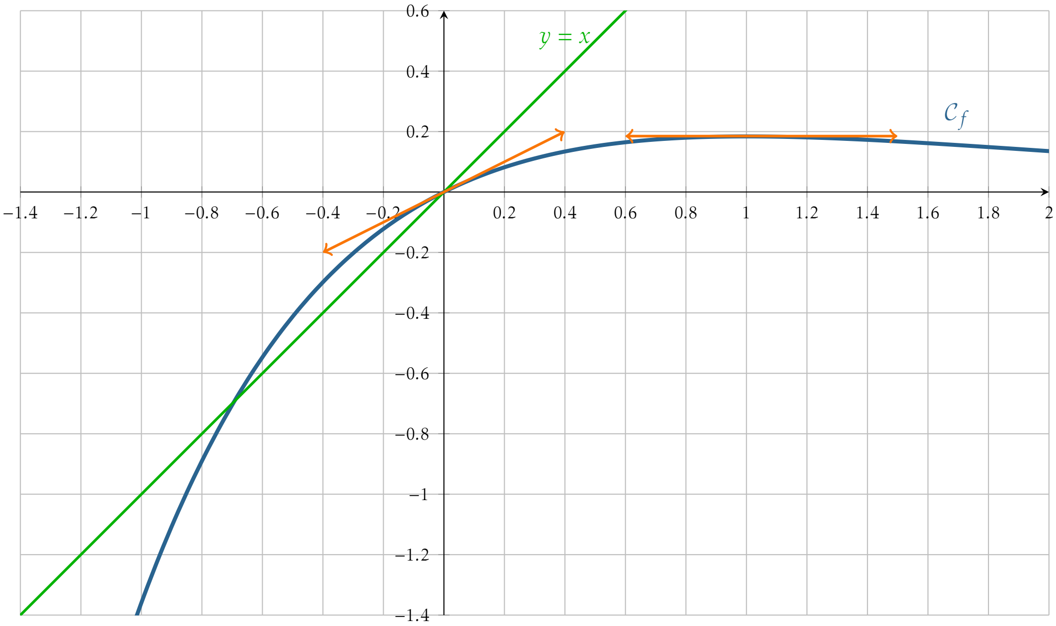
x	$-\infty$		$-\ln(2)$		0		$+\infty$
signe de x		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $\frac{1}{2}e^{-x}-1$		$+$	0	$-$		$-$	
signe de $f(x)-x$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Par conséquent :

$$\forall x \in]-\ln(2);0[,\ f(x) \geq x$$
$$\forall x \in]-\infty;-\ln(2)[\cup]0;+\infty[,\ f(x) \leq x$$

Conclusion : $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la première bissectrice sur $]-\ln(2);0[$;
$\mathcal{C}_f$ est au-dessous de la première bissectrice sur $]-\infty;-\ln(2)[$ et sur $]0;+\infty[$;
les deux courbes se rencontrent en les points de coordonnées $(0,0)$ et $(-\ln(2),-\ln(2))$.

1.f. Représenter l'allure de $\mathcal{C}_f$ sur le graphique ci-dessous. *Données :* $\ln(2) \simeq 0,7$ *et* $e^{-1} \simeq 0,4$.



2. Écrire une fonction Python, nommée **u**, prenant en arguments d'entrée un réel a et un entier naturel n et renvoyant en sortie la valeur de u_n dans le cas où $u_0 = a$.

```
import numpy as np

def u(a,n):
    U=a
    for k in range(1,n+1):
        U=1/2*U*np.exp(-U)
    return U
```

3. **3.a.** Représenter, en bleu sur le graphique ci-dessus, les trois premiers termes de (u_n) dans le cas où $u_0 = \frac{-4}{5}$.

3.b. Représenter, en bleu sur le graphique ci-dessus, les cinq premiers termes de (u_n) dans le cas où $u_0 = \frac{-3}{5}$.

3.c. Représenter, en rouge sur le graphique ci-dessus, les trois premiers termes de (u_n) dans le cas où $u_0 = 1$.

3.d. Dans chaque cas, émettre des conjectures sur les variations de (u_n) et son comportement en l'infini.

4. Que dire des cas "$u_0 = 0$" et "$u_0 = -\ln(2)$" ?

- Si $u_0 = 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$. Se démontre par récurrence immédiate puisque $f(0) = 0$.
- De même, si $u_0 = -\ln(2)$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -\ln(2)$.

5. Cas $u_0 \in]-\ln(2);0[$. Dans cette question, $u_0 \in]-\ln(2);0[$.

5.a. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-\ln(2) < u_n < 0$.

Par récurrence...

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
  On sait que $u_0 \in]-\ln(2);0[$: l'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons "$-\ln(2) < u_n < 0$" et montrons "$-\ln(2) < u_{n+1} < 0$".
  Par hypothèse de récurrence, on a :
  $$-\ln(2) < u_n < 0$$
  Puis, en appliquant f, strictement croissante sur $[-\ln(2);0]$, on obtient :
  $$f(-\ln(2)) < f(u_n) < f(0)$$
  Et comme 0 et $-\ln(2)$ sont des points fixes de f, on a $f(0) = 0$ et $f(-\ln(2)) = -\ln(2)$. D'où :
  $$-\ln(2) < u_{n+1} < 0$$
  L'hérédité est établie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-\ln(2) < u_n < 0$.

5.b. Étudier les variations de (u_n).
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$$

Et comme $u_n \in]-\ln(2);0[$, d'après le résultat de la question 1(e), on a :

$$f(u_n) - u_n > 0$$

Conclusion : la suite (u_n) est strictement croissante.

6. **Cas $u_0 > 0$.** Dans cette question, $u_0 > 0$ et on admet que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$ *(que l'on démontrerait aisément par récurrence)*.

6.a. Étudier les variations de (u_n).
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$$

Et comme $u_n > 0$ (admis dans l'énoncé), d'après le résultat de la question 1(e), on a :

$$f(u_n) - u_n < 0$$

Conclusion : la suite (u_n) est strictement décroissante.

6.b. A l'aide de la question 1(d), démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \dfrac{u_0}{2^n}$.
Par récurrence...

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
  $\dfrac{u_0}{2^0} = u_0$, on a donc bien $u_0 \leq \dfrac{u_0}{2^0}$. L'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons "$u_n \leq \dfrac{u_0}{2^n}$" et montrons "$u_n \leq \dfrac{u_0}{2^n}$".
  On a, par hypothèse de récurrence :
  $$u_n \leq \frac{u_0}{2^n}$$
  D'où, en multipliant par $\dfrac{1}{2}$, qui est positif :
  $$\frac{1}{2}u_n \leq \frac{u_0}{2^{n+1}}$$
  Mais, d'après le résultat de la question 1(d) : $f(u_n) \leq \dfrac{1}{2}u_n$. Autrement dit : $u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}u_n$.
  Ainsi :
  $$u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n \leq \frac{u_0}{2^{n+1}}$$
  En particulier :
  $$u_{n+1} \leq \frac{u_0}{2^{n+1}}$$
  L'hérédité est établie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \dfrac{u_0}{2^n}$.

6.c. On suppose, dans cette question uniquement, que $u_0 = 1$.

6.c.i. Résoudre, dans $\mathbb{N}$, l'inéquation $\dfrac{1}{2^n} \leq 10^{-3}$, puis interpréter le résultat obtenu.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\frac{1}{2^n} \leq 10^{-3} \iff 2^n \geq 10^3$$

Or $2^9 = 512$ et $2^{10} = 1024$...

Conclusion : $\dfrac{1}{2^n} \leq 10^{-3}$ lorsque $n \geq 10$.A partir du rang 10, on peut dire que $u_n \leq 10^{-3}$ (puisque $u_n \leq \dfrac{1}{2^n}$ d'après la question précédente).

6.c.ii. Le programme suivant (dans lequel `u` est la fonction Python définie à la question 2) renvoie la valeur 9. Interpréter cette valeur et la comparer à la valeur obtenue à la question précédente.

```
n=0
while u(1,n)>10**(-3):
    n=n+1
print(n)
```

Interprétation : 9 est le premier rang à partir duquel $u_n \leq 10^{-3}$.
Comparaison avec la valeur précédente : il est naturel de trouver une valeur inférieure à la question précédente; puisque dans la question précédente, nous avions utilisé une majoration de u_n (établie à la question 6(b)) pour obtenir cette information.

6.d. On considère maintenant les suites (v_n) et (S_n) définies sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \ln(u_n)$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

6.d.i. Établir, pour tout entier naturel n, une relation entre v_{n+1}, v_n et u_n.
Sans difficulté : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ v_{n+1} = v_n - \ln(2) - u_n$.

6.d.ii. Démontrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \ln(u_0) - (n+1)\ln(2) - \ln(u_{n+1})$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} u_k && \text{question précédente} \\ &= \sum_{k=0}^{n} (v_k - v_{k+1} - \ln(2)) && \text{par télescopage} \\ &= v_0 - v_{n+1} - (n+1)\ln(2) \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \ln(u_0) - (n+1)\ln(2) - \ln(u_{n+1})$.

6.d.iii. Étudier les variations de la suite (S_n) et, en utilisant le résultat de la question 6(b), démontrer qu'elle est majorée.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+1} > 0$ d'après l'énoncé de la question 6.
  La suite (S_n) est donc (strictement) croissante.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 6(b), on a :
  $$\forall k \in [\![0;n]\!],\ u_k \leq \frac{u_0}{2^k}$$
  D'où, en sommant :
  $$\sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{u_0}{2^k}$$
  Et ainsi, par linéarité de la somme :
  $$S_n \leq u_0 \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$$
  - Or : $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-1/2} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$.
    Et puisque $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} > 0$, on obtient : $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \leq 2$.
    Et, en multipliant par $u_0 > 0$, on a :
    $$u_0 \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \leq 2u_0$$
  - Par conséquent (par transitivité) :
    $$S_n \leq 2u_0$$

Conclusion : (S_n) est croissante et majorée (par $2u_0$).

6.d.iv. **Bonus :** que peut-on en déduire ? Prouver alors qu'il existe un réel $\ell \in [u_0; 2u_0]$ tel que $\lim_{n\to+\infty} 2^n u_n = u_0 e^{-\ell}$.

- (S_n) est croissante et majorée, donc, d'après le théorème de convergence monotone, (S_n) est convergente. Notons ainsi ℓ sa limite (qui est donc un nombre réel).
- (S_n) étant croissante, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n \geq S_0 = u_0$. Et de plus, (S_n) est majorée par $2u_0$. Ainsi : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n \in [u_0; 2u_0]$. Par passage à la limite, on obtient $\ell \in [u_0; 2u_0]$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 6(d)ii, on obtient :
  $$\ln(u_n) = \ln(u_0) - n\ln(2) - S_{n-1}$$
  Et donc :
  $$u_n = u_0 2^{-n} e^{-S_{n-1}}$$
  D'où :
  $$2^n u_n = u_0 e^{-S_{n-1}}$$
  Et en passant à la limite, avec le point précédent :
  $$\lim_{n\to+\infty} 2^n u_n = u_0 e^{-\ell}$$

Conclusion : il existe un réel $\ell \in [1;2]$ tel que $\lim_{n\to+\infty} 2^n u_n = u_0 e^{-\ell}$.

7. Cas $u_0 < -\ln(2)$. Dans cette question, $u_0 < -\ln(2)$.
Étudier les variations de (u_n).

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$$
Or, on connait le signe de $f(u_n) - u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$, étudié à la question 1(e). Il suffit, pour l'obtenir, de savoir où se situe u_n pour $n \in \mathbb{N}$.
Démontrons donc déjà que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < -\ln(2)$. Par récurrence...

- **Initialisation.** Pour $n = 0$.
  L'énoncé indique que $u_0 < -\ln(2)$: l'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons "$u_n < -\ln(2)$" et montrons "$u_{n+1} < -\ln(2)$".
  Par hypothèse de récurrence, on a :
  $$u_n < -\ln(2)$$
  On applique ensuite f, strictement croissante sur $]-\infty; -\ln(2)]$:
  $$f(u_n) < f(-\ln(2))$$
  Autrement dit :
  $$u_{n+1} < -\ln(2)$$
  L'hérédité est établie.

Par conséquent :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < -\ln(2)$$
On en déduit, d'après le résultat de la question 1(e) :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(u_n) - u_n < 0$$
Autrement dit :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} < u_n$$

Conclusion : la suite (u_n) est strictement décroissante.

★★★★★★★

Exercice 4

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ et :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 3b_n \end{cases}$$

1. Écrire une fonction Python, d'en-tête `def suites(n):` prenant un entier naturel n en argument d'entrée et renvoyant les valeurs de a_n et b_n en sortie.

```python
def suites(n):
    a,b=0,1
    for k in range(1,n+1):
        a,b=2*a+b,2*a+3*b
    return a,b
```

2. Calculer a_1, b_1, a_2 et b_2.
$a_1 = 1$, $b_1 = 3$, $a_2 = 5$, $b_2 = 11$.

3. **Première méthode de détermination des termes généraux.**

3.a. Déterminer une relation de récurrence d'ordre 1 sur la suite (s_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ s_n = a_n + b_n$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :
$$\begin{array}{rcl} s_{n+1} & = & a_{n+1} + b_{n+1} \\ & = & 2a_n + b_n + 2a_n + 3b_n \\ & = & 4a_n + 4b_n \\ & = & 4s_n \end{array}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_{n+1} = 4s_n$.

3.b. Déterminer une relation de récurrence d'ordre 1 sur la suite (t_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ t_n = 2a_n - b_n$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :
$$\begin{array}{rcl} t_{n+1} & = & 2a_{n+1} - b_{n+1} \\ & = & 4a_n + 2b_n - 2a_n - 3b_n \\ & = & 2a_n - b_n \\ & = & t_n \end{array}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = t_n$.

3.c. En déduire le terme général des suites (a_n) et (b_n).

- Des questions précédentes, on déduit que la suite (s_n) est géométrique de raison 4 et de premier terme $s_0 = 1$. D'où :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ s_n = 4^n$$
Mais on a également que la suite (t_n) est constante, de premier terme $t_0 = -1$. D'où :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ t_n = -1$$
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait donc que $s_n = 4^n$ et $t_n = -1$. Et de plus :
$$\begin{array}{ccc} \begin{cases} s_n = 4^n \\ t_n = -1 \end{cases} & \Longleftrightarrow & \begin{cases} a_n + b_n = 4^n \\ 2a_n - b_n = -1 \end{cases} \\ & \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\Longleftrightarrow} & \begin{cases} a_n + b_n = 4^n \\ -3b_n = -1 - 2 \times 4^n \end{cases} \\ & \Longleftrightarrow & \begin{cases} a_n + b_n = 4^n \\ b_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}4^n \end{cases} \\ & \Longleftrightarrow & \begin{cases} a_n = \frac{-1}{3} + \frac{1}{3}4^n \\ b_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}4^n \end{cases} \end{array}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{-1}{3} + \frac{1}{3}4^n$ et $b_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}4^n$.

4. **Deuxième méthode de détermination des termes généraux.**

4.a. Démontrer que (a_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= 2a_{n+1} + b_{n+1} \\ &= 2a_{n+1} + 2a_n + 3b_n \\ &= 2a_{n+1} + 2a_n + 3(a_{n+1} - 2a_n) \\ &= 5a_{n+1} - 4a_n \end{aligned}$$

Conclusion : (a_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $x^2 = 5x - 4$.

4.b. En déduire le terme général de (a_n) puis celui de (b_n).

- (a_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $x^2 - 5x + 4 = 0$, dont les solutions sont 1 et 4.
  - Par conséquent :
  $$\exists! \lambda, \mu \in \mathbb{R} \,/\, \forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \lambda 1^n + \mu 4^n$$
  - Or $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$.
  De plus :
  $$\left\{\begin{array}{lll} a_0 &=& 0 \\ a_1 &=& 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll} \lambda + \mu &=& 0 \\ \lambda + 4\mu &=& 1 \end{array}\right. \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{lll} \lambda + \mu &=& 0 \\ 3\mu &=& 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll} \lambda &=& -\frac{1}{3} \\ \mu &=& \frac{1}{3} \end{array}\right.$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{-1}{3} + \frac{1}{3} 4^n$.

4.c. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} b_n &= a_{n+1} - 2an \\ &= \frac{-1}{3} + \frac{1}{3} 4^{n+1} - 2\left(\frac{-1}{3} + \frac{1}{3} 4^n\right) \\ &= \frac{1}{3} + 4^n \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} 4^n \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} 4^n$.

5. On considère maintenant la suite (u_n) définie par : $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 0,\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n \end{array}\right.$. On considère le programme suivant (dans lequel la fonction `suites` est la fonction définie dans la question 1) :

```python
for k in range(0,5):
    print(suites(k))

def u(n):
    if n==0:
        return 0
    elif n==1:
        return 1
    else:
        return u(n-1)+2*u(n-2)

for k in range(0,10):
    print(u(k))
```

L'exécution de ce programme renvoie l'affichage :

```
>>> %Run exo4suitesimb.py
 (0, 1)
 (1, 3)
 (5, 11)
 (21, 43)
 (85, 171)
 0
 1
 1
 3
 5
 11
 21
 43
 85
 171
```

Quels liens peut-on conjecturer entre les suites (a_n), (b_n) et (u_n) ? Démontrer cette conjecture.

On peut conjecturer que la suite (a_n) est la suite des termes de rangs pairs de (u_n) ; et (b_n) celle des termes de rangs impairs.

Autrement dit, on conjecture :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = u_{2n} \text{ ET } b_n = u_{2n+1}$$

Démontrons cela par récurrence...

PETITE REMARQUE

Les deux suites étant imbriquées, il est nécessaire de démontrer les deux résultats au sein d'une même récurrence !

- **Initialisation.** Pour $n=0$:
  On a $a_0 = 0 = u_0$ et $b_0 = 1 = u_1$: l'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons "$a_n = u_{2n}$ ET $b_n = u_{2n+1}$" et montrons "$a_{n+1} = u_{2n+2}$ ET $b_{n+1} = u_{2n+3}$".
  On a :
  $$\begin{array}{rcll} a_{n+1} & = & 2a_n + b_n & \\ & = & 2u_{2n} + u_{2n+1} & \text{par hypothèse de récurrence} \\ & = & u_{2n+2} & \text{relation sur } (u_n) \end{array}$$
  Et aussi :
  $$\begin{array}{rcll} b_{n+1} & = & 2a_n + 3b_n & \\ & = & 2u_{2n} + 3u_{2n+1} & \text{par hypothèse de récurrence} \\ & = & 2u_{2n} + u_{2n+1} + 2u_{2n+1} & \\ & = & u_{2n+2} + 2u_{2n+1} & \text{relation sur } (u_n) \\ & = & u_{2n+3} & \text{relation sur } (u_n) \end{array}$$
  L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = u_{2n}$ ET $b_n = u_{2n+1}$.

★★★★★★★

Exercice 5

Le but de l'exercice est de résoudre l'équation suivante, que l'on nommera (E) :
$$a^b = b^a$$
où a et b sont des entiers naturels non nuls tels que $a < b$.

1. Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$, avec $a < b$. Montrer que l'équation $a^b = b^a$ est équivalente à l'équation $f(a) = f(b)$, avec $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$.
   On a les équivalences :
   $$\begin{array}{rcll} a^b = b^a & \iff & \ln(a^b) = \ln(b^a) & \text{par stricte croissance de ln sur } \mathbb{R}_*^+ \ (a, b \in \mathbb{R}_*^+) \\ & \iff & \dfrac{\ln(a)}{a} = \dfrac{\ln(b)}{b} & a, b \neq 0 \\ & \iff & f(a) = f(b) & \end{array}$$

   Important ! La **stricte** croissance de ln est nécessaire pour remonter l'équivalence (voir question 2 de l'exercice 1).

2. Déterminer l'ensemble de définition de f puis dresser son tableau de variations complet.
   On admettra et on fera apparaître dans le tableau de variations que : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
   f est définie sur $\mathbb{R}_*^+$; et elle est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ (comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_*^+$, dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_*^+$).
   Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$. On a :
   $$f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$
   Or :
   $$1 - \ln(x) > 0 \iff x < e$$
   D'où :

x	0		e		$+\infty$
signe de $f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
variations de f	|| $-\infty$	↗	e^{-1}	↘	0

   ✘ Attention ! On travaille pour $x \in \mathbb{R}_*^+$, donc la condition "$x < e$" est en fait "$0 < x < e$".

3. Soit $y \in \mathbb{R}$. Discuter du nombre d'antécédents de y par f.
   En déduire les valeurs possibles de a pour l'équation (E).
   - D'après le tableau de variations précédents, on a :
     - Si $y \leq 0$, alors y possède un unique antécédent par f, appartenant à $]0;1]$ (car $f(1) = 0$).
     - Si $y \in]0; e^{-1}[$, alors y possède deux antécédents par f ; l'un dans $]1; e[$, l'autre dans $]e; +\infty[$.
     - Si $y = e^{-1}$, alors y possède un unique antécédent par f : e.
     - Si $y > e^{-1}$, alors y ne possède aucun antécédent par f.
   - Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que $a < b$ et (a, b) soit solution de (E).
     On a vu que l'équation (E) est équivalente à l'équation $f(a) = f(b)$.
     Pour que $f(a) = f(b)$, il faut que l'image commune à a et b par f possède deux antécédents distincts (a et b). Il faut donc que $f(a) \in]0; e^{-1}[$. Et ainsi, d'après ce qui précède, a peut prendre toute valeur entière de l'intervalle $]1, e[$. Puisque $e \simeq 2.7$, la seule valeur possible de a est 2.

     Conclusion : la seule valeur possible de a pour l'équation (E) est 2.

4. Conclure en donnant tous les couples (a, b) d'entiers naturels non nuls, avec $a < b$, vérifiant l'équation (E).
   Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$, avec $a < b$, tels que (a, b) soit solution de (E).
   D'après la question précédente, on a $a = 2$. L'étude faite dans la question précédente permet d'affirmer que s'il existe un $b \in \mathbb{N}^*$ tel que $f(2) = f(b)$, alors b est unique et est dans l'intervalle $]e; +\infty[$.
   Testons !
   - $a^3 = 8$ et $3^a = 9$. Ainsi, 3 n'est pas solution de $f(b) = f(2)$.
   - $a^4 = 16$ et $4^a = 16$. Ainsi, 4 est solution de l'équation $f(b) = f(2)$, et c'est donc la seule.

Conclusion : l'unique couple (a, b) tel que : $a, b \in \mathbb{N}^*,\ a < b,\ a^b = b^a$, est le couple $(2, 4)$.