Devoir surveillé 4

Samedi 8 janvier - 4h00

NOM .... Prénom ....

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation. Quelques précisions :

- ***la copie devra présenter une marge ainsi qu'une en-tête suffisantes,***
- ***toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,***
- ***les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),***
- ***les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.***

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.

"Faire aisément ce que d'autres trouvent difficile à réaliser, c'est le talent ;
faire ce qui est impossible au talent, c'est le génie."
Henri-Frédéric Amiel

Exercice 1

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soient A, B et C trois évènements d'une expérience aléatoire et $\mathbb{P}$ une probabilité.
   (a) Démontrer que si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
   (b) Énoncer et démontrer la formule des probabilités totales.
2. Considérons f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$.
   Démontrer que f est bijective de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ dans un ensemble à déterminer, et expliciter l'expression de sa bijection réciproque.
3. On estime qu'une certaine maladie affecte 1 personne sur 10. On considère un test diagnostic ayant obtenu les résultats suivants :
   - si une personne est malade, le test est positif dans 80% des cas ;
   - si une personne n'est pas malade, le test est positif dans 10% des cas.

   On choisit une personne au hasard dans une certaine population et on considère les évènements :
   - M : "la personne est malade"
   - T : "le test effectué est positif"

   Quelle est la probabilité que la personne choisie soit malade sachant que son test s'est révélé positif ?
4. **Vrai ou faux ?** Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse. *La réponse doit être justifiée.*
   (a) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = 0_n$. Si A est inversible, alors $B = 0_n$.
   (b) La suite (u_n) converge vers 2 si, et seulement si, la suite $(|u_n|)$ converge vers 2.
   (c) La somme de deux fonctions bijectives sur $\mathbb{R}$ est une fonction bijective sur $\mathbb{R}$.

★★★★★★★

Exercice 2

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}_*^+$ par $f(x) = 1 + \dfrac{2}{x}$ et la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}_*^+$ puis représenter l'allure de sa courbe représentative ainsi que les premiers termes de (u_n).
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \in [1;3]$.
3. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est croissante et que la suite (w_n) est décroissante.
   (b) Justifier alors que les suites (v_n) et (w_n) sont convergentes.
   (c) Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, $g(x) = (f \circ f)(x)$. Déterminer une expression simplifiée de $g(x)$ puis résoudre l'équation $g(x) = x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_*^+$.
   (d) Conclure sur les limites de (v_n) et (w_n).
4. Que peut-on en conclure sur la suite (u_n) ?

★★★★★★★

Exercice 3

Soit (h_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Écrire deux fonctions `Python` prenant en argument d'entrée un entier naturel non nul n et renvoyant la valeur de h_n en sortie. L'une de ces deux fonctions devra utiliser l'écriture en compréhension d'une liste, l'autre non.
2. **Étude de la suite (h_n).**
   (a) Déterminer le sens de variation de la suite (h_n).
   (b) Démontrer que pour tout $x \in]-1;+\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$.
   (c) Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\ln\left(1 + \dfrac{1}{k}\right) \leq \dfrac{1}{k}$. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ h_n \geq \ln(n+1)$. Déterminer alors la limite de la suite (h_n).
3. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = h_n - \ln(n) \quad \text{et} \quad v_n = u_n - \frac{1}{n}$$

   (a) Démontrer que (v_n) est croissante.
   (b) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
   (c) En déduire que les deux suites (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite, notée ℓ.
   (d) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq \ell \leq u_n$.
   (e) Écrire une fonction `Python` prenant en argument d'entrée un réel strictement positif p et renvoyant en sortie un encadrement de ℓ d'amplitude inférieure ou égale à p (cette fonction pourra utiliser une des deux fonctions de la question 1, notée `h`).

★★★★★★★

Exercice 4

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On lance n fois une pièce donnant PILE avec la probabilité $p \in]0;1[$ et donnant FACE avec la probabilité $q = 1-p$. On suppose les lancers indépendants et on note :

- pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, P_k l'évènement : "obtenir PILE au $k^{\text{ème}}$ lancer" et $\mathrm{F}_k = \overline{\mathrm{P}_k}$;
- X_n la variable aléatoire égale au nombre de FACE obtenues avant l'apparition du premier PILE. On convient que X_n prend la valeur n si aucun PILE n'est obtenu au cours des n lancers.

1. Préciser $\mathrm{X}_n(\Omega)$.
2. Calculer $\mathbb{P}([\mathrm{X}_n = 0])$ ainsi que $\mathbb{P}([\mathrm{X}_n = n])$.
3. Déterminer, pour tout $k \in [\![1;n-1]\!]$, une expression simple de $\mathbb{P}([\mathrm{X}_n = k])$.
4. Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([\mathrm{X}_n = k]) = 1$.
5. Considérons la fonction f définie sur $]0;1[$ par $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k$.
   (a) Soit $x \in]0;1[$. En exprimant de deux façons différentes $f'(x)$, établir :
   $$\sum_{k=1}^{n-1} kx^k = \frac{x - nx^n + (n-1)x^{n+1}}{(1-x)^2}$$
   (b) En déduire l'espérance de X_n.
   (c) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{E}(\mathrm{X}_n)$.

★★★★★★★

Exercice 5

Un objet se déplace sur les sommets d'un triangle, nommés A, B, C, selon le schéma suivant :

- si l'objet est en A, il y reste avec une probabilité $\frac{3}{8}$, ou il se dirige vers B avec une probabilité $\frac{3}{8}$, sinon il se dirige vers C avec une probabilité $\frac{1}{4}$.
- si l'objet est en B, il y reste avec une probabilité $\frac{1}{4}$, ou il se dirige vers A avec une probabilité $\frac{1}{2}$, sinon il se dirige vers C avec une probabilité $\frac{1}{4}$.
- si l'objet est en C, il y reste.

Initialement, l'objet se situe au sommet A.
On note, pour $n \in \mathbb{N}$, A_n l'évènement "l'objet est en A à l'étape n" et $a_n = \mathbb{P}(\mathrm{A}_n)$. Ainsi, $a_0 = 1$. On définit de la même façon les notations $\mathrm{B}_n, \mathrm{C}_n$ et b_n, c_n.

Partie A.

1. Donner a_1 puis calculer a_2.
2. Si à l'étape 2, l'objet était en B, quelle est alors la probabilité qu'il ait été en A à l'étape 1 ?
3. En utilisant la formule des probabilités totales, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{3}{8}a_n + \frac{1}{2}b_n \\ b_{n+1} = \frac{3}{8}a_n + \frac{1}{4}b_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + c_n \end{cases}$$
4. (a) Déduire de la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = \frac{3}{4}c_n + \frac{1}{4}$.
   (b) Déterminer alors le terme général de (c_n).
   (c) En déduire la limite de la suite (c_n) et interpréter ce résultat.
5. (a) Établir : $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+2} = \frac{5}{8}b_{n+1} + \frac{3}{32}b_n$.
   (b) Déterminer alors le terme général de la suite (b_n).
6. Déduire des questions précédentes le terme général de (a_n).
7. On considère le programme incomplet suivant :
   (a) Compléter les lignes 13,14,15,16,17,19 du programme afin que la commande `simulation(n)` renvoie une liste contenant la simulation des sommets parcourus par l'objet lors des étapes 0 à n du jeu.

```python
import numpy.random as rd

def simulation(n):
    objet="A"
    Lobjet=[objet]
    for k in range(1,n+1):
        p=rd.rand()        #réel aléatoire entre 0 et 1
        if objet=="A":
            if p<3/8:
                objet="B"
            elif p>=3/8 and p<5/8:
                objet="C"
        elif ..........
            ..........
                ..........
            ..........
                ..........
        Lobjet.append(objet)
    return (..........)

def mystere(L,x):
    for k in range(0,len(L)):
        if L[k]==x:
            return k
```

(b) On exécute successivement les deux instructions suivantes : `L=simulation(15)` et `mystere(L,"C")`. Voici le résultat obtenu :

```
>>> L=simulation(15)
>>> mystere(L,"C")
4
```

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B.

Le contexte de cette partie est le même qu'au début de l'exercice; et les résultats de la partie A *pourront être utilisés.*

A chaque déplacement de l'objet, on définit des points de la façon suivante :

- chaque fois que l'objet arrive en A, 1 point est crédité
- chaque fois que l'objet arrive en B, 1 point est débité
- aucun point n'est attribué quand l'objet arrive en C

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de points accumulés jusqu'à l'étape n *(aucun point n'est attribué pour le point de départ en* A*)*.
Notons également Y_n et Z_n les variables aléatoires définies par :

$$Y_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A_n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad ; \quad Z_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in B_n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. **Variable aléatoire X_1.**
   (a) Donner $X_1(\Omega)$.
   (b) Déterminer la loi de X_1.
   (c) En déduire $E(X_1)$ et $V(X_1)$.
2. Donner $X_2(\Omega)$.
3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer X_{n+1} en fonction de X_n, Y_{n+1} et Z_{n+1}.
   (b) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n(\Omega) = [\![-n; n]\!]$.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}([X_n = n])$.
   (d) Soit $n \in [\![3; +\infty[\![$. Donner deux évènements inclus dans l'évènement $[X_n = 0]$.
   (e) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(X_{n+1}) = E(X_n) + a_{n+1} - b_{n+1}$.
   (f) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que $E(X_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k)$ puis déterminer une expression simplifiée de $E(X_n)$.