

"Ce n'est pas la force, mais la persévérance, qui fait les grandes œuvres"
 Samuel Johnson

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation. Quelques précisions :

- les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),
- les questions doivent être présentées dans l'ordre du sujet.

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.

NOM Prénom

EXERCICE 1

Les questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres.

1. **Vrai ou faux.** Pour chacune des affirmations ci-dessous, préciser si elle est vraie ou fausse, et justifier.

1.a. $\forall a, b \in \mathbb{R}, \exp(a+b) = \exp(a) + \exp(b)$.

1.b. $\forall a, b \in \mathbb{R}^*, \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

1.c. $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}^*, \left(\frac{a}{b} \geq 1 \implies a \geq b\right)$

1.d. Le produit de deux suites géométriques est une suite géométrique.

1.e. Il existe deux suites arithmético-géométriques différentes dont la somme est une suite arithmético-géométrique.

1.f. Sur les 6 propositions de ce vrai ou faux, 2 exactement sont vraies.

2. Soit f une fonction strictement monotone sur un intervalle I . Démontrer :

$$\forall a, b \in I, (a = b \iff f(a) = f(b))$$

3. Notons f la fonction définie sur \mathbb{R}_*^+ par $f(x) = \ln(x) + x^2 + x - 5 + e^x$. Étudier les variations de f sur \mathbb{R}_*^+ .

4. Considérons $f : x \mapsto \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$.

4.a. Déterminer l'ensemble de définition de f .

4.b. Étudier sa parité.

4.c. Dresser son tableau de variations.

5. Considérons $f : x \mapsto x^x$ sur \mathbb{R}_*^+ . Étudier les variations de f .

6. Calculer $\sum_{k=5}^{22} (k-4)^2$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.

8. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Calculer $\ln\left(\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)\right)$.

9. Démontrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n (-1)^k k = \frac{(-1)^n (2n+1) - 1}{4}$.

10. On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 1 \end{cases}$

10.a. Déterminer le terme général de (u_n) .

10.b. En déduire une expression simplifiée de $\sum_{k=0}^n u_k$ pour $n \in \mathbb{N}$.

11. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+, e^x \geq \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$.

12. Déterminer toutes les fonctions f , définies sur \mathbb{R} , telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(xy) = f(x+y)$$

13. On a : $\sum_{k=1}^4 k^4 = 1 + 2^4 + 3^4 + 4^4 = 354$ et $\left(\sum_{k=1}^4 k\right)^4 = (1 + 2 + 3 + 4)^4 = 10^4 = 10000$.

La différence entre $\left(\sum_{k=1}^4 k\right)^4$ et $\sum_{k=1}^4 k^4$ est alors de 9646.

Écrire une fonction, d'en-tête `différence(n)` : qui renvoie la valeur de la différence entre $\left(\sum_{k=1}^n k\right)^4$ et $\sum_{k=1}^n k^4$.



EXERCICE 2

Soient a, b des réels strictement positifs. Notons f la fonction définie sur \mathbb{R}_*^+ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+, f(x) = \ln(ax) \left(1 - \frac{b}{x}\right)$$

On suppose que $f(1) = 0$ et $f'(1) = 0$.

1. Déterminer les valeurs de a et b .
2. Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, $f'(x) = \frac{\ln(x) + x - 1}{x^2}$.
3. **3.a.** Étudier le signe de $\ln(x) + x - 1$ en fonction des valeurs de $x \in \mathbb{R}_*^+$.
- 3.b.** En déduire les variations de f sur \mathbb{R}_*^+ .



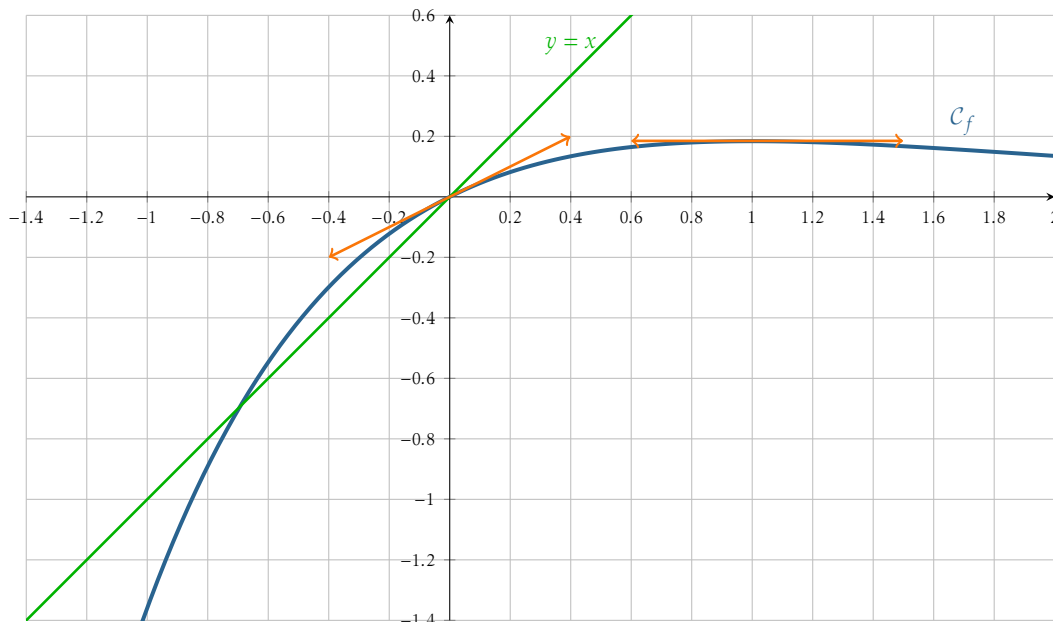
EXERCICE 3

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2}xe^{-x}$, définie sur \mathbb{R} , ainsi que la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan.

Le but de l'exercice est d'étudier la suite (u_n) en fonction des différentes valeurs de son premier terme u_0 .

1. Étude de f .
 - 1.a. Discuter du signe de $f(x)$ selon les valeurs du réel x .
 - 1.b. Dresser le tableau de variations de f sur \mathbb{R} .
 - 1.c. Déterminer l'équation réduite de la tangente à C_f au point d'abscisse 0, notée T_0 .
 - 1.d. Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq \frac{1}{2}x$.
 - 1.e. Étudier la position relative de C_f par rapport à la droite d'équation $y = x$ et préciser leurs éventuels points d'intersection.
 - 1.f. Représenter l'allure de C_f sur le graphique ci-dessous. Données : $\ln(2) \simeq 0,7$ et $e^{-1} \simeq 0,4$.



2. Écrire une fonction Python, nommée u , prenant en arguments d'entrée un réel a et un entier naturel n et renvoyant en sortie la valeur de u_n dans le cas où $u_0 = a$.
3. **3.a.** Représenter, en bleu sur le graphique ci-dessus, les trois premiers termes de (u_n) dans le cas où $u_0 = \frac{-4}{5}$.
- 3.b.** Représenter, en bleu sur le graphique ci-dessus, les cinq premiers termes de (u_n) dans le cas où $u_0 = \frac{-3}{5}$.
- 3.c.** Représenter, en rouge sur le graphique ci-dessus, les trois premiers termes de (u_n) dans le cas où $u_0 = 1$.
- 3.d.** Dans chaque cas, émettre des conjectures sur les variations de (u_n) et son comportement en l'infini.
4. Que dire des cas " $u_0 = 0$ " et " $u_0 = -\ln(2)$ " ?
5. Cas $u_0 \in]-\ln(2); 0[$. Dans cette question, $u_0 \in]-\ln(2); 0[$.
- 5.a.** Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-\ln(2) < u_n < 0$.
- 5.b.** Étudier les variations de (u_n) .
6. Cas $u_0 > 0$. Dans cette question, $u_0 > 0$ et on admet que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ (que l'on démontrerait aisément par récurrence).
- 6.a.** Étudier les variations de (u_n) .
- 6.b.** A l'aide de la question 1(d), démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \frac{u_0}{2^n}$.
- 6.c.** On suppose, dans cette question uniquement, que $u_0 = 1$.
- 6.c.i.** Résoudre, dans \mathbb{N} , l'inéquation $\frac{1}{2^n} \leq 10^{-3}$, puis interpréter le résultat obtenu.

6.c.ii. Le programme suivant (dans lequel u est la fonction Python définie à la question 2) renvoie la valeur 9. Interpréter cette valeur et la comparer à la valeur obtenue à la question précédente.

```

1 n=0
2 while u(1,n) > 10**(-3):
3     n=n+1
4 print(n)

```

- 6.d.** On considère maintenant les suites (v_n) et (S_n) définies sur \mathbb{N} par $v_n = \ln(u_n)$ et $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.
- 6.d.i.** Établir, pour tout entier naturel n , une relation entre v_{n+1} , v_n et u_n .
- 6.d.ii.** Démontrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \ln(u_0) - (n+1)\ln(2) - \ln(u_{n+1})$.
- 6.d.iii.** Étudier les variations de la suite (S_n) et, en utilisant le résultat de la question 6(b), démontrer qu'elle est majorée.
- 6.d.iv. Bonus :** que peut-on en déduire? Prouver alors qu'il existe un réel $\ell \in [u_0; 2u_0]$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n u_n = u_0 e^{-\ell}$.
7. Cas $u_0 < -\ln(2)$. Dans cette question, $u_0 < -\ln(2)$. Étudier les variations de (u_n) .



EXERCICE 4

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 3b_n \end{cases}$$

- Écrire une fonction Python, d'en-tête `def suites(n)` : prenant un entier naturel n en argument d'entrée et renvoyant les valeurs de a_n et b_n en sortie.
- Calculer a_1 , b_1 , a_2 et b_2 .
- Première méthode de détermination des termes généraux.**
 - Déterminer une relation de récurrence d'ordre 1 sur la suite (s_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $s_n = a_n + b_n$.
 - Déterminer une relation de récurrence d'ordre 1 sur la suite (t_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n = 2a_n - b_n$.
 - En déduire le terme général des suites (a_n) et (b_n) .
- Deuxième méthode de détermination des termes généraux.**
 - Démontrer que (a_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
 - En déduire le terme général de (a_n) puis celui de (b_n) .
- On considère maintenant la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n \end{cases}$. On considère le programme suivant (dans lequel la fonction `suites` est la fonction définie dans la question 1) :

```

1 for k in range(0,5):
2     print(suites(k))
3
4 def u(n):
5     if n==0:
6         return 0
7     elif n==1:
8         return 1
9     else:
10        return u(n-1)+2*u(n-2)
11
12 for k in range(0,10):
13     print(u(k))

```

L'exécution de ce programme renvoie l'affichage :

```

>>> %Run exo4suitesinb.py
(0, 1)
(1, 3)
(5, 11)
(21, 43)
(85, 171)
0
1
1
3
5
11
21
43
85
171

```

Quels liens peut-on conjecturer entre les suites (a_n) , (b_n) et (u_n) ? Démontrer cette conjecture.



EXERCICE 5

Le but de l'exercice est de résoudre l'équation suivante, que l'on nommera (E) :

$$a^b = b^a$$

où a et b sont des entiers naturels non nuls tels que $a < b$.

1. Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$, avec $a < b$. Montrer que l'équation $a^b = b^a$ est équivalente à l'équation $f(a) = f(b)$, avec $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$.
2. Déterminer l'ensemble de définition de f puis dresser son tableau de variations complet.
On admettra et on fera apparaître dans le tableau de variations que : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
3. Soit $y \in \mathbb{R}$. Discuter du nombre d'antécédents de y par f .
En déduire les valeurs possibles de a pour l'équation (E).
4. Conclure en donnant tous les couples (a, b) d'entiers naturels non nuls, avec $a < b$, vérifiant l'équation (E).