Concours blanc 1

Samedi 4 décembre - 4h00

NOM .... Prénom ....

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation. Quelques précisions :

- ***les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),***
- ***les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.***

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.

"Faire aisément ce que d'autres trouvent difficile à réaliser, c'est le talent ;
faire ce qui est impossible au talent, c'est le génie."
Henri-Frédéric Amiel

Exercice 1

Le but de cet exercice est d'utiliser `Python` pour déterminer des indicateurs d'une série statistique.
Dans tout l'exercice, on considérera donc un sondage fictif dans lequel des individus ont été interrogés sur leur taille. Les données brutes (en cm) obtenues seront stockées dans une liste, notée `ListeSondage` dans `Python`.

Soient n un entier naturel non nul et $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une série statistique de données quantitatives. On rappelle les éléments statistiques suivants :

- On appelle **variance** de la série statistique, notée $\mathrm{V}(x)$, le réel défini par :

$$\mathrm{V}(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x})^2$$

  où $\overline{x}$ désigne la moyenne de la série statistique x.
  $\mathrm{V}(x)$ est ainsi un réel positif et on définit **l'écart-type** de x, noté $\sigma(x)$, par : $\sigma(x) = \sqrt{\mathrm{V}(x)}$.
- On appelle **médiane** de la série statistique, notée $med(x)$, un réel qui partage la série statistique *ordonnée* en deux parties de même effectif. Une fois la série statistique ordonnée, si son effectif est impair, la médiane est alors la valeur centrale de la série ; si l'effectif est pair, il est habituel de prendre la moyenne des deux valeurs centrales. On parlera alors de *la* médiane.
- On appelle **premier quartile** (resp. **troisième quartile**) de la série statistique, notée $\mathrm{Q}_1(x)$ (resp. $\mathrm{Q}_3(x)$), la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 25% (resp. 75%) des valeurs de la série soient inférieures ou égales à $\mathrm{Q}_1(x)$ (resp. $\mathrm{Q}_3(x)$).

On considère le programme suivant :

```
1  import numpy as np
2
3  def moyenne(L):
4      m=..................
5      return m
6
7  def variance(L):
8      m=moyenne(L)
9      Lvar =...............
10     v =..................
11     return v
12
13 ........................
14 ........................
15
16
17 def listeordonnee(L):      # fonction pour ranger une liste dans l'ordre croissant
18     for k in range(1,len(L)):
19         for j in range(0,k):
20             if L[j]>L[k]:
21                 L[j],L[k]=L[k],L[j]
22     return L
23
24 def mystere(L):
25     Lbis=listeordonnee(L)
26     if len(Lbis)%4==0:     # a%b=reste de la division euclidienne de a par b
27         n=int(len(Lbis)/4)
28         m=int(3*len(Lbis)/4)
29         return Lbis[n-1],Lbis[m-1]    # Attention : numérotation de 0 à len(L)-1
30     else:
31         n=int(np.floor(len(Lbis)/4)+1)
32         m=int(np.floor(3*len(Lbis)/4)+1)
33         return Lbis[n-1], Lbis[m-1]
```

1. Recopier et compléter la ligne 4 du programme, afin que `moyenne(ListeSondage)` renvoie la moyenne de la série statistique contenue dans `ListeSondage`.
   L4 : `sum(L)/len(L)`
2. Recopier et compléter les lignes 9 et 10 du programme, afin que `variance(ListeSondage)` renvoie la variance de la série statistique contenue dans `ListeSondage`.
   On regarde la définition de la variance... Il faut calculer $(x_k - \overline{x})^2$ pour tous les k, puis en faire la moyenne !
   On stocke donc les valeurs $(x_k - \overline{x})^2$ dans une liste, que l'on définit en compréhension.

   L9 : `[(k-m)**2 for k in L]`
   L10 : `sum(Lvar)/len(Lvar)`
3. Recopier et compléter les lignes 13 et 14 du programme avec une fonction qui renvoie l'écart-type de la série statistique contenue dans `ListeSondage`.
   L13 et L14 :
   ```
   def ecarttype(L):
       return np.sqrt(variance(L))
   ```

✘ **Attention !**
La variable `v` de la fonction variance est locale. Elle n'est donc pas reconnue si elle est utilisée en dehors de la fonction variance...

4. Si la série statistique étudiée contient n valeurs, combien de fois le test `if` de la ligne 20 sera-t-il exécuté lors de l'exécution de la commande `listeordonnee(ListeSondage)` ?
Si la liste contient n valeurs, alors dans L18, k parcourra $[\![1,n-1]\!]$.
Et pour chaque $k\in[\![1,n-1]\!]$, dans L19, j parcourra tout $[\![0;k-1]\!]$.
Ensuite, pour chaque j, le test `if` est exécuté.
Comme, pour k fixé, j prend successivement k valeurs, le test `if` est exécuté k fois... Et ceci, pour tous les $k\in[\![1,n-1]\!]$.

Par conséquent, le test `if` est exécuté $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}k$ fois.

Or :

$$\sum_{k=1}^{n-1}k=\frac{n(n-1)}{2}$$

Conclusion : si la liste contient n valeurs, le test `if` de la ligne 20 est exécuté $\dfrac{n(n-1)}{2}$ fois.

5. La commande `mystere(ListeSondage)` renvoie : `(163 , 180)`. Interpréter ces valeurs. Que dire du pourcentage des valeurs appartenant à l'intervalle $[163;180]$?
La fonction `mystere` renvoie clairement les premier et troisième quartiles de la liste L.
Par conséquent, le premier quartile de la série statistique est 163, et le troisième quartile est 180.
On sait que l'intervalle interquartile $[Q_1;Q_3]$ contient au moins 50% des valeurs de la série statistique...

Conclusion : au moins 50% des personnes interrogées mesurent entre 1m68 et 1m80 compris.

6. Écrire une fonction d'en-tête `def mediane(L):` qui prend en argument d'entrée une liste `L` et renvoie en sortie la médiane de la série de valeurs contenue dans `L`.
On reprend la définition de médiane rappelée dans l'énoncé...
La fonction doit renvoyer la valeur centrale de la série ordonnée lorsque l'effectif est impair ; et la moyenne des deux valeurs centrales lorsque l'effectif est pair...

```python
import numpy as np

def mediane(L):
    Lbis=listeordonnee(L)
    if len(Lbis)%2==0:      # a%b = reste de la division euclidienne de a par b
        n=int(len(Lbis)/2)
        return (Lbis[n-1]+Lbis[n])/2    # Attention : numérotation de 0 à len(L)-1
    else:
        n=int(np.floor(len(Lbis)/2))
        return Lbis[n]
```

Ce qu'il faut retenir des copies :

- Il est impensable de ne pas savoir traiter la question 1... La question 2 doit être traitée de la sorte : une des spécificités de `Python` est cette écriture en compréhension des listes, il faut s'en servir !!
- Sur les quartiles : au moins 25% des sondés ont une taille inférieure ou égale à 163 et au moins 75% ont une taille inférieure ou égale à 180.
Pour l'intervalle interquartile [163;180], on prend ceux qui ont une taille inférieure ou égale à 180 (au moins 75%) et on enlève ceux qui ont une taille strictement inférieure à 163 (moins de 25%)... Il reste donc au moins 50% dans cet intervalle !

★★★★★★★

Exercice 2

Le but de l'exercice est de déterminer l'ensemble $\mathcal{E}=\left\{P\in\mathbb{R}[X]\ /\ P(X^2)=(X^3+1)P(X)\right\}$.

1. Vérifier que le polynôme nul appartient à $\mathcal{E}$. Le polynôme $P(X)=X^2+1$ appartient-il à $\mathcal{E}$?
   - Polynôme nul : la question est de savoir si le polynôme nul vérifie la relation $P(X^2)=(X^3+1)P(X)$.
   Si P est le polynôme nul, alors $P(X^2)=0$ et également $(X^3+1)P(X)=0$. D'où l'égalité.
   Par conséquent : le polynôme nul appartient à $\mathcal{E}$.
   - Pour $P(X)=X^2+1$.
   D'une part $P(X^2)=X^4+1$ et d'autre part $(X^3+1)P(X)=X^5+X^3+X^2+1$. Ces deux polynômes étant différents, on en déduit que le polynôme X^2+1 n'appartient pas à $\mathcal{E}$.

2. Prenons P un polynôme non nul appartenant à $\mathcal{E}$.
   2.a. Démontrer que $\deg(P)=3$.
   Puisque $P\in\mathcal{E}$, on a :

$$P(X^2)=(X^3+1)P(X)$$

Or, P étant non nul, $\deg\big(P(X^2)\big) = 2\deg(P)$ et $\deg\big((X^3+1)P(X)\big) = \deg(X^3+1) + \deg(P) = 3 + \deg(P)$.
Les deux polynômes $P(X^2)$ et $(X^3+1)P(X)$ étant égaux, ils doivent avoir le même degré.
Par conséquent, on doit avoir :

$$2\deg(P) = 3 + \deg(P)$$

Conclusion : nécessairement, $\deg(P) = 3$

2.b. Démontrer que $P(1) = 0$.
Puisque $P \in \mathcal{E}$, on a :

$$P(X^2) = (X^3+1)P(X)$$

En particulier :

$$P(1) = 2P(1)$$

Conclusion : $P(1) = 0$.

2.c. En dérivant la relation $P(X^2) = (X^3+1)P(X)$, établir que $P'(0) = P''(0) = 0$.
Puisque $P \in \mathcal{E}$, on a :

$$P(X^2) = (X^3+1)P(X)$$

En dérivant, cela donne :

$$2XP'(X^2) = 3X^2P(X) + (X^3+1)P'(X)$$

En particulier, en prenant $X = 0$, on obtient : $P'(0) = 0$.
En redérivant et en évaluant en 0, on obtiendrait $P''(0) = 0$.

Conclusion : $P'(0) = P''(0) = 0$.

2.d. En déduire qu'il existe un réel non nul a tel que $P(X) = a(X^3-1)$.
On sait que P est de degré 3. Il existe donc $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, avec $a \neq 0$, tels que $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$.
En utilisant le fait que $P(1) = P'(0) = P''(0) = 0$, on obtient $b = c = 0$ et $d = -a$.

Conclusion : il existe un réel non nul a tel que $P(X) = a(X^3-1)$.

3. Réciproquement : démontrer que s'il existe un réel a tel que $P(X) = a(X^3-1)$, alors $P \in \mathcal{E}$.
Prenons alors un nombre réel a et un polynôme $P(X) = a(X^3-1)$.

- D'une part : $P(X^2) = a(X^6-1)$
- D'autre part : $(X^3+1)P(X) = a(X^3+1)(X^3-1) \underset{\text{identité remarquable}}{=} a(X^6-1)$.

Conclusion : s'il existe un réel a tel que $P(X) = a(X^3-1)$, alors $P \in \mathcal{E}$.

4. Combien l'ensemble $\mathcal{E}$ contient-il de polynômes ? Les décrire.
La question 3 a permis de voir qu'il existait une infinité de polynômes dans $\mathcal{E}$: tous ceux de la forme $P(X) = a(X^3-1)$ avec $a \in \mathbb{R}$.
Également, la question 2 a permis de montrer que tous les polynômes non nuls de $\mathcal{E}$ sont de la forme $P(X) = a(X^3-1)$, avec $a \in \mathbb{R}^*$. Et puisque le polynôme nul est lui aussi de la forme $a(X^3-1)$ (avec $a = 0$) ; tous les polynômes de $\mathcal{E}$ sont alors de la forme $a(X^3-1)$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Conclusion : $P \in \mathcal{E}$ si et seulement si, il existe un réel a tel que $P(X) = a(X^3-1)$.
On peut alors écrire : $\mathcal{E} = \left\{a(X^3-1) \,/\, a \in \mathbb{R}\right\}$.

CQFR

Ce qu'il faut retenir des copies :
C'est un exercice qui a été très peu abordé et assez mal fait. Sans doute que l'objectif des questions n'a pas été bien compris. A retravailler en lien avec l'exercice 6 du chapitre sur les polynômes.

L'exercice est ici très détaillé... et qui guide sur un raisonnement d'analyse-synthèse : on trouve des conditions nécessaires pour qu'un polynôme soit dans $\mathcal{E}$, puis on vérifie (dernière question), que tous ceux trouvés sont bien dans cet ensemble.

★★★★★★★

Exercice 3

Partie A. Puissances d'une matrice.

1. **Question préliminaire.**
Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice telle que $A^3 - 5A^2 + 8A - 4I_3 = 0_3$ et $A \neq I_3$.

1.a. Démontrer que la matrice A est inversible et exprimer A^{-1} comme une combinaison linéaire de I_3, A et A^2.

Puisque $A^3-5A^2+8A-4I_3=0_3$, on a :

$$A\times\frac{1}{4}(A^2-5A+8I_3)=I_3$$

> **Conclusion :** A est inversible et $A^{-1}=\frac{1}{4}(A^2-5A+8I_3)$.

1.b. Déterminer les racines du polynôme X^3-5X^2+8X-4.

On a :

$$\begin{aligned} X^3-5X^2+8X-4 &= (X-1)(X^2-4X+4) \quad \text{car 1 est racine de } X^3-5X^2+8X-4 \\ &= (X-1)(X-2)^2 \end{aligned}$$

> **Conclusion :** les racines du polynôme X^3-5X^2+8X-4 sont 1 et 2.

Petite remarque
2 est racine double

1.c. En déduire que la matrice $A-2I_3$ n'est pas inversible.

D'après la question précédente, on a : $X^3-5X^2+8X-4=(X-1)(X-2)^2$; et ainsi :

$$(A-I_3)(A-I_3)^2=0_3$$

Raisonnons par l'absurde et supposons ainsi que $A-2I_3$ est inversible.
En multipliant, par $(A-2I_3)^{-1}$ (par la droite) l'égalité $(A-I_3)(A-2I_3)^2=0_3$, on obtient :

$$(A-I_3)(A-2I_3)=0_3$$

En renouvelant, on a ainsi :

$$A-I_3=0_3$$

Ce qui contredit l'hypothèse que $A\neq I_3$.

> **Conclusion :** la matrice $A-I_2$ n'est pas inversible.

☞ Pour info...
La matrice $A-I_3$, quant à elle, n'est pas nécessairement non inversible. En effet, en prenant $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$, on aurait $(A-2I_2)^2=0_2$, donc X^3-5X^2+8X-4 serait annulateur de A ; et pourtant, $A-I_2=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ est inversible.
Tout dépend donc de la matrice A initiale...

1.d. Que peut-on alors dire du nombre de solutions de l'équation $(A-2I_3)X=0$, d'inconnue $X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$?

On sait qu'une matrice $B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est inversible si, et seulement si, pour tout $Y\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, l'équation $BX=Y$ d'inconnue $X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ admet une unique solution. En particulier, si B n'est pas inversible, l'équation $BX=0$ n'a pas une unique solution.
Or, l'équation $BX=0$ est un système linéaire homogène. Il a donc soit une unique solution, 0, soit une infinité.
Par conséquent, si B n'est pas inversible, l'équation $BX=0$ admet une infinité de solutions.
On applique enfin ce raisonnement à la matrice $B=A-2I_3$, qui n'est pas inversible d'après la question précédente...

> **Conclusion :** l'équation $(A-2I_3)X=0$, d'inconnue $X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, admet une infinité de solutions.

On considère à présent la matrice $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\4&-8&5\end{pmatrix}$ et on donne : $A^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\4&-8&5\\20&-36&17\end{pmatrix}$.

2. Calculer A^3 puis vérifier que le polynôme X^3-5X^2+8X-4 est annulateur de la matrice A.

On trouve $A^3=\begin{pmatrix}4&-8&5\\20&-36&17\\68&-116&49\end{pmatrix}$; puis, sans réelle difficulté : $A^3-5A^2+8A-4I_3=0_3$.

> **Conclusion :** le polynôme X^3-5X^2+8X-4 est annulateur de la matrice A.

3. Résoudre l'équation $AX=X$, d'inconnue $X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, puis en donner une solution, notée U_1, dont la première composante est égale à 1.

Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
AX=X &\iff \begin{cases} y=x\\ z=y\\ 4x-8y+5z=z\end{cases}
\iff \begin{cases} -x+y=0\\ -y+z=0\\ 4x-8y+4z=0\end{cases}\\
&\underset{L_3\leftarrow L_3+4L_1}{\iff} \begin{cases} -x+y=0\\ -y+z=0\\ -4y+4z=0\end{cases}
\underset{L_3\leftarrow L_3-4L_2}{\iff} \begin{cases} -x+y=0\\ -y+z=0\\ 0=0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x=z\\ y=z\\ z=z\end{cases}
\iff X=z\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Petite remarque
Exceptionnellement, on pouvait aller plus vite...

$$\begin{cases} y=x\\ z=y\\ 4x-8y+5z=z\end{cases}\iff\begin{cases} y=x\\ z=y\\ 4x-8x+5x=x\end{cases}\iff\begin{cases} y=x\\ z=x\\ x=x\end{cases}$$

Conclusion : l'ensemble solution de l'équation $AX = X$ est $\left\{ z\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ z \in \mathbb{R} \right\}$ et $U_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ en est une (la) solution dont la première composante vaut 1.

4. Notons $U_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$. Montrer que U_2 est solution de l'équation $AX = 2X$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

On a :

$$AU_2 = \ldots = \begin{pmatrix}2\\4\\8\end{pmatrix} = 2U_2$$

Conclusion : U_2 est solution de l'équation $AX = 2X$.

5. Résoudre l'équation $AX = 2X + U_2$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, puis en donner une solution, notée U_3, dont la première composante est nulle.

Soit $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
AX = 2X \quad &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & y & & & = & 2x+1 \\ & & & & z & = & 2y+2 \\ 4x & - & 8y & + & 5z & = & 2z+4 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -2x & + & y & & & = & 1 \\ & - & 2y & + & z & = & 2 \\ 4x & - & 8y & + & 3z & = & 4 \end{array}\right. \\
&\underset{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -2x & + & y & & & = & 1 \\ & - & 2y & + & z & = & 2 \\ & - & 6y & + & 3z & = & 6 \end{array}\right. \\
&\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -2x & + & y & & & = & 1 \\ & - & 2y & + & z & = & 2 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{1}{4}z - 1 \\ y & = & \frac{1}{2}z - 1 \\ z & = & z \end{array}\right. \\
&\iff X = z\begin{pmatrix}1/4\\1/2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Conclusion : l'ensemble solution de l'équation $AX = 2X + U_2$ est $\left\{ z\begin{pmatrix}1/4\\1/2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ z \in \mathbb{R} \right\}$ et $U_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}$ en est une (la) solution dont la première composante vaut 0.

6. Posons maintenant $P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 2 & 1\\1 & 4 & 4\end{pmatrix}$.

Petite remarque
P est la matrice dont les colonnes sont U_1, U_2 et U_3...

6.a. Montrer que la matrice P est inversible et calculer son inverse.

Sans difficulté, par la méthode habituelle, on trouve que P est inversible et que $P^{-1} = \begin{pmatrix}4 & -4 & 1\\-3 & 4 & -1\\2 & -3 & 1\end{pmatrix}$.

6.b. Calculer $P^{-1}AP$. On notera T la matrice obtenue. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PT^nP^{-1}$.

- $P^{-1}A = \begin{pmatrix}4 & -4 & 1\\-4 & 5 & -1\\4 & -6 & 2\end{pmatrix}$, puis $P^{-1}AP = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 1\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$.
  On a ainsi $T = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 1\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$.
- Par récurrence immédiate, puisque $A = PTP^{-1}$, on obtient :
  $$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PT^nP^{-1}$$

6.c. Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $T^n = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2^n & n2^{n-1}\\0 & 0 & 2^n\end{pmatrix}$.

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
  D'une part, par convention : $T^0 = I_3$.
  D'autre part : $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2^0 & 0 \times 2^{-1}\\0 & 0 & 2^0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.
  L'initialisation est ainsi vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $T^n = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2^n & n2^{n-1}\\0 & 0 & 2^n\end{pmatrix}$ et montrons que $T^{n+1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2^{n+1} & (n+1)2^n\\0 & 0 & 2^{n+1}\end{pmatrix}$.

On a :

$$\begin{array}{rcl} T^{n+1} & = & T^n \times T \\ & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n+1} & 2^n + n2^n \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n+1} & (n+1)2^n \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix} \end{array}$$

L'hérédité est établie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

Petite remarque
On détaille suffisamment les calculs pour montrer au correcteur qu'ils ont été faits !

6.d. Soit $n \in \mathbb{N}$. A l'aide de la formule du binôme de Newton, retrouver l'expression de T^n.

Remarquons que $T = D + N$, où $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- Sans difficulté, on remarque que $N^2 = 0_3$; ainsi, pour tout $k \in [\![2;+\infty[\![$, $N^k = 0_3$.
- $DN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = ND$: D et N commutent.

Petite remarque
Il faut le vérifier ici, puisque D n'est pas un multiple de la matrice I_3, ce n'est donc pas "évident".

Par conséquent :

$$\begin{array}{rcll} T^n & = & (D+N)^n & \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k & \text{formule du binôme de Newton, puisque D et N commutent} \\ & = & \binom{n}{0} D^n N^0 + \binom{n}{1} D^{n-1} N \quad \text{si } n \geq 1 & \forall k \in [\![2;+\infty[\![,\ N^k = 0_3 \\ & = & D^n + nD^{n-1}N & \end{array}$$

Or, D étant diagonale, on a : $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

Et de plus : $D^{n-1}N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a ainsi établi :

$$\forall n \in [\![1;+\infty[\![,\ T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Et cette égalité est encore valable pour $n = 0$...

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

6.e. Soit $n \in \mathbb{N}$. Conclure sur l'expression de A^n.

En utilisant les résultats des questions 6(b) et 6(c) :

$$\begin{array}{rcl} A^n & = & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 4+(n-3)2^n & -4+2^{n+2}-3n2^{n-1} & 1-2^n+n2^{n-1} \\ 4+(n-2)2^{n+1} & -4+2^{n+3}-3(n+1)2^n & 1+(n-1)2^n \\ 4+(n-1)2^{n+2} & -4+2^{2n+4}-3(n+2)2^{n+1} & 1+n2^{n+1} \end{pmatrix} \end{array}$$

Vérification
On peut rapidement vérifier que l'expression donne I_3 pour $n = 0$ (A étant inversible) et A pour $n = 1$...

Partie B. Application à l'étude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 3.

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = 1,\ u_2 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 5u_{n+2} - 8u_{n+1} + 4u_n \end{cases}$$

1. Écrire une fonction `Python` qui prend en argument d'entrée un entier naturel n et qui renvoie la valeur de u_n en sortie. *On veillera en particulier à la validité du programme pour renvoyer les valeurs de u_0, u_1 et u_2.*

```python
#Avec une fonction récursive :
def u(n):
    if n==0:
        return 1
    elif n==1:
        return 1
    elif n==2:
        return 4
    else :
        return 5*u(n-1)-8*u(n-2)+4*u(n-3)

#Avec une boucle for :
def ubis(n):
    if n==0:
        return 1
    elif n==1:
        return 1
    elif n==2:
        return 4
    else :
        U,V,W=1,1,4
        for k in range(3,n+1):
            U,V,W=V,W,5*W-8*V+4*U
        return W
```

2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

2.a. Donner la matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = BX_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ 4u_n - 8u_{n+1} + 5u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$$

Conclusion : $X_{n+1} = BX_n$, avec $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -8 & 5 \end{pmatrix}$ (on reconnaît la matrice A de la partie précédente).

2.b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = B^n X_0$.

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
  $B^0 X_0 = I_3 X_0 = X_0$: l'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $X_n = B^n X_0$ et montrons que $X_{n+1} = B^{n+1} X_0$.
  On a :

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= BX_n \\ &= B \times B^n X_0 \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= B^{n+1} X_0 \end{aligned}$$

  L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : par récurrence, on a démontré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = B^n X_0$.

3. En utilisant les résultats de la partie A, conclure sur le terme général de la suite (u_n).

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a en fait $B = A$, et donc $X_n = A_n X_0$.
Ainsi :

$$X_n = \begin{pmatrix} 4+(n-3)2^n & -4+2^{n+2}-3n2^{n-1} & 1-2^n+n2^{n-1} \\ 4+(n-2)2^{n+1} & -4+2^{n+3}-3(n+1)2^n & 1-2^{n+1}+(n+1)2^n \\ 4+(n-1)2^{n+2} & -4+2^{2n+4}-3(n+2)2^{n+1} & 1-2^{n+2}+(n+2)2^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Mais seule la première ligne de X_n nous intéresse...

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 4 + 2^{n-1}(3n-6)$.

4. Par récurrence, retrouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 4 + 3(n-2)2^{n-1}$.

(u_n) étant une suite définie par une relation de récurrence linéaire d'ordre 3, mettons en place une récurrence triple !

- **Initialisation.** Pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$:
  - $4 + 3(0-2)2^{-1} = 4 - 3 = 1 = u_0$
  - $4 + 3(1-2)2^0 = 4 - 3 = 1 = u_1$
  - $4 + 3(2-2)2^1 = 4 = u_2$

  L'initialisation est ainsi vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons "$u_n = 4+3(n-2)2^{n-1}$, $u_{n+1} = 4+3(n-1)2^n$ et $u_{n+2} = 4+3n2^{n+1}$" et montrons que "$u_{n+3} = 4+3(n+1)2^{n+2}$".
  On a :

$$\begin{aligned} u_{n+3} &= 5u_{n+2} - 8u_{n+1} + 4u_n \\ &= 20 + 15n2^{n+1} - 32 - 8 \times 3(n-1)2^n + 16 + 4 \times 3(n-2)2^{n-1} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= 4 + 15n2^{n+1} - 12(n-1)2^{n+1} + 3(n-2)2^{n+1} \\ &= 4 + 2^{n+1}(15n - 12n + 12 + 3n - 6) \\ &= 4 + 2^{n+1}(6n+6) \\ &= 4 + 2^{n+2} \times 3(n+1) \\ &= 4 + 3(n+1)2^{n+2} \end{aligned}$$

  L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : par récurrence triple, on a établi : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 4 + 3(n-2)2^{n-1}$.

5. Étudier les variations de (u_n).
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a ainsi :
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 4 + 3(n-1)2^n - 4 - 3(n-2)2^{n-1} \\ &= 3 \times 2^{n-1}(2(n-1) - (n-2)) \\ &= 3 \times 2^{n-1} n \end{aligned}$$
Par conséquent :
$$u_{n+1} - u_n \geq 0$$
Conclusion : la suite (u_n) est croissante (et même strictement croissante à partir du rang 1).

Ce qu'il faut retenir des copies :

- Le début a été plutôt bien fait, même si la connaissance du cours est souvent insuffisante pour répondre à la question A1(d).
- Il ne faut pas perdre de temps dans la résolution d'un système sur la question A4...
- Quelques erreurs dans les résolutions du système : il faut s'entraîner, et dans le doute, appliquer scrupuleusement l'algorithme du pivot qui permet toujours la résolution !
- Dommage que la question B5 ait été si peu traitée... même si elle ne rapporte pas beaucoup de points, elle est très simple et le résultat donné à la question précédente permet de la faire.

★★★★★★★

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

Définition : On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (ax+b) = 0$. On définit de manière analogue une droite asymptote en $-\infty$.

Partie A. Étude de f.

1. Étudier la parité de f.
$f(1) = e^{-1}$ et $f(-1) = -e^{1}$.
Par conséquent :
   - $f(-1) \neq f(1)$: f n'est pas paire ;
   - $f(-1) \neq -f(1)$: f n'est pas impaire.

Conclusion : f n'est ni paire ni impaire.

2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Préciser les éventuelles asymptotes de $\mathcal{C}_f$.
   - En $-\infty$:
$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{x} = 0, \text{ donc par composition : } \lim_{x \to -\infty} e^{-1/x} = 1 \\ &\lim_{x \to -\infty} x = -\infty \end{aligned}\right\} \text{ ainsi, par opérations : } \boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$$
   - En 0, à gauche :
Soit $x < 0$. Posons $X = \dfrac{-1}{x}$. Ainsi : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} X = +\infty$. D'où :
$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} xe^{-1/x} &= \lim_{X \to +\infty} \frac{e^X}{-X} \quad \text{par croissance comparée} \\ &= -\infty \end{aligned}$$
Par conséquent :
$$\boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} xe^{-1/x} = -\infty}$$
   - En 0, à droite :
$$\left.\begin{aligned} &\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{-1}{x} = -\infty, \text{ donc par composition : } \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} e^{-1/x} = 0 \\ &\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x = 0^+ \end{aligned}\right\} \text{ ainsi, par opérations : } \boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = 0}$$

- En $+\infty$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{x}=0\text{, donc par composition : }\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-1/x}=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty\end{array}\right\}\text{ ainsi, par opérations : }\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty}$$

Conclusion : $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote "verticale" d'équation $x=0$, en 0 à gauche.

3. **3.a.** Rappeler $\lim\limits_{X\to0}\frac{e^X-1}{X}$.

$\lim\limits_{X\to0}\frac{e^X-1}{X}=1$.

3.b. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ ainsi que $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x)$

- En $+\infty$:
Soit x suffisamment proche de $+\infty$. On a :

$$f(x)-x=xe^{-1/x}-x=x\left(e^{-1/x}-1\right)$$

Posons $X=\frac{-1}{x}$. Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty}X=0^-$. D'où :

$$\lim_{x\to+\infty}x\left(e^{-1/x}-1\right)=\lim_{\substack{X\to0\\X<0}}-\frac{e^X-1}{X}=-1$$

Conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=-1$.

- En $-\infty$:
On procède de la même façon, pour obtenir le même résultat.

Conclusion : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)=-1$.

3.c. En déduire que $\mathcal{C}_f$ admet une droite asymptote aux voisinages de $\pm\infty$.

De la question précédente, on déduit :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x-1)\right)=0\quad;\quad\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-(x-1)\right)=0$$

Conclusion : la droite d'équation $y=x-1$ est asymptote à la courbe de f aux voisinages de $\pm\infty$.

4. Dresser le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}^*$.

$f=u\times\exp\circ v$, avec $u:x\longmapsto x$ et $v:x\longmapsto\frac{-1}{x}$.
v est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, donc $\exp\circ v$ est dérivable sur $\mathbb{R}*$. Ainsi, f, étant un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$, est également dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
Soit $x\in\mathbb{R}^*$. On a :

$$\begin{aligned}f'(x)&=e^{-1/x}+x\times\frac{1}{x^2}e^{-1/x}\\&=e^{-1/x}\left(1+\frac{1}{x}\right)\\&=e^{-1/x}\frac{x+1}{x}\end{aligned}$$

Réflexe ! Mise sous même dénominateur !

On obtient ainsi directement :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
variations de f	$-\infty$	↗	$-e$	↘	$-\infty$ ‖ 0	↗	$+\infty$

Réflexe ! On vérifie la cohérence du tableau...

5. Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f'(x)$.

Soit $x>0$. Posons $X=\frac{1}{x}$. Ainsi $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x}=+\infty$. D'où :

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}f'(x)&=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}e^{-1/x}\left(1+\frac{1}{x}\right)\\&=\lim_{X\to+\infty}e^{-X}(1+X)\\&=\lim_{X\to+\infty}\frac{1+X}{e^X}\\&=0\end{aligned}$$

par croissance comparée

Conclusion : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f'(x)=0$.

Interprétation
Graphiquement, la courbe de f admet en quelque sorte une demi-tangente horizontale en 0, à droite (en quelque sorte, car f n'est pas définie en 0... mais elle est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=0$...).

6. **6.a.** Établir : $\forall x\in\mathbb{R}^*$, $f'(x)<1$.

On a : $f':x\longmapsto e^{-1/x}\left(1+\frac{1}{x}\right)$; ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x\in\mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned}f''(x)&=\frac{1}{x^2}e^{-1/x}\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x^2}e^{-1/x}\\&=e^{-1/x}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}\right)\\&=\frac{e^{-1/x}}{x^3}\end{aligned}$$

On en déduit :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de $f''(x)$	$-$	||	$+$
variations de f'	$1 \searrow \dots$	||	$0 \nearrow 1$

Détaillons les limites apparentes dans ce tableau de variations :

- En $-\infty$:
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-1}{x} = 0, \text{ donc par composition : } \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-1/x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 1+\dfrac{1}{x} = 1 \end{array}\right\} \text{ ainsi, par opérations : } \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$$
- En $-\infty$:
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{x} = 0, \text{ donc par composition : } \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-1/x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{1}{x} = 1 \end{array}\right\} \text{ ainsi, par opérations : } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

Ce tableau de variations permet bien d'obtenir le résultat voulu.

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) < 1$.

Petite remarque — La limite en 0 à gauche n'est pas utile pour conclure... Tout comme celle en 0 à droite, mais on l'avait déjà obtenue à la question 5.

6.b. En déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite d'équation $y = x - 1$.

Pour cela, posons $g : x \longmapsto f(x) - (x-1)$ et étudions son signe.
Puisque f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, g l'est également et :
$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g'(x) = f'(x) - 1$$
D'après la question précédente, on obtient :
$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g'(x) < 0$$
Et comme la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ aux voisinages de $\pm\infty$, on a :
$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$$
D'où :

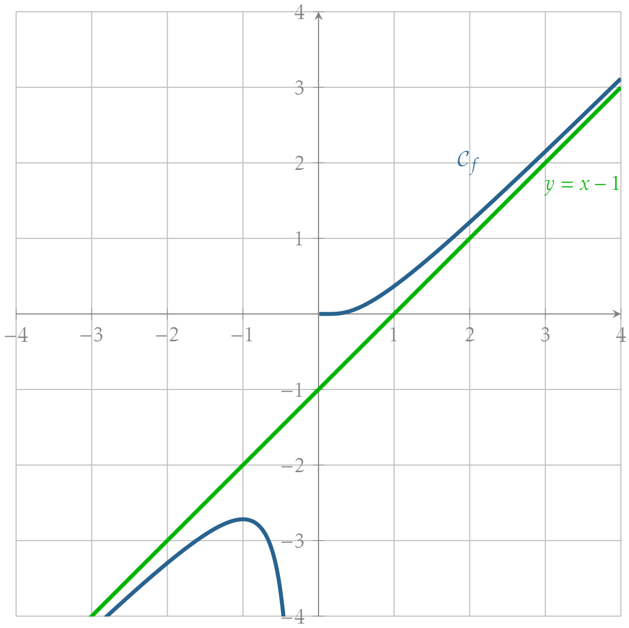
x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de $g'(x)$	$-$	||	$-$
variations de g	$0 \searrow \dots$	||	$\dots \searrow 0$

Petite remarque — Là encore, les limites de g en 0 à gauche et droite ne sont pas nécessaires ; mais puisqu'on a celles de f, on aurait facilement : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} g(x) = 1$.

Par conséquent :
$$\forall x \in]-\infty;0[,\ g(x) < 0 \quad ; \quad \forall x \in]0;+\infty[,\ g(x) > 0$$

Conclusion : $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la droite d'équation $y = x - 1$ sur $]0;+\infty[$;
$\mathcal{C}_f$ est au-dessous de la droite d'équation $y = x - 1$ sur $]-\infty;0[$;
$\mathcal{C}_f$ et la droite d'équation $y = x - 1$ n'ont aucun point d'intersection.

7. Représenter l'allure de $\mathcal{C}_f$ dans un repère du plan judicieusement choisi. *On veillera à faire figurer toutes les informations établies précédemment permettant d'obtenir la courbe la plus précise possible.*



Petite remarque — Sont visibles :
- Tangente horizontale en $x = -1$.
- "demi-tangente horizontale" en $x = 0$, à droite.
- Asymptote en $x = 0$, à gauche.
- Asymptote en $\pm\infty$.

Partie B. Étude d'une suite.

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

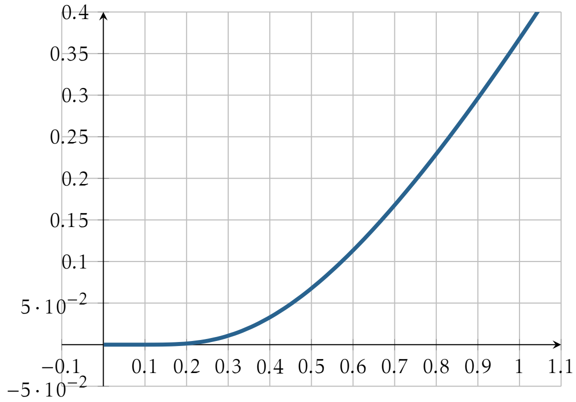
1. Écrire une fonction Python, nommée u, qui prend en argument d'entrée un entier naturel n et renvoie la valeur de u_n en sortie.

```python
import numpy as np

def u(n):
    U=1
    for k in range(1,n+1):
        U=U*np.exp(-1/U)
    return U
```

☞ Pour info...
u(3) renvoie environ 3×10^{-20}...

2. Représenter les premiers termes de (u_n) sur le graphique ci-dessous, sur lequel la courbe de la fonction f est représentée. Que peut-on conjecturer sur le comportement de la suite (u_n) ?



On conjecture que la suite (u_n) est décroissante, de limite nulle.

✘ Attention !
Les unités...

3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \in]0;1]$.
Par récurrence...
   - **Initialisation.** Pour $n = 0$:
     u_0 existe et $u_0 = 1 \in]0;1]$. L'initialisation est ainsi vérifiée.
   - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons "u_n existe et $u_n \in]0;1]$" et montrons "u_{n+1} existe et $u_{n+1} \in]0;1]$".
     - Par hypothèse de récurrence, u_n existe et $u_n > 0$; donc $f(u_n)$ existe puisque f est définie sur $\mathbb{R}^*$. Autrement dit : u_{n+1} existe.
     - Également : $u_{n+1} = u_n e^{-1/u_n}$; et comme, par hypothèse de récurrence, $u_n > 0$, on a aussi $u_{n+1} > 0$.
     - Enfin, par hypothèse de récurrence :
     $$0 < u_n \leq 1$$
     Puis, par croissance de f est $\mathbb{R}_*^+$, on a :
     $$f(u_n) \leq f(1)$$
     C'est à dire :
     $$u_{n+1} \leq e^{-1}$$
     Puisque $e^{-1} \leq 1$, on obtient (par transitivité) :
     $$u_{n+1} \leq 1$$

     Finalement : "u_{n+1} existe et $u_{n+1} \in]0;1]$". L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \in]0;1]$.

✘ Attention !
$f(0)$ n'existe pas !
On écrit $0 < u_n \leq 1$ pour rappeler que l'on utilise les variations de f sur $\mathbb{R}_*^+$ (et même $]0;1]$) seulement.

4. Étudier les variations de (u_n).
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :
$$u_{n+1} - u_n = u_n \left(e^{-1/u_n} - 1\right)$$
Or, d'après la question précédente $u_n > 0$. On a ainsi :
$$-\frac{1}{u_n} < 0$$
Et par stricte croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$:
$$e^{-1/u_n} < 1$$
Par conséquent :
$$u_{n+1} - u_n < 0$$

Conclusion : la suite (u_n) est strictement décroissante.

5. **5.a.** Établir : $\forall x \in]0;1]$, $f(x) \leq \frac{1}{e} x$.
Pour changer un peu, raisonnons pas équivalence pour transformer le résultat à établir...
Soit $x \in]0;1]$. On a :
$$\begin{aligned} f(x) \leq \frac{1}{e}x \quad & \iff \quad xe^{-1/x} \leq \frac{1}{e}x \\ & \iff \quad e^{-1/x} \leq \frac{1}{e} \quad \text{car x>0} \\ & \iff \quad e^{-1/x} \leq e^{-1} \\ & \iff \quad -\frac{1}{x} \leq -1 \quad \text{par stricte croissance de ln sur } \mathbb{R}_*^+ \\ & \iff \quad \frac{1}{x} \geq 1 \end{aligned}$$

sur $f(x) - \frac{1}{e}x$; mais il est important de rédiger de cette façon parfois, afin que vous compreniez bien quand et comment le faire.

Or $x \in]0;1]$, donc la dernière inégalité est vraie (décroissance de la fonction inverse sur $]0;1]$) ; par équivalence,l'inégalité initiale est ainsi également vraie.

Conclusion : $\forall x \in]0;1],\ f(x) \leq \frac{1}{e}x$.

5.b. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n$.

Par récurrence...

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
  $u_0 = 1$ et $\left(\frac{1}{e}\right)^0 = 1$; par conséquent, $u_0 \leq \left(\frac{1}{e}\right)^0$. L'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n$ et montrons que $u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}$.
  Par hypothèse de récurrence, on a :
  $$u_n \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n$$
  D'où, puisque $\frac{1}{e} > 0$:
  $$\frac{1}{e}u_n \leq \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}$$
  Mais $u_n \in]0;1]$ d'après la question 3, donc, d'après la question précédente :
  $$f(u_n) \leq \frac{1}{e}u_n$$
  Par transitivité, on a ainsi :
  $$f(u_n) \leq \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}$$
  Autrement dit :
  $$u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}$$
  L'hérédité est établie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n$.

5.c. Conclure sur l'existence et la valeur de la limite de la suite (u_n).

On a :

$$\left.\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n = 0,\ \text{car } \frac{1}{e} \in]-1;1[\end{array}\right\} \text{ ainsi, par théorème d'encadrement : } \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

Conclusion : la suite (u_n) converge vers 0.

5.d. Résoudre l'inéquation $\left(\frac{1}{e}\right)^n \leq 10^{-20}$, d'inconnue $n \in \mathbb{N}$, puis interpréter le résultat obtenu. *Donnée :* $20\ln(10) \simeq 46,05$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :
  $$\begin{aligned} \left(\frac{1}{e}\right)^n \leq 10^{-20} &\iff n\ln\left(\frac{1}{e}\right) \leq -20\ln(10) \quad \text{par stricte croissance de ln sur } \mathbb{R}_*^+ \\ &\iff -n \leq -20\ln(10) \\ &\iff n \geq 20\ln(10) \end{aligned}$$

  Conclusion : $\left(\frac{1}{e}\right)^n \leq 10^{-20}$ lorsque $n \geq 20\ln(10)$.

  PETITE REMARQUE
  On peut aussi dire "lorsque $n \geq \lfloor 20\ln(10) \rfloor + 1$".

- Interprétation :
  On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n$. Ainsi, d'après ce qui précède (et par transitivité) :
  $$\forall n \geq 20\ln(10),\ u_n \leq 10^{-20}$$

  Conclusion : on peut affirmer que pour tout $n \geq 45$, $u_n \leq 10^{-20}$.

5.e. Le programme suivant (dans lequel `u` est la fonction `Python` définie à la question 1 de la partie B) affiche la valeur 4. Interpréter cette valeur et la comparer avec celle obtenue à la question précédente.

```
n=0
while u(n)>10**(-20):
    n=n+1
print(n)
```

On peut déjà dire que le programme s'arrêtera forcément, puisque (u_n) converge vers 0. Il existe donc un rang à partir duquel u_n est toujours inférieur ou égal à 10^{-20}.

Ici, 4 est d'ailleurs le premier rang à partir duquel c'est vrai.

Comparaison avec la valeur précédente : il est naturel de trouver une valeur inférieure à la question précédente ; puisque dans la question précédente, nous avions utilisé une majoration de u_n (établie à la question 5(b)) pour obtenir cette information.

☞ POUR INFO...
On peut cependant s'interroger sur l'écart important entre le résultat obtenu par majoration et le résultat réel... En fait, la suite (u_n) converge très vite vers 0. En effet, au 4ème terme, l'écart avec 0 est déjà inférieur à 10^{-20}. Cela est dû au fait que $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f'(x) = 0$. On dit que le point fixe 0 est ici **super attractif**.

6. Considérons la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

6.a. Étudier les variations de (S_n).

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+1}$$

Or $u_{n+1} > 0$...

Conclusion : la suite (S_n) est croissante.

Petite remarque Ou alors on se contente de dire : "pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est une somme de termes positifs"...

6.b. A l'aide du résultat établi à la question 5(b) de la partie B, démontrer que la suite (S_n) est majorée.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On avait obtenu, à la question 5(b) :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ u_k \leq (e^{-1})^n$$

D'où, en sommant sur $[\![0;n]\!]$:

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} (e^{-1})^n$$

Or :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} (e^{-1})^n &= \frac{1-e^{-n-1}}{1-e^{-1}} \\ &= \frac{e-e^{-n}}{e-1} \\ &= \frac{e}{e-1} - \frac{e^{-n}}{e-1}\end{aligned}$$

☞ Rappel... $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall q \neq 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

✘ Attention ! la quantité $\frac{e-e^{-n}}{e-1}$ ne peut pas être un majorant de (S_n), puisqu'elle dépend de n...

Or $\frac{e^{-n}}{e-1} > 0$, d'où :

$$\sum_{k=0}^{n} (e^{-1})^n \leq \frac{e}{e-1}$$

Conclusion : la suite (S_n) est majorée (par $\frac{e}{e-1}$).

6.c. Que peut-on en déduire ?

Étant croissante et majorée, le théorème de convergence monotone permet d'obtenir que la suite (S_n) est convergente.

✘ Attention ! $\frac{e}{e-1}$ est un majorant de (S_n), mais n'est pas sa limite ! Il est d'ailleurs très probable qu'il nous soit impossible de déterminer explicitement sa limite...

Ce qu'il faut retenir des copies :

- RAPPEL IMPORTANT : "f est paire" signifie "$\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(-x) = f(x)$". Ainsi, "$f$ n'est pas paire" signifie "$\exists x \in \mathcal{D}_f\ /\ f(-x) \neq f(x)$". De l'importance du chapitre 1 pour faire proprement la question A, qu'il est honteux de ne pas savoir faire...
- Sur les limites :
  - Dans des cas simples, inutiles de poser X =... Quand on peut conclure par opérations, c'est souvent superflu de faire ce changement de variable.
  - En revanche, il est utile dans le cas de FI, qu'on souhaite transformer en une FI connue (croissance comparée ou $\lim_{X\to 0} \frac{e^X - 1}{X}$ par exemple). Dans ce cas, il faut bien rédiger (voir le corrigé) et mentionner clairement vers quoi X tend (comme la variable a changé, la valeur en laquelle la limite est calculée a certainement aussi changé...).
- Quelques questions plus compliquées (A5,A6(a),A6(b)) ; qu'il faut tout de même tenter... en faisant les choses proprement et en réfléchissant à ce qu'il faut démontrer, on peut s'en sortir convenablement.
- Il faut représenter la courbe de f, même si toute l'étude n'a pas été faite... Le tableau de variations permet déjà d'en avoir une allure !
- Question B3 : sur trop de copies, j'ai pu voir "$f(0)$ =...". J'ai proposé une façon de faire possible ; certains ont fait autrement en disant que f est croissante et strictement positive sur $]0;1]$, donc $0 < f(u_n) \leq f(1)$" ou même en reconstruisant la fonction à partir de l'encadrement $0 < u_n \leq 1$ (on évitera par contre des abominations du genre "Puisque la fonction inverse est décroissante, on a $0 > \frac{1}{u_n} \geq 1$"... quelle horreur, j'en ai des frissons rien que de l'écrire...).
- Viennent ensuite un certain nombre de questions qui n'ont pas été souvent traitées, alors qu'elles sont classiques et relativement simples ! B4, B5(a), B5(b), B5(c), B5(d), B5(e), B6(a), B6(c)... Au boulot !!