Devoir surveillé 5

Samedi 12 mars - 4h00

NOM .... Prénom ....

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation. Quelques précisions :

- ***la copie devra présenter une marge ainsi qu'une en-tête suffisantes,***
- ***toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,***
- ***les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),***
- ***les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.***

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.

*"Le monde ne mourra jamais par manque de merveilles,
mais uniquement par manque d'émerveillement."*
Gilbert Keith Chesterton

Exercice 1

1. **Vrai ou faux ?** Pour chacune des affirmations ci-dessous, préciser si elle est vraie ou fausse. *La réponse doit être justifiée.*

   (a) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Si la fonction $|f|$ est continue sur $\mathbb{R}$, alors la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

   FAUX

   En effet, considérons $f : x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$. La fonction $|f|$ est constante égale à 1 sur $\mathbb{R}$, elle est donc continue sur $\mathbb{R}$. En revanche, la fonction f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ (pas continue en 0).

   (b) Soit (u_n) une suite. Si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq \dfrac{1}{n^2}$, alors $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est convergente.

   FAUX

   Prenons la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -1$. On a bien : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leq \dfrac{1}{n^2}$; et pourtant, la série $\sum u_n$ diverge (grossièrement même, la vilaine).

   ✘ Attention !
   Pour appliquer le théorème de comparaison sur les séries à termes généraux positifs, il manque la positivité !!

   (c) Il existe une famille génératrice de cardinal 2 dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   FAUX

   En effet, on sait que le cardinal d'une famille génératrice est supérieur ou égal à la dimension de l'espace vectoriel qu'elle génère. Et comme $\dim\big(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\big) = 4$, $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ne possède aucune famille génératrice de cardinal 2.

   (d) Soient $X, Y, Z \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Si les matrices X, Y, Z sont deux à deux non colinéaires, alors la famille (X, Y, Z) est une famille libre de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

   FAUX

   Prenons $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Les matrices X, Y, Z sont bien deux à deux non colinéaires, et pourtant, $Z = X + Y$, donc la famille (X, Y, Z) n'est pas libre.

2. Établir la convergence et déterminer la somme des séries suivantes :

   (a) $\sum \dfrac{n^2}{2^n}$

   - On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$\begin{aligned} \frac{n^2}{2^n} &= \frac{n(n-1)+n}{2^n} \\ &= \frac{1}{4} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \frac{1}{2} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$
   - Or les séries $\sum n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ et $n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ sont des séries géométriques dérivées convergentes (car $\frac{1}{2} \in]-1;1[$).

   ✍ Rédaction
   On rappelle que l'on travaille sur les termes généraux, pas sur les séries !! On peut éventuellement travailler sur les sommes partielles, mais plutôt dans le cas de télescopages ou de changement d'indices...

   Par conséquent, la série $\sum \dfrac{n^2}{2^n}$ est une combinaison linéaire de séries convergentes, elle est donc également convergente et de plus :
   $$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n} &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{4} \frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} + \frac{1}{2} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= 4+2 \\ &= 6 \end{aligned}$$

   Conclusion : la série $\sum \dfrac{n^2}{2^n}$ est convergente et sa somme vaut 6.

   (b) $\sum\limits_{n\geq 1} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{2n}$

   - On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\left(\frac{1}{3}\right)^{2n} = \left(\frac{1}{9}\right)^n$.
   - Or la série $\sum\limits_{n\geq 1} \left(\frac{1}{9}\right)^n$ est une série géométrique convergente (car $\frac{1}{9} \in]-1;1[$).

   Par conséquent, la série $\sum\limits_{n\geq 1} \left(\frac{1}{3}\right)^{2n}$ est convergente et de plus :
   $$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^n - \left(\frac{1}{9}\right)^0 \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{9}} - 1 \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

   ✘ Attention !
   On connaît la somme de la série géométrique quand elle démarre à 0...

   Conclusion : la série $\sum\limits_{n\geq 1} \left(\frac{1}{3}\right)^{2n}$ est convergente et sa somme vaut $\frac{1}{8}$.

(c) $\sum \frac{n}{n!}$

Soit $N \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} \frac{n}{n!} &= \sum_{n=1}^{N} \frac{n}{n!} && \text{car } n! = n \times (n-1)! \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n-1)!} && \text{changement d'indice } k = n-1 \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!}
\end{aligned}$$

Or on sait (série exponentielle) que : $\lim\limits_{N \to +\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!} = e$.

Conclusion : la série $\sum \frac{n}{n!}$ est convergente et sa somme vaut e.

Petite remarque

On voit qu'il va y avoir simplification puis changement d'indice... On manipule donc la somme partielle !

✓ Rigueur !

La simplification $\frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}$ n'a de sens que si $n \geq 1$... Il faut donc isoler le cas $n = 0$ (pour lequel le terme vaut 0).

3. Soit (u_n) une suite de réels. Démontrer le résultat suivant :

la suite (u_n) est convergente si, et seulement si, la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ est convergente

Il s'agit d'une équivalence, on pourrait raisonner par double implication, mais ce n'est pas nécessaire ici.

En revanche, posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k)$.

Par télescopage, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = u_{n+1} - u_0$$

Par conséquent, on a les équivalences :

$$\begin{aligned}
\big((u_n) \text{ converge}\big) &\iff \big((u_n) \text{ possède une limite finie en } +\infty\big) \\
&\iff \big((S_n) \text{ possède une limite finie en } +\infty\big) \\
&\iff \big((S_n) \text{ converge}\big) \\
&\iff \Big(\sum (u_{n+1} - u_n) \text{ converge}\Big)
\end{aligned}$$

Conclusion : la suite (u_n) est convergente si, et seulement si, la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ est convergente.

4. On considère la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = S_{2n}$ et $v_n = S_{2n+1}$.

(a) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

- **Variations de (u_n).**
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= S_{2n+2} - S_{2n} \\
&= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} \\
&= \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} \\
&= \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} \\
&\overset{\text{Réflexe !}}{=} \frac{-1}{(2n+1)(2n+2)}
\end{aligned}$$

  Par conséquent, $u_{n+1} - u_n < 0$ et la suite (u_n) est ainsi décroissante.

- **Variations de (v_n).** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= S_{2n+3} - S_{2n+1} \\
&= \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+3} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} \\
&= \frac{-1}{2n+3} + \frac{1}{2n+2} \\
&\overset{\text{Réflexe !}}{=} \frac{1}{(2n+2)(2n+3)}
\end{aligned}$$

  Par conséquent, $v_{n+1} - v_n > 0$ et la suite (u_n) est ainsi croissante.

- **Limite de $(v_n - u_n)$.**
  On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
v_n - u_n &= S_{2n+1} - S_{2n} \\
&= \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} \\
&= \frac{-1}{2n+1}
\end{aligned}$$

  Par conséquent : $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$.

Conclusion : les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

(b) En déduire la convergence de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{k}$.

Puisque les sites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, elles convergent et ont même limite.
Ainsi, les suites de termes de rangs pairs et de rangs impairs de la suite (S_n) convergent vers une valeur commune.

Par propriété de recouvrement, la suite (S_n) converge également vers ce réel.

Conclusion : la série $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{k}$ est convergente.

5. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_*^+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_*^+,\ f(x) = x^2 \ln(x)$.

   (a) Justifier que la fonction f est prolongeable par continuité sur $[0;+\infty[$. *On note encore f la fonction prolongée.*

   Important !
   Ne pas oublier cette étape !
   En effet ; examiner le cas $x = 0$ ne signifie pas qu'il n'y a pas d'autres cas "problématiques".

   - La fonction f est un produit de fonctions continues sur $]0;+\infty[$, elle est donc continue sur $]0;+\infty[$.
   - **En 0 :**
     Par croissance comparée : $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \ln(x) = 0$.
     Ainsi, la fonction f est prolongeable par continuité en 0, en posant $f(0) = 0$.

   Conclusion : f est prolongeable par continuité sur $[0;+\infty[$ en posant $f(0) = 0$.

   (b) Démontrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.
   Soit $h > 0$. On a :
   $$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{f(h)-0}{h} = h\ln(h)$$
   Or, par croissance comparée, $\lim\limits_{h\to 0} h\ln(h) = 0$.

   Conclusion : la fonction f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

   (c) Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;+\infty[$.

   ☞ **Rappel...**
   $\mathcal{C}^1$ signifie "f dérivable et f' continue".

   - f est un produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$, elle est donc $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$.
   - Puisqu'on sait déjà que f est dérivable en 0, il ne reste plus qu'à montrer que f' est continue en 0.
     On a :
     $$\forall x \in \mathbb{R}_*^+,\ f'(x) = 2x\ln(x) + x \quad ; \quad f'(0) = 0$$
     Or, par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to 0}(2x\ln(x)+x) = 0 = f'(0)$.
     Ainsi, f' est continue en 0.

   Conclusion : la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;+\infty[$.

   (d) f est-elle deux fois dérivable en 0 ?
   Cela revient à étudier la dérivabilité en 0 de f'...
   Soit $h > 0$. On a :
   $$\frac{f'(0+h)-f'(0)}{h} = 2\ln(h) + 1$$
   Or $\lim\limits_{h\to 0} 2\ln(h) + 1 = -\infty$: f' n'est donc pas dérivable en 0.

   Conclusion : f n'est pas deux fois dérivable en 0.

CQFR

Ce qu'il faut retenir des copies :

1. Le vrai/faux est en général assez mal traité... Il demande une bonne connaissance du cours (le cours, le cours, le cours !!) ; et de ne pas se contenter de dire "c'est faux, on pourrait trouver un contre-exemple". Ce n'est pas au correcteur de trouver un contre-exemple à votre place !
2. Attention à la rédaction sur les séries !! En particulier, si on travaille sur les sommes partielles, on n'oublie pas de **passer à la limite** pour conclure...
3. La question 4 est un grand classique : à retravailler impérativement. Trop d'erreurs de calculs pour l'étude des variations de (u_n) et de (v_n)... Et question trop peu traitée : à croire que vous ne savez pas ce que sont deux suites adjacentes, et ce que cela implique...

★★★★★★★

Exercice 2

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A - 2I_3)^2$ puis en déduire que $(A - 2I_3)^3 = 0$.

   On a $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ puis $(A - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Conclusion : $(A - 2I_3)^3 = 0$.

2. Montrer que l'ensemble $E_2 = \left\{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \;/\; AX = 2X\right\}$ est un espace vectoriel dont on donnera une base et la dimension.

   Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} AX = 2X &\iff A(-2I_3)X = 0 \\ &\iff \begin{cases} -x - y = 0 \\ z = 0 \\ -x - y + z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -y \\ y = y \\ z = 0 \end{cases} \\ &\iff X = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   Ainsi : $E_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

   - Par conséquent, E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et donc un espace vectoriel.
   - De plus, la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est :
     - génératrice de E_2 d'après ce qui précède,
     - libre, car constituée d'un seul vecteur non nul.

     Par conséquent, la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est une base de E_2 et ainsi $\dim(E_2) = 1$.

> **✘ Attention !**
> $\dim(E_2)$ est le cardinal commun des bases de E_2... Ici, la base trouvée n'est constituée que d'une seule matrice.

3. Posons $U = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Vérifier que $AV \in \mathrm{Vect}(U, V)$.
   On a déjà :

$$AV = \ldots = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   De plus, on remarque que :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = U + 2V$$

   Conclusion : $AU \in \mathrm{Vect}(U, V)$.

> **☞ Rappel...**
> $\mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v}) = \left\{a\vec{u} + b\vec{v} \;/\; a, b \in \mathbb{R}\right\}$: c'est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

   (b) Résoudre l'équation $AX = 2X + V$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

   Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} AX = 2X + V &\iff (A - 2I_3)X = V \\ &\iff \begin{cases} -x - y = 1 \\ z = 0 \\ -x - y + z = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 1 - y \\ y = y \\ z = 0 \end{cases} \\ &\iff X = \begin{pmatrix} -1 - y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   Conclusion : $\left\{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \;/\; AX = 2X + V\right\} = \left\{\begin{pmatrix} -1 - y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \;/\; y \in \mathbb{R}\right\}$.

> **☞ Pour info...**
> Si on avait défini la somme d'ensembles, on aurait pu écrire : $\left\{\begin{pmatrix} -1 - y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \;/\; y \in \mathbb{R}\right\} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$: c'est un *espace affine* de dimension 1, porté par l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$...

   (c) Posons $W = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer que la famille (U, V, W) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- La famille (U,V,W) est de cardinal 3 dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, espace vectoriel de dimension 3 ; donc pour montrer qu'elle est une base, il suffit de montrer qu'elle est libre.
- Soient $a,b,c \in \mathbb{R}$. On a :

$$aU+bV+cW=0 \iff \begin{cases} -a+b-c=0 \\ a=0 \\ b=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$$

Par conséquent, la famille (U,V,W) est libre.

Conclusion : la famille (U,V,W) est une base.

4. Considérons $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1}.

Méthode habituelle... On trouve que P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Déterminer la matrice T de sorte que $A = PTP^{-1}$ et vérifier que $T = 2I_3 + N$, où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Puisque $A = PTP^{-1}$, on trouve $T = P^{-1}AP$, et donc : $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Conclusion : $A = PTP^{-1}$, où $T = 2I_3 + N$.

5. On considère l'ensemble $\mathcal{C} = \left\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ AM = MA\right\}$.

(a) Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}$ est un espace vectoriel.

- Par définition, $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel ;
- La matrice nulle appartient à $\mathcal{C}$ (car $A \times 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \times A$), donc $\mathcal{C}$ est non vide.
- Soient $a,b \in \mathbb{R}$ et $M, M' \in \mathcal{C}$. Montrons que $aM + bM' \in \mathcal{C}$.
On sait déjà que $aM + bM' \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et de plus :

$$\begin{aligned} A(aM+bM') &= aAM + bAM' \\ &\underset{M,M' \in \mathcal{C}}{=} aMA + bM'A \\ &= (aM+bM')A \end{aligned}$$

Par conséquent : $aM + bM' \in \mathcal{C}$.

Conclusion : $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, donc un espace vectoriel.

(b) Soient $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $Q = P^{-1}MP$. Montrer l'équivalence :

$$M \in \mathcal{C} \iff NQ = QN$$

On a :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} &\iff AM = MA \\ &\iff PTP^{-1}PQP^{-1} = PQP^{-1}PTP^{-1} \quad A = PTP^{-1} \text{ et } Q = PMP^{-1} \\ &\iff PTQP^{-1} = PQTP^{-1} \quad PP^{-1} = P^{-1}P = I_3 \\ &\iff TQ = QT \\ &\iff (2I_3+N)Q = Q(2I_3+N) \\ &\iff 2Q + NQ = 2Q + QN \\ &\iff NQ = QN \end{aligned}$$

Conclusion : $M \in \mathcal{C} \iff NQ = QN$.

(c) Démontrer que $\left\{Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ NQ = QN\right\} = \mathrm{Vect}(I_3, N, N^2)$.

Soit $Q = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On a :

$$NQ = \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad QN = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & d & e \\ 0 & g & h \end{pmatrix}$$

D'où :

$$NQ = QN \iff \begin{cases} d=0 \\ e=a \\ f=b \\ g=0 \\ h=d \\ i=e \\ 0=0 \\ 0=g \\ 0=h \end{cases} \iff Q = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Par conséquent :

$$\left\{Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ NQ = QN\right\} = \left\{\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \ / \ a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$$

Et comme $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a bien :

$$\left\{Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ NQ = QN\right\} = \left\{aI_3 + bN + cN^2 \ / \ a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$$

Conclusion : $\left\{Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ NQ = QN\right\} = \mathrm{Vect}(I_3, N, N^2)$.

(d) Déterminer alors une base de $\mathcal{C}$ ainsi que sa dimension.
Soit $M \in \mathcal{C}$. On a :

$$\begin{array}{rcll} M \in \mathcal{C} & \iff & AM = MA & \text{question 5(b)} \\ & \iff & P^{-1}MP \in \left\{Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ NQ = QN\right\} & \text{question précédente} \\ & \iff & \exists a, b, c \in \mathbb{R} \ / \ P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} & \\ & \iff & \exists a, b, c \in \mathbb{R} \ / \ M = P\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}P^{-1} & \\ & \iff & \exists a, b, c \in \mathbb{R} \ / \ M = \begin{pmatrix} a-b+c & -b+c & -c \\ -c & a-c & b+c \\ -b & -b & a+b \end{pmatrix} & \end{array}$$

Par conséquent :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C} & = & \left\{\begin{pmatrix} a-b+c & -b+c & -c \\ -c & a-c & b+c \\ -b & -b & a+b \end{pmatrix} \ / \ a, b, c \in \mathbb{R}\right\} \\ & = & \mathrm{Vect}\left(I_3, (A-2I_3), (A-2I_3)^2\right) \end{array}$$

La famille $\left(I_3, (A-2I_3), (A-2I_3)^2\right)$ est ainsi génératrice de $\mathcal{C}$... De plus, elle est libre (il suffit de regarder les matrices), c'est alors une base de $\mathcal{C}$.

Conclusion : $\left(I_3, (A-2I_3), (A-2I_3)^2\right)$ est une base de $\mathcal{C}$, et ainsi $\dim(\mathcal{C}) = 3$.

En gros...
On a fait une sorte de "changement d'inconnu" entre la recherche du commutant de N et celui de A... Par conséquent : $\mathcal{C} \neq \mathrm{Vect}(I_3, N, N^2)$.

Petite remarque
En fait, $PI_3P^{-1} = I_3$, $PNP^{-1} = P(T-2I_3)P^{-1} = PTP^{-1} - 2I_3 = A - 2I_3$ et $PN^2P^{-1} = (A-2I_3)^2$... Et les questions 5(b) et 5(c) nous permettent alors d'avoir directement : $\mathcal{C} = \mathrm{Vect}\left(I_3, (A-2I_3), (A-2I_3)^2\right)$...

6. On considère l'ensemble $\mathcal{R} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ M^2 + I_3 = A\}$.

(a) L'ensemble $\mathcal{R}$ est-il un espace vectoriel ?
$\mathcal{R}$ n'est pas un espace vectoriel car il ne contient pas la matrice nulle : $0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} + I_3 \neq A$.

✘ Attention !
Cela ne signifie pas qu'il est non vide !! S'il était vide, passerions-nous vraiment 5 questions à l'étudier... ?

(b) Soient $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $Q = P^{-1}MP$. Montrer l'équivalence :

$$M \in \mathcal{R} \iff Q^2 = I_3 + N$$

On a :

$$\begin{array}{rcl} M \in \mathcal{R} & \iff & M^2 + I_3 = A \\ & \iff & PQ^2P^{-1} + I_3 = A \\ & \iff & Q^2 + P^{-1}I_3P = P^{-1}AP \\ & = & Q^2 + I_3 = T \\ & = & Q^2 + I_3 = 2I_3 + N \\ & = & Q^2 = I_3 + N \end{array}$$

Conclusion : $M \in \mathcal{R} \iff Q^2 = I_3 + N$.

(c) Soit $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Démontrer que si $Q^2 = I_3 + N$, alors nécessairement, Q et N commutent.
Supposons que $Q^2 = I_3 + N$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} QN & = & Q(Q^2 - I_3) \\ & = & Q^3 - Q \\ & = & (Q^2 - I_3)Q \\ & = & NQ \end{array}$$

Conclusion : si $Q^2 = I_3 + N$, alors nécessairement, Q et N commutent.

(d) En déduire, à l'aide de la question 5(c), les matrices $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $Q^2 = I_3 + N$.
Soit $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Raisonnons par condition nécessaire et condition suffisante (ou analyse synthèse).

- **Condition nécessaire.** Supposons que $Q^2 = I_3 + N$.
  Nécessairement, d'après la question précédente, Q commute avec N. Mais alors, d'après le résultat de la question 5(c), il existe des réels a, b, c tels que $Q = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

  Dans ce cas :

$$Q^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & b^2 + 2ac \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

Mais alors :

$$\begin{aligned}
Q^2 = I_3 + N \quad & \iff \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & b^2+2ac \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
& \iff \begin{cases} a^2 = 1 \\ 2ab = 1 \\ b^2 + 2ac = 0 \end{cases} \\
& \iff \begin{cases} \begin{cases} a = 1 \\ b = \dfrac{1}{2} \\ c = \dfrac{-1}{8} \end{cases} \\ \text{ou} \\ \begin{cases} a = -1 \\ b = \dfrac{-1}{2} \\ c = \dfrac{1}{8} \end{cases} \end{cases}
\end{aligned}$$

Par conséquent, les candidat-solutions à l'équation $Q^2 = I_3 + N$ sont les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/8 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et sont opposée.

- **Condition suffisante.** Il ne reste qu'à regarder si ces candidat-solutions sont bien solution... Bon, c'est le cas !

Conclusion : les solutions de l'équation $Q^2 = I_3 + N$ sont $\pm \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/8 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(e) Conclure en déterminant l'ensemble $\mathcal{R}$.

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{R} \quad & \iff M^2 + I_3 = A \\
& \iff P^{-1}MP \in \left\{ Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \,/\, Q^2 = I_3 + N \right\} \\
& \iff P^{-1}MP = \pm \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/8 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
& \iff M = \pm \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 3 \\ -4 & -4 & 12 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

question 6(b)

question précédente

Petite remarque

Les raisonnements mis en place dans cette question 6 sont très proches de ceux de la question 5... Les calculs sont en revanche un peu différents. Sur cette fin d'exercice, on peut sans aucun problème tolérer que la copie contienne un peu moins de détails calculatoires...

Conclusion : $\mathcal{R} = \left\{ \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 3 \\ -4 & -4 & 12 \end{pmatrix}, \frac{-1}{8} \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 3 \\ -4 & -4 & 12 \end{pmatrix} \right\}$.

CQFR

Ce qu'il faut retenir des copies : Exercice très classique qui a été globalement bien traité. La fin de la question 5 et la question 6 peuvent maintenant être retravaillées pour gagner encore quelques points sur cet exercice.

★★★★★★★

Exercice 3

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) = (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$.

1. Donner, sous forme d'entiers ou de fractions simplifiées, les valeurs de u_0, u_1 et u_2.
   $u_0 = 2$
   $u_1 = (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right) = 3$
   $u_2 = (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right) = \frac{15}{4}$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :
$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \prod_{k=0}^{n+1}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \\ &= \left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \\ &= \left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)u_n \end{aligned}$$
   Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times \left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$.
3. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geq 2$.
   Par récurrence...
   - **Initialisation.** Pour $n = 0$:
     $u_0 = 2$, donc l'initialisation est vérifiée.
   - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \geq 2$ et montrons que $u_{n+1} \geq 2$.
     Par hypothèse de récurrence, on a :
     $$u_n \geq 2$$
     D'où, en multipliant par $1+\frac{1}{2^{n+1}}$ (strictement positif) :
     $$u_n \times \left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right) \geq 2\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$
     C'est à dire :
     $$u_{n+1} \geq 2 + \frac{1}{2^n}$$
     Et comme $\frac{1}{2^n} > 0$, on obtient, par transitivité :
     $$u_{n+1} \geq 2$$
     L'hérédité est ainsi établie.

   Conclusion : pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geq 2$.

   (b) Étudier les variations de la suite (u_n).
   Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_n \times \left(1+\frac{1}{2^n}\right)^n - u_n \\ &= u_n \times \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$
   Or $u_n > 0$ (car $u_n \geq 2$) et $\frac{1}{2^n} > 0$.
   Ainsi
   $$u_{n+1} - u_n \geq 0$$
   Conclusion : la suite (u_n) est croissante.

   Petite remarque
   Puisque l'on sait que (u_n) est à termes strictement positifs, on peut aussi remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$...

   (c) Établir que, pour tout réel x strictement supérieur à -1, on a : $\ln(1+x) \leq x$.
   On sait que la fonction $f : x \longmapsto \ln(1+x)$ est concave sur son ensemble de définition qui est $]-1;+\infty[$.
   Par conséquent, sa courbe est partout au-dessous de toutes ses tangentes, et en particulier de sa tangente au point d'abscisse 0 dont l'équation réduite est : $y = f'(0)(x-0)+f(0)$, c'est à dire $y = x$.
   Conclusion : pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.

   Petite remarque
   Sinon, on étudie la fonction $x \longmapsto \ln(1+x) - x$, comme déjà fait à de multiples reprises !

   (d) En déduire que, pour tout entier naturel n, $\ln(u_n) \leq 2$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   Puisque pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $1+\frac{1}{2^k} > 0$, on en déduit que :
   $$\ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$$
   Or, d'après la question précédente :
   $$\forall k \in [\![0,n]\!],\ \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \leq \frac{1}{2^k} \quad \left(\text{car } \frac{1}{2^k} > -1\right)$$
   D'où, en sommant :
   $$\sum_{k=0}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}$$

Et ainsi, par transitivité :

$$\ln(u_n) \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$$

Or :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} &= \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} \\ &= 2\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right) \quad \text{car } \frac{1}{2^{n+1}} > 0 \\ &\leq 2 \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(u_n) \leq 2$.

4. En utilisant les questions précédentes, montrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ, élément de $[2, e^2]$.

D'après la question précédente, par croissance de l'exponentielle, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq e^2$: (u_n) est majorée.
Or (u_n) est croissante (question 3(b)).
Ainsi, d'après le théorème de convergence monotone, (u_n) converge vers un réel ℓ.
Et puisque pour tout n, $u_0 \leq u_n \leq e^2$, on en déduit que $\ell \in [2; e^2]$.

Conclusion : la suite (u_n) converge vers un réel ℓ, élément de $[2, e^2]$.

✍ Rédaction
Il vaut mieux distinguer les 2 points :
- la CV, assurée par th de CV monotone
- l'encadrement de ℓ, par l'encadrement de (u_n)

5. On se propose dans cette question de déterminer la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.

(a) Justifier que la suite $\big(\ln(u_n)\big)$ converge et que l'on a : $\ln(\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$.

Puisque (u_n) converge vers $\ell \in [2 : e^2]$ et que la fonction ln est continue en ℓ (car continue sur $]0; +\infty[$), on en déduit que la suite $\big(\ln(u_n)\big)$ converge vers $\ln(\ell)$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$...

Conclusion : La suite $(\ln(u_n))$ converge vers $\ln(\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$.

✓ Rigueur !
Ne pas oublier la continuité de ln en ℓ pour justifier que $\big(\ln(u_n)\big)$ converge vers $\ln(\ell)$!

(b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $u_n > 0$ et $\ell > 0$, on a :

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) &= \ln(\ell) - \ln(u_n) \quad \text{question précédente} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) - \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$.

✘ Attention !
Pour que $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ il faut que $a, b > 0$ (sinon, petit souci...).

(c) Établir : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) \leq \frac{1}{2^n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \leq \frac{1}{2^k}$, on en déduit, d'après la question précédente, que :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$$

  Or :

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} &= \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

  Par conséquent :

$$\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) \leq \frac{1}{2^n}$$

- De plus, comme (u_n) est croissante de limite ℓ, on a : $u_n \leq \ell$. Et ainsi, puisque $u_n > 0$, $\frac{\ell}{u_n} \geq 1$.

  Par conséquent :

$$\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) \geq 0$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) \leq \frac{1}{2^n}$.

(d) Déduire de la question précédente que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \ell - u_n \leq \ell\left(1 - e^{-\frac{1}{2^n}}\right)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- (u_n) étant croissante de limite ℓ, on a déjà : $\ell - u_n \geq 0$.
- Ensuite, considérons la différence :

$$\ell - u_n - \ell(1 - e^{-\frac{1}{2^n}}) = -u_n + \ell e^{-\frac{1}{2^n}}$$

D'après la question précédente, par croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$, on a : $\dfrac{\ell}{u_n} \leq e^{\frac{1}{2^n}}$.
D'où, puisque $u_n > 0$:

$$\ell e^{-\frac{1}{2^n}} \leq u_n$$

Par conséquent :

$$-u_n + \ell e^{-\frac{1}{2^n}} \leq 0$$

Et ainsi :

$$\ell - u_n - \ell(1 - e^{-\frac{1}{2^n}}) \leq 0$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \ell - u_n \leq \ell\left(1 - e^{-\frac{1}{2^n}}\right)$.

(e) Justifier que, pour tout réel x, on a $1 - e^{-x} \leq x$. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \ell - u_n \leq \dfrac{\ell}{2^n}$.
Conclure quant à la nature de la série de terme général $\ell - u_n$.

- On pose et on étudie la fonction $g : x \longmapsto 1 - e^{-x} - x$... On obtient sans difficulté que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 1 - e^{-x} \leq x$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On applique le résultat que l'on vient de trouver avec $x = \dfrac{1}{2^n} \in \mathbb{R}$:

$$1 - e^{-\frac{1}{2^n}} \leq \frac{1}{2^n}$$

Or, d'après la question précédente : $0 \leq \ell - u_n \leq \ell\left(1 - e^{-\frac{1}{2^n}}\right)$.
D'où, par transitivité :

$$0 \leq \ell - u_n \leq \frac{\ell}{2^n}$$

- Or, la série $\sum \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ est une série géométrique convergente (car $\dfrac{1}{2} \in]-1;1[$), donc, par théorème de comparaison sur les séries à termes généraux positifs, la série $\sum (\ell - u_n)$ est également convergente.

Conclusion : la série $\sum \ell - u_n$ converge.

✍ **Rédaction**
On compare seulement les termes généraux : pas besoin de comparer les sommes partielles (et ça n'a pas de sens de comparer les séries).

(f) i. Écrire une fonction Python qui prend un entier naturel n en argument d'entrée et renvoie la valeur de u_n en sortie.

```python
def u(n):
    U=2
    for k in range(1,n+1):
        U=U*(1+1/2**k) #ATTENTION : k, pas k+1...
    return U
```

ii. Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ell - u_n \leq \dfrac{e^2}{2^n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
D'après la question 5(e) :

$$\ell - u_n \leq \frac{\ell}{2^n}$$

Mais on sait aussi, d'après la question 4, que $\ell \leq e^2$, d'où (car $2^n > 0$) : $\dfrac{\ell}{2^n} \leq \dfrac{e^2}{2^n}$.
Le résultat en découle, par transitivité.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ell - u_n \leq \dfrac{e^2}{2^n}$.

iii. Résoudre, dans $\mathbb{N}$, l'inéquation $\dfrac{e^2}{2^n} < 10^{-5}$. Interpréter le résultat. *Donnée :* $\dfrac{5\ln(10)+2}{\ln(2)} \simeq 19,5$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{e^2}{2^n} < 10^{-5} &\iff 2^n > e^2 \times 10^5 \\
&\iff n\ln(2) > 2 + 5\ln(10) && \text{par stricte croissance de ln sur } \mathbb{R}_+^* \\
&\iff n > \frac{5\ln(10)+2}{\ln(2)} && \text{car } \ln(2) > 0 \\
&\iff n \geq 20
\end{aligned}$$

- Interprétation :
Pour $n \geq 20$, on a $\dfrac{e^2}{2^n} < 10^{-5}$; ainsi, d'après la question précédente et par transitivité, si $n \geq 20$, alors $\ell - u_n < 10^{-5}$.
Et comme on sait que $\ell - u_n \geq 0$, on obtient que, si $n \geq 20$, u_n fournit une valeur approchée de ℓ à 10^{-5} près.

✘ **Attention !**
20 n'est pas nécessairement la plus petite valeur à partir de laquelle u_n est une valeur approchée de ℓ à 10^{-5} près, puisque nous n'avons que des majorations...

CE QU'IL FAUT RETENIR DES COPIES : Des questions assez "classiques" dans les techniques, qu'il serait bon de retravailler : 5(c), 5(e).
La question 5(f)(i) a été trop peu traitée : il faut prendre les points sur cette question ! !

★★★★★★★

Exercice 4

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on définit la fonction f_n sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $f_n(x) = x^n - nx + 1$.

1. Écrire une fonction Python de sorte que l'exécution de la commande `f(n,x)` renvoie la valeur de $f_n(x)$, où $n \in [\![2;+\infty[\![$ et $x \in \mathbb{R}^+$.

```
def f(n,x):
    return x**n-n*x+1
```

Petite remarque
Pas nécessaire de traiter les cas où $n \notin [\![2;+\infty[\![$ et $x < 0$ en fait...

Petite remarque
Le n est introduit dans l'énoncé... Il n'y avait donc pas à écrire "soit $n \in [\![2;+\infty[\![$ sur les copies (j'avais oublié !).

2. Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$. Dresser le tableau de variations complet de f_n sur $[0;+\infty[$.

La fonction f_n est dérivable sur $[0;+\infty[$ car c'est une fonction polynômiale, et :

$$\forall x \in [0;+\infty[, \quad f_n'(x) = nx^{n-1} - n = n(x^{n-1} - 1)$$

D'où (la limite en $+\infty$ étant obtenue en factorisant $f_n(x)$ par x^n) :

x	0		1		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
f_n	1	$\searrow$	$2-n$	$\nearrow$	$+\infty$

Comment es-ce possible...
de ne pas trouver la bonne valeur de $f_n(1)$? ?!!

3. (a) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $f_2(x) = 0$.

(b) Soit $n \in [\![3;+\infty[\![$. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède exactement deux solutions, notées α_n et β_n, vérifiant :

$$0 < \alpha_n < 1 < \beta_n$$

- Sur $]0;1[$:
  - f_n est continue sur l'intervalle $]0;1[$
  - f_n est strictement décroissante sur $]0;1[$

  D'après le théorème de bijection f_n est bijective de $]0;1[$ dans $f_n(]0;1[) =]2-n;1[$.
  Or, puisque $n \geq 3$, on a $2-n < 0$. Ainsi, $0 \in]2-n;1[$.
  Par conséquent, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n sur $]0;1[$.
- De même sur $]1;+\infty[$.
  L'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution β_n sur $]1;+\infty[$.

Conclusion : pour tout $n \geq 3$, l'équation $f_n(x) = 0$ possède exactement deux solutions, notées α_n et β_n, vérifiant : $0 < \alpha_n < 1 < \beta_n$.

✍ Rédaction
On rédige proprement un des deux cas, mais pas l'autre !

♡ Astuce du chef ! ♡
Pour éviter d'avoir à justifier les inégalités strictes par un argument supplémentaire, on met en place le théorème de bijection sur les intervalles ouverts.

(c) Démontrer que pour tout $n \in [\![3;+\infty[\![$, $\beta_n < 2$.

Soit $n \in [\![3;+\infty[\![$. On sait que $\beta_n > 1$, et ainsi, par stricte croissance de f_n sur $]1;+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} \beta_n < 2 &\iff f_n(\beta_n) < f_n(2) \\ &\iff 0 < 2^n - 2n + 1 \\ &\iff 2n - 1 < 2^n \\ &\iff 2n \leq 2^n \end{aligned}$$

Hum... Lançons-nous dans une récurrence pour démontrer que pour tout $n \in [\![3;+\infty[\![$, $2^n \geq 2n$.

- **Initialisation.** Pour $n = 3$, c'est immédiat.
- **Hérédité.** Soit $n \in [\![3;+\infty[\![$. Supposons que $2^n \geq 2n$ et montrons que $2^{n+1} \geq 2(n+1)$.
  Par hypothèse de récurrence, on a :
  $$2^n \geq 2n$$
  D'où :
  $$2^{n+1} \geq 4n$$
  Mais :
  $$4n - 2(n+1) = 2n - 2 = 2(n-1) \underset{n \geq 3}{>} 0$$
  D'où $4n \geq 2(n+1)$, et par transitivité :
  $$2^{n+1} \geq 2(n+1)$$

Par conséquent :

$$\forall n \in [\![3;+\infty[\![, \ 2^n \geq 2n$$

Conclusion : pour tout $n \in [\![3;+\infty[\![$, $\beta_n < 2$.

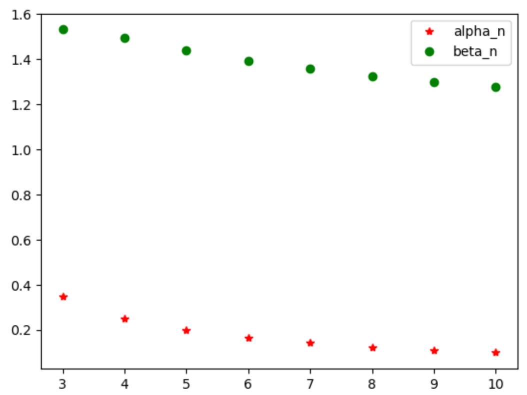
✓ Rigueur !
La phrase "par stricte croissance de f_n^{-1} sur $]1;+\infty[$" n'est pas rigoureuse. En fait, il n'y a pas qu'une bijection réciproque ici, il y en a 2.
La bijection réciproque de la restriction de f_n sur $]0;1[$ et celle de la restriction de f_n sur $]1;+\infty[$... On préfère donc l'argument sur f_n ici (qui est équivalent, et plus simple à énoncer).

4. (a) Recopier et compléter les lignes 4,7,8,10,11,12 de la fonction Python ci-dessous (où `f` est la fonction Python créée à la question 1) afin qu'elle renvoie une valeur approchée à 10^{-5} près de α_n, pour $n \in [\![3;+\infty[\![$.

```
1  def alpha(n):
2      a=0
3      b=1
4      while ......
5          m=(a+b)/2
6          if f(n,m)==0:
7              ......
8          elif ......
9              b=m
10         elif ......
11             ......
12     return ......
```

```python
def alpha(n):
    a=0
    b=1
    while b-a>10**(-5):
        m=(a+b)/2
        if f(n,m)==0:
            a,b=m,m
        elif f(n,m)*f(n,a)<0:
            b=m
        elif f(n,m)*f(n,a)>0:
            a=m
    return (a+b)/2
```

(b) On admet que l'on a écrit une fonction `beta(n)` qui renvoie une valeur approchée de β_n (pour $n \in [\![3;+\infty[\![$) à 10^{-5} près.
Proposer un programme dont l'exécution permettrait d'obtenir le graphique ci-dessous :




```python
import matplotlib.pyplot as plt

N=range(3,11)
A=[alpha(n) for n in N]
B=[beta(n) for n in N]
plt.plot(N,A,'r*',label="alpha_n")
plt.plot(N,B,'go',label="beta_n")
plt.legend()
plt.show()
```

5. (a) Justifier que la série $\sum_{n\geq 3} \beta_n$ est divergente.

D'après la question 3, la suite (β_n) est minorée par 1, elle ne peut pas converger vers 0. Par conséquent, $\sum_{n\geq 3} \beta_n$ diverge grossièrement.

✓ Rigueur !
A ce stade, nous ne savons pas si la suite (β_n) a une limite en $+\infty$... Il ne serait donc pas rigoureux d'écrire $\lim_{n\to+\infty} \beta_n \neq 0$...

(b) Démontrer que la série $\sum_{n\geq 3} \alpha_n$ est divergente. *Indication : on pourra chercher à la comparer à la série harmonique.*

Soit $n \in [\![3;+\infty[\![$. On a : $f_n(\alpha_n) = 0$, ce qui donne :

$$\alpha_n = \frac{\alpha_n^n + 1}{n}$$

Or $\alpha_n \geq 0$, donc $\dfrac{\alpha^n + 1}{n} \geq \dfrac{1}{n}$ et ainsi :

$$\alpha_n \geq \frac{1}{n}$$

Or on sait que $\sum_{n\geq 3} \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente.

Petite remarque
On pourrait aussi vérifier que $f_n\left(\frac{1}{n}\right) > 0$...

Conclusion : par théorème de comparaison sur les séries à termes généraux positifs, la série $\sum_{n\geq 3} \alpha_n$ est divergente.

6. **Étude de la suite (α_n).**

(a) Démontrer que : $\forall n \in [\![3;+\infty[\![, \ \forall x \in]0;1[, \ f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$.

Soient $n \in [\![3;+\infty[\![$ et $x \in]0;1[$.
On a :

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) - f_n(x) &= x^{n+1} - (n+1)x + 1 - (x^n - nx + 1) \\ &= x^{n+1} - x^n - x \end{aligned}$$

Or, $x \in]0;1[$, donc $x^{n+1} \leq x^n$; et donc $x^{n+1} - x^n \leq 0$.
Par conséquent, puisque $x \geq 0$:

$$x^{n+1} - x^n - x \leq 0$$

Conclusion : $\forall n \in [\![3;+\infty[\![,\ \forall x \in]0;1[,\ f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$.

(b) En déduire que la suite (α_n) est décroissante.

Soit $n \in [\![3;+\infty[\![$. Puisque $\alpha_n \in]0;1[$ (question 3), d'après le résultat de la question précédente, on obtient :

$$f_{n+1}(\alpha_{n+1}) \leq f_n(\alpha_n)$$

Or $f_n(\alpha_n) = 0 = f_{n+1}(\alpha_{n+1})$. D'où

$$f_{n+1}(\alpha_n) \leq f_{n+1}(\alpha_{n+1})$$

Et puisque f_{n+1} est strictement décroissante sur $]0;1[$, on en déduit :

$$\alpha_n \geq \alpha_{n+1}$$

Conclusion : la suite (α_n) est décroissante.

> **✓ Rigueur !** Ne pas oublier de mentionner que $\alpha_n \in]0;1[$ pour pouvoir utiliser la question précédente !

(c) Démontrer que pour tout $n \in [\![3;+\infty[\![$, $\alpha_n \leq \dfrac{2}{n}$ puis en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$.

- Soit $n \in [\![3;+\infty[\![$. On sait que $f_n(\alpha_n) = 0$, et, de plus :

$$\begin{array}{rcl} f_n\left(\dfrac{2}{n}\right) & = & \left(\dfrac{2}{n}\right)^n - n\dfrac{2}{n} + 1 \\ & = & \left(\dfrac{2}{n}\right)^n - 1 \\ & < & 0 \end{array} \qquad \text{car } n \geq 3 \text{, donc } \frac{2}{n} < 1$$

Ainsi :

$$f_n\left(\frac{2}{n}\right) < f_n(\alpha_n)$$

Et comme f_n est stricte décroissante sur $]0;1[$ (on a bien $\dfrac{2}{n}$ et α_n dans $]0;1[$).
Par conséquent :

$$\frac{2}{n} > \alpha_n$$

- On a ainsi (puisque (α_n) est minorée par 0) :

$$\forall n \in [\![3;+\infty[\![,\ 0 \leq \alpha_n \leq \frac{2}{b}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n} = 0$. Le théorème d'encadrement permet finalement de conclure...

Conclusion : la suite (α_n) converge vers 0.

> **Petite remarque** On pouvait aussi faire ainsi : $\alpha_n = \dfrac{\alpha_n^n + 1}{n}$.
> Or $\alpha_n \in [0;1]$, donc $\alpha_n^n \in [0;1]$ et donc $\dfrac{\alpha_n^n+1}{n} \leq \dfrac{2}{n}$. Par conséquent : $\alpha_n \leq \dfrac{2}{n}$.
> Ce sont des arguments plus élémentaires, mais j'ai plutôt vu la méthode exposée à gauche dans les copies.

> **➟ Réflexe !** On obtient une majoration et on veut une limite... Théorème d'encadrement ? Relisons l'énoncé à la recherche d'une minoration...

(d) Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\alpha_n = 1$.

Soit $n \in [\![3;+\infty[\![$.

- Du fait que $f_n(\alpha_n) = 0$, on déduit $n\alpha_n = \alpha_n^n + 1$.
- Or : $\alpha_n^n = \exp\left(n\ln(\alpha_n)\right)$ et (α_n) converge vers 0. Ainsi, par composition et opérations :

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n^n = 0$$

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\alpha_n = 1$.

> **☞ Pour info...** Pour n suffisamment grand, on a donc $n\alpha_n \simeq 1$, c'est à dire $\alpha_n \simeq \dfrac{1}{n}$.
> L'an prochain, on dira que $\dfrac{1}{n}$ **est un équivalent de α_n en $+\infty$.**

(e) La série $\sum\limits_{n\geq 3} \dfrac{\alpha_n}{n}$ est-elle convergente ?

On a, d'après la question 7(c), pour tout $n \in [\![3;+\infty[\![$:

$$0 < \frac{\alpha_n}{n} \leq \frac{2}{n^2}$$

Or la série $\sum\limits_{n\geq 3} \dfrac{2}{n^2}$ est une série de Riemann convergente...

Conclusion : par théorème de comparaison sur les séries à termes généraux positifs, la série $\sum\limits_{n\geq 3} \dfrac{\alpha_n}{n}$ est convergente.

7. **Convergence de la suite (β_n).**

(a) Établir : $\forall n \in [\![3;+\infty[\![,\ \beta_n < n^{\frac{1}{(n-1)}}$.

Soit $n \in [\![3;+\infty[\![$. On a :

$$\begin{array}{rcl} f_n\left(n^{\frac{1}{(n-1)}}\right) & = & n^{\frac{n}{n-1}} - n \times n^{\frac{1}{(n-1)}} + 1 \\ & = & n^{\frac{n}{n-1}} - n^{1+\frac{n}{n-1}} + 1 \\ & = & 1 \end{array}$$

Et comme $f_n(\beta_n) = 0$, on obtient :

$$f_n(\beta_n) < f_n\left(n^{\frac{1}{(n-1)}}\right)$$

Et par stricte croissance de f_n sur $]1;+\infty[$, on obtient :

$$\beta_n < n^{\frac{1}{(n-1)}}$$

Conclusion : $\forall n \geq 3,\ \beta_n < n^{\frac{1}{(n-1)}}$.

(b) En déduire que la suite (β_n) converge vers 1.

- D'après ce qui précède et la question 3(b) : $\forall n \in [\![3;+\infty[\![,\ 1 < \beta_n < n^{\frac{1}{(n-1)}}$
- Or, pour tout $n \in [\![3;+\infty[\![$:

$$n^{\frac{1}{(n-1)}} = \exp\left(\frac{1}{n-1}\ln(n)\right)$$

Et, par croissance comparée :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n-1} = 0$$

Ainsi, par composition :

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{(n-1)}} = 1$$

Petit coup de théorème d'encadrement...

Conclusion : la suite (β_n) converge vers 1.

CQFR

Ce qu'il faut retenir des copies : Globalement, les méthodes sur les suites implicites sont acquises et les questions classiques (théorème de bijection, variations des suites, encadrements) ont été bien traitées.
Tout l'exercice doit être cependant retravaillé pour mieux réussir les autres questions.