Devoir surveillé 4

Samedi 8 janvier - 4h00

NOM .... Prénom ....

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation. Quelques précisions :

- ***la copie devra présenter une marge ainsi qu'une en-tête suffisantes,***
- ***toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,***
- ***les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),***
- ***les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.***

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.

"Faire aisément ce que d'autres trouvent difficile à réaliser, c'est le talent ;
faire ce qui est impossible au talent, c'est le génie."
Henri-Frédéric Amiel

Exercice 1

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soient A, B et C trois évènements d'une expérience aléatoire et $\mathbb{P}$ une probabilité.
   (a) Démontrer que si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
   Voir cours.
   (b) Énoncer et démontrer la formule des probabilités totales.
   Voir cours.

2. Considérons f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$.
   Démontrer que f est bijective de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ dans un ensemble à déterminer, et expliciter l'expression de sa bijection réciproque.
   Soit $y \in \mathbb{R}$. Résolvons l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
   Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. On a :

$$\begin{array}{rcl} y = f(x) & \iff & y = \dfrac{x}{x+1} \\ & \iff & (x+1)y = x \quad \text{car } x+1 \neq 0 \\ & \iff & x(y-1) = -y \end{array}$$

   Distinguons ensuite deux cas :
   - Si $y \neq 1$, alors on obtient : $y = f(x) \iff x = \dfrac{y}{1-y}$. Par conséquent, y admet un unique antécédent par f, il s'agit de $\dfrac{y}{1-y}$.
   - Si $y = 1$, alors on obtient $0 = -y$, absurde car $y = 1$. Par conséquent, 1 n'a pas d'antécédent par f.

   Conclusion : f est bijective de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $f^{-1} : y \longmapsto \dfrac{y}{1-y}$.

3. On estime qu'une certaine maladie affecte 1 personne sur 10. On considère un test diagnostic ayant obtenu les résultats suivants :
   - si une personne est malade, le test est positif dans 80% des cas ;
   - si une personne n'est pas malade, le test est positif dans 10% des cas.

   On choisit une personne au hasard dans une certaine population et on considère les évènements :
   - M : "la personne est malade"
   - T : "le test effectué est positif"

   Quelle est la probabilité que la personne choisie soit malade sachant que son test s'est révélé positif ?
   On cherche $\mathbb{P}_T(M)$.
   On a :

$$\mathbb{P}_T(M) = \frac{\mathbb{P}(T \cap M)}{\mathbb{P}(T)}$$

   Or :
   - $\mathbb{P}(T \cap M) = \mathbb{P}(M) \times \mathbb{P}_M(T) = \dfrac{8}{100}$
   - D'après la formule des probabilités totales, avec $(M, \overline{M})$ comme système complet d'évènements :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(T) & = & \mathbb{P}(M \cap T) + \mathbb{P}(\overline{M} \cap T) \\ & = & \mathbb{P}(M) \times \mathbb{P}_M(T) + \mathbb{P}(\overline{M}) \times \mathbb{P}_{\overline{M}}(T) \\ & = & \dfrac{8}{100} + \dfrac{9}{100} \\ & = & \dfrac{17}{100} \end{array}$$

   Conclusion : $\mathbb{P}_T(M) = \dfrac{8}{17}$.

4. **Vrai ou faux ?** Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse. *La réponse doit être justifiée.*
   (a) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = 0_n$. Si A est inversible, alors $B = 0_n$.
   VRAI.
   En effet, si A est inversible, alors en multipliant l'égalité $AB = 0_n$ par A^{-1} (à gauche), on obtient : $B = 0_n$.
   (b) La suite (u_n) converge vers 2 si, et seulement si, la suite $(|u_n|)$ converge vers 2.
   FAUX.
   Considérons la suite (u_n) définie par $u_n = 2(-1)^n$. On a ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| = 2$. Par conséquent, la suite $(|u_n|)$ converge vers 2... et pourtant, la suite (u_n) diverge sans avoir de limite.

   Pourquoi ? On pourrait justifier que (u_n) est divergente en disant que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers des limites différentes.

   (c) La somme de deux fonctions bijectives sur $\mathbb{R}$ est une fonction bijective sur $\mathbb{R}$.
   FAUX.
   Considérons les fonctions $f : x \longmapsto x$ et $g : x \longmapsto -x$. Ces deux fonctions sont clairement bijectives de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (car $f \circ f = id$ et $g \circ g = id$...), et pourtant leur somme est une fonction constante, donc non bijective.

★★★★★★★

Exercice 2

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}_*^+$ par $f(x) = 1 + \dfrac{2}{x}$ et la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}_*^+$ puis représenter l'allure de sa courbe représentative ainsi que les premiers termes de (u_n).
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \in [1;3]$.
   Par récurrence...
   - **Initialisation.** Pour $n = 0$:
     u_0 existe et $u_0 = 1 \in [1;3]$: initialisation vérifiée.
   - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que "u_n existe et $u_n \in [1;3]$" et montrons que "u_{n+1} existe et $u_{n+1} \in [1;3]$".
     - Par hypothèse de récurrence, u_n existe et $u_n \in [1;3]$. Comme f est définie sur $\mathbb{R}_*^+$, $f(u_n)$ existe donc. Par conséquent, u_{n+1} existe.
     - De plus, par hypothèse de récurrence :
       $$1 \leq u_n \leq 3$$
       D'où, par décroissance de f sur $[1;3]$:
       $$f(1) \geq f(u_n) \geq f(3)$$
       C'est à dire :
       $$3 \geq u_{n+1} \geq \frac{5}{3}$$
       Et comme $1 \leq \frac{5}{3}$, on obtient :
       $$1 \leq u_{n+1} \leq 3$$
       L'hérédité est ainsi établie.

   Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \in [1;3]$.

3. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est croissante et que la suite (w_n) est décroissante.
   Par récurrence... $u_0 = 1$, $u_1 = 3$, $u_2 = \frac{5}{3}$ et $u_3 = \frac{11}{5}$ et la fonction $f \circ f$ est croissante...

   (b) Justifier alors que les suites (v_n) et (w_n) sont convergentes.
   La suite (v_n) est croissante et majorée (par 3, comme la suite (u_n)) ; et la suite (w_n) est décroissante et minorée (par 1, comme la suite (u_n)).

   Conclusion : d'après le théorème de convergence monotone, les suites (v_n) et (w_n) sont convergentes.

   (c) Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, $g(x) = (f \circ f)(x)$. Déterminer une expression simplifiée de $g(x)$ puis résoudre l'équation $g(x) = x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_*^+$.
   - Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$. On a :
   $$\begin{aligned} g(x) &= (f \circ f)(x) \\ &= 1 + \frac{2}{f(x)} \\ &= 1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{x}} \\ &= 1 + \frac{2x}{x+2} \\ &= \frac{3x+2}{x+2} \end{aligned}$$

   Conclusion : pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, $g(x) = \dfrac{3x+2}{x+2}$.

   - Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$. On a ainsi :
   $$\begin{aligned} g(x) = x &\iff \frac{3x+2}{x+2} = x && x \neq -2 \\ &\iff 3x+2 = x^2 + 2x \\ &\iff x^2 - x - 2 = 0 \\ &\iff \begin{cases} x = 2 \\ \text{ou} \\ x = -1 \end{cases} && x \in \mathbb{R}_*^+ \\ &\iff x = 2 \end{aligned}$$

   Conclusion : la seule solution strictement positive à l'équation $g(x) = x$ est 2.

   (d) Conclure sur les limites de (v_n) et (w_n).
   - Pour (u_n) :
     - On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = f(f(v_n))$...
     - Et d'après la question précédente, (v_n) converge vers une limite $\ell \in [1;3]$...

     Donc par opération sur les limites et unicité de la limite, on obtient :
     $$\ell = \left(f \circ f\right)(\ell)$$
     Or, d'après la question précédente, 2 est la seule solution strictement positif de l'équation $(f \circ f)(x) = x$.
     Puisque l'on sait que $\ell \in [1;3]$, on obtient ainsi : $\ell = 2$.
     Par conséquent : la suite (u_n) converge vers 2.
   - Pour (v_n) :
     De même, on trouve que la suite (v_n) converge vers 2.

✓ **Rigueur !**
On pense bien aux arguments permettant de remonter l'équivalence...

Conclusion : les suites (u_n) et (v_n) convergent toutes deux vers 2.

4. Que peut-on en conclure sur la suite (u_n) ?
   D'après la question précédente, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers 2.
   Conclusion : par propriété de recouvrement, la suite (u_n) converge également vers 2.

★★★★★★★

Exercice 3

Soit (h_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Écrire deux fonctions Python prenant en argument d'entrée un entier naturel non nul n et renvoyant la valeur de h_n en sortie. L'une de ces deux fonctions devra utiliser l'écriture en compréhension d'une liste, l'autre non.

```python
#Avec liste en compréhension
def h(n):
    L=[1/k for k in range(1,n+1)]
    return sum(L)

#Sans liste en compréhension
def hbis(n):
    S=0
    for k in range(1,n+1):
        S=S+1/k        #ou S+=1/k
    return S
```

2. **Étude de la suite (h_n).**

   (a) Déterminer le sens de variation de la suite (h_n).
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :
   $$h_{n+1} - h_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} > 0$$
   Par conséquent : $h_{n+1} > h_n$.
   Conclusion : la suite (h_n) est strictement croissante.

   (b) Démontrer que pour tout $x \in]-1;+\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$.
   Posons $f : x \longmapsto \ln(1+x) - x$. f est définie et dérivable sur $]-1;+\infty[$ et pour tout $x > -1$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = \dfrac{-x}{1+x}$.
   D'où :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
f	||	$\nearrow$	0	$\searrow$	

   On en déduit que f possède un maximum sur $]-1;+\infty[$ égal à 0, atteint en 0.
   Conclusion : $\forall x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.

   (c) Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right) \leq \dfrac{1}{k}$. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $h_n \geq \ln(n+1)$. Déterminer alors la limite de la suite (h_n).

   - Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Puisque $\dfrac{1}{k} \geq 0$, on peut utiliser le résultat établir ci-dessus et obtenir ainsi : $\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right) \leq \dfrac{1}{k}$.
     Conclusion : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right) \leq \dfrac{1}{k}$.
   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
     On sait que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ (donc pour tout $k \in [\![1;n]\!]$) :
     $$\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$$
     En sommant cette inégalité pour k allant de 1 à n, on obtient :
     $$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$
     Autrement dit :
     $$h_n \geq \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$$
     De plus, on a :
     $$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \Big(\ln(k+1) - \ln(k)\Big) \underset{\text{télescopage}}{=} \ln(n+1)$$
     Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $h_n \geq \ln(n+1)$.

À retenir... On somme une inégalité pour en avoir une autre, sur la somme.

- On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $h_n \geq \ln(n+1)$; de plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$.

Conclusion : par théorème de comparaison, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n = +\infty$.

3. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = h_n - \ln(n) \quad \text{et} \quad v_n = u_n - \frac{1}{n}$$

(a) Démontrer que (v_n) est croissante.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - \frac{1}{n+1} - \left(u_n - \frac{1}{n}\right) \\ &= h_{n+1} - \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) - \left(h_n - \frac{1}{n} - \ln(n)\right) \\ &= \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

D'après le premier résultat de la question 2(c), on en déduit que $v_{n+1} - v_n \geq 0$.

Conclusion : la suite (v_n) est croissante.

(b) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= h_{n+1} - \ln(n+1) - (h_n - \ln(n)) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

D'après le résultat de la question 2(b), avec $x = \dfrac{-1}{n+1} > -1$, on a :

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leq \frac{-1}{n+1}$$

Autrement dit :

$$\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \leq \frac{-1}{n+1}$$

Puis :

$$-\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \geq \frac{1}{n+1}$$

C'est à dire :

$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \geq \frac{1}{n+1}$$

Par conséquent : $\dfrac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \leq 0$ et ainsi :

$$u_{n+1} - u_n \leq 0$$

Conclusion : la suite (u_n) est décroissante.

Petite remarque
La difficulté de la question réside dans le fait de penser à poser $x = \dfrac{-1}{n+1}$ (on pourrait sinon étudier $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x+1} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$) ; mais c'est l'inégalité de la question 2(b) qui nous incite à cela...

(c) En déduire que les deux suites (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite, notée ℓ.
Vérifions pour cela que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
On a :

- (v_n) est croissante
- (u_n) est décroissante
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{n} = 0$

Par conséquent, les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Conclusion : les deux suites (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite, notée ℓ.

(d) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq \ell \leq u_n$.

- Puisque (v_n) est croissante et qu'elle converge vers ℓ, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \leq \ell$.
- De même, puisque (u_n) est décroissante et qu'elle converge vers ℓ, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \geq \ell$.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq \ell \leq u_n$.

(e) Écrire une fonction `Python` prenant en argument d'entrée un réel strictement positif p et renvoyant en sortie un encadrement de ℓ d'amplitude inférieure ou égale à p (cette fonction pourra utiliser une des deux fonctions de la question 1, notée `h`).

```python
import numpy as np

def encadrement(p):
    n=1
    u=h(n)-np.log(n)
    v=u-1/n
    while u-v>p:
        n=n+1
        u=h(n)-np.log(n)
        v=u-1/n
    return v,u
```

☞ Pour info...
Cette limite est souvent notée γ et est la constante d'Euler-Mascheroni.
On a ainsi, pour n suffisamment grand : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \simeq \ln(n) + \gamma$.

★★★★★★★

Exercice 4

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On lance n fois une pièce donnant PILE avec la probabilité $p \in]0;1[$ et donnant FACE avec la probabilité $q = 1-p$. On suppose les lancers indépendants et on note :

- pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, P_k l'évènement : "obtenir PILE au $k^{\text{ème}}$ lancer" et $F_k = \overline{P_k}$;
- X_n la variable aléatoire égale au nombre de FACE obtenues avant l'apparition du premier PILE. On convient que X_n prend la valeur n si aucun PILE n'est obtenu au cours des n lancers.

1. Préciser $X_n(\Omega)$.
   $X_n(\Omega) = [\![0;n]\!]$.
2. Calculer $\mathbb{P}([X_n = 0])$ ainsi que $\mathbb{P}([X_n = n])$.
   - $[X_n = 0] = P_1$, donc $\mathbb{P}([X_n = 0]) = \mathbb{P}(P_1) = p$.
   - $[X_n = n] = F_1 \cap F_2 \cap ... \cap F_n = \bigcap_{k=1}^{n} F_k$. D'où, par indépendance des lancers :

$$\mathbb{P}([X_n = n]) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} F_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(F_k) = q^n$$

Conclusion : $\mathbb{P}([X_n = 0]) = p$ et $\mathbb{P}([X_n = n]) = q^n$.

➠ Réflexe ! On travaille sur les évènements avant de calculer les probabilités !

Petite remarque L'écriture avec $\bigcap$ et $\prod$ n'est pas indispensable (même si elle ne devrait pas trop poser souci) ; on peut se contenter de l'écriture avec les pointillés.

3. Déterminer, pour tout $k \in [\![1;n-1]\!]$, une expression simple de $\mathbb{P}([X_n = k])$.
   Soit $k \in [\![1;n-1]\!]$. On a :

$$[X_n = k] = F_1 \cap F_2 \cap ... \cap F_k \cap P_{k+1} = \left(\bigcap_{i=1}^{k} F_i\right) \cap P_{k+1}$$

D'où, par indépendance des lancers :

$$\mathbb{P}([X_n = k]) = q^k p$$

Conclusion : pour tout $k \in [\![1;n-1]\!]$, $\mathbb{P}([X_n = k]) = q^k p$.

4. Vérifier que $\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n = k]) = 1$.

✘ Attention ! Il n'y a pas qu'une seule expression de $\mathbb{P}([X_n = k])$ pour tous les k de $[\![0;n]\!]$ (même si les cas $\mathbb{P}([X_n = 0])$ peut être inclus dans le cas de la question 3.

On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n = k]) &= \mathbb{P}([X_n = 0]) + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([X_n = k]) + \mathbb{P}([X_n = n]) \\
&= p + \sum_{k=1}^{n-1} q^k p + q^n && q^0 = 1 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} q^k p + q^n \\
&= p \sum_{k=0}^{n-1} q^k + q^n \\
&= p\frac{1-q^n}{1-q} + q^n && p = 1-q \\
&= 1 - q^n + q^n \\
&= 1
\end{aligned}$$

Conclusion : $\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n = k]) = 1$.

5. Considérons la fonction f définie sur $]0;1[$ par $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k$.
   (a) Soit $x \in]0;1[$. En exprimant de deux façons différentes $f'(x)$, établir :

$$\sum_{k=1}^{n-1} kx^k = \frac{x - nx^n + (n-1)x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

- f étant une fonction polynôme, elle est dérivable sur $]0;1[$. Et comme $f(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} x^k$, on obtient, par linéarité de la dérivation :

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n-1} kx^{k-1}$$

- Mais on sait aussi, puisque $x \in]0;1[$, que $f(x) = \frac{1-x^n}{1-x}$. D'où, en dérivant sous cette forme :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{-nx^{n-1}(1-x) - (1-x^n)(-1)}{(1-x)^2} \\
&= \frac{-nx^{n-1} + nx^n + 1 - x^n}{(1-x)^2} \\
&= \frac{1 - nx^{n-1} + (n-1)x^n}{(1-x)^2}
\end{aligned}$$

En égalant ces deux expressions, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n-1} kx^{k-1} = \frac{1-nx^{n-1}+(n-1)x^n}{(1-x)^2}$$

Puis, on obtient le résultat voulu en multipliant par x.

Conclusion : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kx^k = \frac{x-nx^n+(n-1)x^{n+1}}{(1-x)^2}$.

(b) En déduire l'espérance de X_n.

On a :

$$\begin{aligned}
E(X_n) &= \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}([X_n=k]) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}([X_n=k]) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} kq^k p + nq^n \\
&= p\sum_{k=1}^{n-1} kq^k + nq^n && \text{question précédente, } q\in]0;1[\\
&= p\frac{q-nq^n+(n-1)q^{n+1}}{(1-q)^2} + nq^n && p=1-q \\
&= \frac{q-nq^n+(n-1)q^{n+1}}{1-q} + nq^n \\
&= \frac{q+(n-2)q^{n+1}}{1-q}
\end{aligned}$$

Conclusion : $E(X_n) = \dfrac{q+(n-2)q^{n+1}}{1-q}$.

(c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n)$.

Puisque $q\in]0;1[$, par croissance comparée, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}(n-2)q^{n+1}=0$.

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n) = \dfrac{q}{1-q} = \dfrac{q}{p} = \dfrac{1}{p}-1$.

★★★★★★★

Exercice 5

Un objet se déplace sur les sommets d'un triangle, nommés A, B, C, selon le schéma suivant :

- si l'objet est en A, il y reste avec une probabilité $\frac{3}{8}$, ou il se dirige vers B avec une probabilité $\frac{3}{8}$, sinon il se dirige vers C avec une probabilité $\frac{1}{4}$.
- si l'objet est en B, il y reste avec une probabilité $\frac{1}{4}$, ou il se dirige vers A avec une probabilité $\frac{1}{2}$, sinon il se dirige vers C avec une probabilité $\frac{1}{4}$.
- si l'objet est en C, il y reste.

Initialement, l'objet se situe au sommet A.
On note, pour $n\in\mathbb{N}$, A_n l'évènement "l'objet est en A à l'étape n" et $a_n=\mathbb{P}(A_n)$. Ainsi, $a_0=1$. On définit de la même façon les notations B_n, C_n et b_n, c_n.

Partie A.

1. Donner a_1 puis calculer a_2.
   - $a_1 = \frac{3}{8}$
   - D'après la formule des probabilités totales, avec (A_1, B_1, C_1) comme sce : :

$$\begin{aligned}
a_2 &= \mathbb{P}(A_2) \\
&= \mathbb{P}(A_2\cap A_1)+\mathbb{P}(A_2\cap B_1)+\mathbb{P}(A_2\cap C_1) \\
&= \mathbb{P}(A_1)\times\mathbb{P}_{A_1}(A_2)+\mathbb{P}(B_1)\times\mathbb{P}_{B_1}(A_2)+\mathbb{P}(C_1)\times\mathbb{P}_{C_1}(A_2) \\
&= \frac{3}{8}\times\frac{3}{8}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times 0 \\
&= \frac{21}{64}
\end{aligned}$$

Petite remarque : Ne pas hésiter à faire un arbre ; et si c'est le cas, à le faire sur la copie !

Conclusion : $a_1=\frac{3}{8}$ et $a_2=\frac{21}{64}$.

2. Si à l'étape 2, l'objet était en B, quelle est alors la probabilité qu'il ait été en A à l'étape 1 ?
Cela revient à calculer $\mathbb{P}_{B_2}(A_1)$. Et on a :

$$\mathbb{P}_{B_2}(A_1) = \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap B_2)}{\mathbb{P}(B_2)} = \dots = \frac{\frac{9}{64}}{\frac{9}{64} + \frac{3}{32}} = \frac{9}{64} \times \frac{64}{15} = \frac{3}{5}$$

Pourquoi ?
On utilise la FPT pour calculer $\mathbb{P}(B_2)$...

3. En utilisant la formule des probabilités totales, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{3}{8}a_n + \frac{1}{2}b_n \\ b_{n+1} = \frac{3}{8}a_n + \frac{1}{4}b_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + c_n \end{cases}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.
- D'après la formule des probabilités totales, avec (A_n, B_n, C_n) comme système complet d'évènements :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \mathbb{P}(A_{n+1}) \\ &= \mathbb{P}(A_{n+1} \cap A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1} \cap B_n) + \mathbb{P}(A_{n+1} \cap C_n) \\ &= \mathbb{P}(A_n) \times \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(B_n) \times \mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) + 0 \qquad A_{n+1} \cap C_n = \varnothing \\ &= \frac{3}{8}a_n + \frac{1}{2}b_n \end{aligned}$$

D'où :

$$a_{n+1} = \frac{3}{8}a_n + \frac{1}{2}b_n$$

- De même, on obtient :

$$b_{n+1} = \frac{3}{8}a_n + \frac{1}{4}b_n$$

✍ Rédaction
On ne rédige pas trois fois la même chose...

- Et également :

$$c_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + c_n$$

4. (a) Déduire de la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = \frac{3}{4}c_n + \frac{1}{4}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + c_n \\ &= \frac{1}{4}(a_n + b_n) + c_n \end{aligned}$$

Mais, puisque (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'évènements, on a : $a_n + b_n + c_n = 1$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= \frac{1}{4}(1 - c_n) + c_n \\ &= \frac{3}{4}c_n + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = \frac{3}{4}c_n + \frac{1}{4}$.

(b) Déterminer alors le terme général de (c_n).
(c_n) est donc une suite arithmético-géométrique... Méthode habituelle (point fixe, suite auxiliaire...).

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = -\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1$.

(c) En déduire la limite de la suite (c_n) et interpréter ce résultat.
Puisque $\frac{3}{4} \in]-1;1[$, on obtient : $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = 1$.
Interprétation : au bout d'un certain nombre d'étapes, l'objet arrivera sur le sommet C (et y restera donc).

5. (a) Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+2} = \frac{5}{8}b_{n+1} + \frac{3}{32}b_n$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} b_{n+2} &= \frac{3}{8}a_{n+1} + \frac{1}{4}b_{n+1} \qquad a_{n+1} = b_{n+1} + \frac{1}{4}b_n \\ &= \frac{3}{8}\left(b_{n+1} + \frac{1}{4}b_n\right) + \frac{1}{4}b_{n+1} \\ &= \frac{5}{8}b_{n+1} + \frac{3}{32}b_n \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+2} = \frac{5}{8}b_{n+1} + \frac{3}{32}b_n$.

(b) Déterminer alors le terme général de la suite (b_n).
(b_n) est ainsi une suite récurrente linéaire d'ordre 2... Méthode habituelle (en utilisant $b_0 = 0$ et $b_1 = \frac{3}{8}$).

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \frac{3}{7}\left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{3}{7}\left(\frac{-1}{8}\right)^n$.

6. Déduire des questions précédentes le terme général de (a_n).
Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'évènements, on a : $a_n + b_n + c_n = 1$ et donc $a_n = 1 - b_n - c_n$.
En utilisant les résultats des questions 5(b) et 6(b), on obtient le terme général de (a_n).

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{3}{7}\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{3}{7}\left(\frac{-1}{8}\right)^n = \frac{4}{7}\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{3}{7}\left(\frac{-1}{8}\right)^n$.

Important !
A ce stade du sujet, il est important de vérifier ce résultat (pour se rassurer !). On vérifie cette expression en prenant $n = 0$, $n = 1$ et même $n = 2$. Ca fonctionne : OUF !

7. On considère le programme incomplet suivant :

   (a) Compléter les lignes 13,14,15,16,17,19 du programme afin que la commande `simulation(n)` renvoie une liste contenant la simulation des sommets parcourus par l'objet lors des étapes 0 à n du jeu.

```
1  import numpy.random as rd
2
3  def simulation(n):
4      objet="A"
5      Lobjet=[objet]
6      for k in range(1,n+1):
7          p=rd.rand()        #réel aléatoire entre 0 et 1
8          if objet=="A":
9              if p<3/8:
10                 objet="B"
11             elif p>=3/8 and p<5/8:
12                 objet="C"
13         elif ..........
14             ..........
15                 ..........
16             ..........
17                 ..........
18         Lobjet.append(objet)
19     return (..........)
20
21 def mystere(L,x):
22     for k in range(0,len(L)):
23         if L[k]==x:
24             return k
```

```
L13      elif objet=="B":
L14        if p<1/2:
L15          objet="A"
L16        elif p>=1/2 and p<3/4:
L17          objet="C"
L19    return(Lobjet)
```

   (b) On exécute successivement les deux instructions suivantes : `L=simulation(15)` et `mystere(L,"C")`.
   Voici le résultat obtenu :

```
>>> L=simulation(15)
>>> mystere(L,"C")
4
```

   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
   Pour la simulation réalisée, le premier C est apparu au 4ème rang dans la liste L.
   Autrement dit, pour cette simulation, l'objet a atteint le sommet C lors de la 4ème étape.

Partie B.

Le contexte de cette partie est le même qu'au début de l'exercice; et les résultats de la partie A *pourront être utilisés.*

A chaque déplacement de l'objet, on définit des points de la façon suivante :

- chaque fois que l'objet arrive en A, 1 point est crédité
- chaque fois que l'objet arrive en B, 1 point est débité
- aucun point n'est attribué quand l'objet arrive en C

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de points accumulés jusqu'à l'étape n *(aucun point n'est attribué pour le point de départ en* A*)*.
Notons également Y_n et Z_n les variables aléatoires définies par :

$$Y_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A_n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad ; \quad Z_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in B_n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

> ☞ **Pour info...**
> Les variables Y_n et Z_n sont les variables **indicatrices** des évènements Y_n et Z_n.
> On rencontrera parfois la notation $\mathbb{1}_A$ pour désigner l'indicatrice d'un évènement A...
> On avait déjà rencontré la fonction indicatrice dans l'exercice 8 du chapitre 7...

1. **Variable aléatoire X_1.**

   (a) Donner $X_1(\Omega)$.
   Sans difficulté : $X_1(\Omega) = \{-1; 0; 1\}$.

> **Pourquoi ?**
> Il suffit de regarder les points possibles en 1 étape...

   (b) Déterminer la loi de X_1.
   On a :

$$\mathbb{P}([X = -1]) = b_1 = \frac{3}{8} \quad ; \quad \mathbb{P}([X = 0]) = c_1 = \frac{1}{4} \quad ; \quad \mathbb{P}([X = 1]) = a_1 = \frac{3}{8}$$

   (c) En déduire $E(X_1)$ et $V(X_1)$.
   On en déduit :

   •
$$\begin{aligned} E(X_1) &= -1 \times \mathbb{P}([X_1 = -1]) + 0 \times \mathbb{P}([X_1 = 0]) + 1 \times \mathbb{P}([X_1 = 1]) \\ &= 0 \end{aligned}$$

- D'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned} V(X_1) &= E(X_1^2) - E(X_1)^2 \\ &= E(X_1^2) \\ &= (-1)^2 \times \mathbb{P}([X_1 = -1]) + 0^2 \times \mathbb{P}([X_1 = 0]) + 1^2 \times \mathbb{P}([X_1 = 1]) \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

2. Donner $X_2(\Omega)$.
Sans difficulté : $X_2(\Omega) = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer X_{n+1} en fonction de X_n, Y_{n+1} et Z_{n+1}.
X_{n+1} étant le gain cumulé jusqu'à l'étape $n+1$, il s'obtient en ajoutant au gain cumulé jusqu'à l'étape n (c'est à dire X_n) soit 1 si l'évènement A_{n+1} est réalisé, soit -1 si l'évènement B_{n+1} est réalisé, soit 0 sinon.

Conclusion : $X_{n+1} = X_n + Y_{n+1} - Z_{n+1}$.

(b) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n(\Omega) = [\![-n; n]\!]$.

- **Initialisation.** Pour $n = 1$:
C'est le résultat de la question B1(a).
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $X_n(\Omega) = [\![-n; n]\!]$ et montrons que $X_{n+1}(\Omega) = [\![-n-1; n+1]\!]$.
Soit $\omega \in \Omega$. D'après la question précédente :

$$X_{n+1}(\omega) = X_n(\omega) + Y_{n+1}(\omega) - Z_{n+1}(\omega)$$

On sait que (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'évènements ; distinguons donc trois cas :
  - Si $\omega \in A_n$, alors $Y_{n+1}(\omega) = 1$ et $Z_{n+1}(\omega) = 0$.
  D'où :
  $$X_{n+1}(\omega) = X_n(\omega) + 1$$
  Et comme, par hypothèse de récurrence, $X_n(\Omega) = [\![-n; n]\!]$, on obtient :
  $$X_{n+1}(\omega) \in [\![-n+1; n+1]\!]$$
  De plus, puisque (par HDR) $X_n(\Omega) = [\![-n; n]\!]$ chaque valeur de $[\![-n; n]\!]$ peut être prise par X_n ; et ainsi, chaque valeur de $[\![-n+1; n+1]\!]$ peut être prise par $X_n n + 1$.
  - Si $\omega \in B_n$, on obtient de la même façon :
  $$X_{n+1}(\omega) \in [\![-n-1; n-1]\!]$$
  Et chaque valeur de $[\![-n-1; n-1]\!]$ peut être prise par $X_n n + 1$.
  - Si $\omega \in C_n$, alors $X_{n+1}(\omega) = X_n(\omega)$ et donc :
  $$X_{n+1}(\omega) \in [\![-n; n]\!]$$
  Et chaque valeur de $[\![-n; n]\!]$ peut être prise par $X_n n + 1$.

En regroupant ces trois cas, on obtient :

$$X_{n+1}(\Omega) = [\![-n-1; n+1]\!]$$

L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n(\Omega) = [\![-n; n]\!]$.

PETITE REMARQUE

C'est une question difficile, pas simple à rédiger...
Elle pourrait se rédiger plus simplement si l'opération + sur les ensembles était connue.
Par définition, si A et B sont deux ensembles :

$$A + B = \{a + b \;/\; (a, b) \in A \times B\}$$

Dans ce cas, on pourrait écrire que $X_{n+1}(\Omega) = X_n(\Omega) + Y_{n+1}(\Omega) + Z_{n+1}(\Omega) = [\![-n; n]\!] + \{0; 1\} - \{0; 1\}$...

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}([X_n = n])$.
L'évènement $[X = n]$ revient à gagner n points en n étapes. Comme on ne peut pas gagner plus d'un point par étape, cet évènement revient donc à avoir gagné 1 point à chaque étape.

Conclusion : $[X = n] = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} A_k$.

(d) Soit $n \in [\![3; +\infty[\![$. Donner deux évènements inclus dans l'évènement $[X_n = 0]$.
L'évènement $C_1 \cap C_2 \cap \ldots \cap C_n = C_1$ est toujours inclus dans $[X_n = 0]$.
De plus, si $n \geq 3$, l'évènement $A_1 \cap B_2 \cap C_3 \cap \ldots \cap C_n = A_1 \cap B_2 \cap C_3$ l'est également.

(e) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(X_{n+1}) = E(X_n) + a_{n+1} - b_{n+1}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question B3(a) et par linéarité de l'espérance, on obtient :

$$E(X_{n+1}) = E(X_n) + E(Y_{n+1}) - E(Z_{n+1})$$

Or :

$$\begin{aligned} E(Y_{n+1}) &= 1 \times \mathbb{P}(A_{n+1}) + 0 \times \mathbb{P}(\overline{A_{n+1}}) \\ &= a_{n+1} \end{aligned}$$

et :

$$E(Z_{n+1}) = b_{n+1}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(X_{n+1}) = E(X_n) + a_{n+1} - b_{n+1}$.

(f) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que $E(X_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k)$ puis déterminer une expression simplifiée de $E(X_n)$.

- A ce stade du sujet, on peut dire sans problème que la première partie de la question se démontre par récurrence immédiate.

Conclusion : $E(X_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k)$.

- On en déduit, d'après les questions A5(b) et A6 :

$$\begin{aligned} E(X_n) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{7}\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{6}{7}\left(\frac{-1}{8}\right)^n \\ &= \ldots \\ &= \frac{3}{7}\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right) - \frac{2}{21}\left(1-\left(\frac{-1}{8}\right)^n\right) \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(X_n) = \frac{3}{7}\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right) - \frac{2}{21}\left(1-\left(\frac{-1}{8}\right)^n\right)$.

Important ! On vérifie pour $n = 1$ pour se rassurer...