Devoir surveillé 5

Samedi 12 mars - 4h00

NOM .... Prénom ....

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation. Quelques précisions :

- ***la copie devra présenter une marge ainsi qu'une en-tête suffisantes,***
- ***toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,***
- ***les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),***
- ***les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.***

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.

"*Le monde ne mourra jamais par manque de merveilles,*
mais uniquement par manque d'émerveillement."
Gilbert Keith Chesterton

Exercice 1

1. **Vrai ou faux ?** Pour chacune des affirmations ci-dessous, préciser si elle est vraie ou fausse. *La réponse doit être justifiée.*
   (a) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Si la fonction $|f|$ est continue sur $\mathbb{R}$, alors la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) Soit (u_n) une suite. Si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq \frac{1}{n^2}$, alors $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente.
   (c) Il existe une famille génératrice de cardinal 2 dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (d) Soient $X, Y, Z \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Si les matrices X, Y, Z sont deux à deux non colinéaires, alors la famille (X, Y, Z) est une famille libre de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
2. Établir la convergence et déterminer la somme des séries suivantes :
   (a) $\sum \frac{n^2}{2^n}$
   (b) $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{3}\right)^{2n}$
   (c) $\sum \frac{n}{n!}$
3. Soit (u_n) une suite de réels. Démontrer le résultat suivant :

   la suite (u_n) est convergente si, et seulement si, la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ est convergente

4. On considère la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = S_{2n}$ et $v_n = S_{2n+1}$.
   (a) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
   (b) En déduire la convergence de la série $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{k}$.
5. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_*^+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_*^+,\ f(x) = x^2 \ln(x)$.
   (a) Justifier que la fonction f est prolongeable par continuité sur $[0;+\infty[$. *On note encore f la fonction prolongée.*
   (b) Démontrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.
   (c) Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;+\infty[$.
   (d) f est-elle deux fois dérivable en 0 ?

★★★★★★★

Exercice 2

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A - 2I_3)^2$ puis en déduire que $(A - 2I_3)^3 = 0$.
2. Montrer que l'ensemble $E_2 = \left\{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ AX = 2X\right\}$ est un espace vectoriel dont on donnera une base et la dimension.
3. Posons $U = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Vérifier que $AV \in \text{Vect}(U, V)$.
   (b) Résoudre l'équation $AX = 2X + V$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   (c) Posons $W = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer que la famille (U, V, W) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
4. Considérons $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1}.
   (b) Déterminer la matrice T de sorte que $A = PTP^{-1}$ et vérifier que $T = 2I_3 + N$, où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
5. On considère l'ensemble $\mathcal{C} = \left\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ AM = MA\right\}$.
   (a) Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}$ est un espace vectoriel.
   (b) Soient $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $Q = P^{-1}MP$. Montrer l'équivalence :

$$M \in \mathcal{C} \iff NQ = QN$$

   (c) Démontrer que $\left\{Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ NQ = QN\right\} = \mathrm{Vect}(I_3, N, N^2)$.
   (d) Déterminer alors une base de $\mathcal{C}$ ainsi que sa dimension.
6. On considère l'ensemble $\mathcal{R} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ M^2 + I_3 = A\}$.
   (a) L'ensemble $\mathcal{R}$ est-il un espace vectoriel ?
   (b) Soient $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $Q = P^{-1}MP$. Montrer l'équivalence :
   $$M \in \mathcal{R} \iff Q^2 = I_3 + N$$
   (c) Soit $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Démontrer que si $Q^2 = I_3 + N$, alors nécessairement, Q et N commutent.
   (d) En déduire, à l'aide de la question 5(c), les matrices $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $Q^2 = I_3 + N$.
   (e) Conclure en déterminant l'ensemble $\mathcal{R}$.

★★★★★★★

Exercice 3

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) = (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$.

1. Donner, sous forme d'entiers ou de fractions simplifiées, les valeurs de u_0, u_1 et u_2.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geq 2$.
   (b) Étudier les variations de la suite (u_n).
   (c) Établir que, pour tout réel x strictement supérieur à -1, on a : $\ln(1+x) \leq x$.
   (d) En déduire que, pour tout entier naturel n, $\ln(u_n) \leq 2$.
4. En utilisant les questions précédentes, montrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ, élément de $[2, e^2]$.
5. On se propose dans cette question de déterminer la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.
   (a) Justifier que la suite $\left(\ln(u_n)\right)$ converge et que l'on a : $\ln(\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$.
   (b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$.
   (c) Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) \leq \frac{1}{2^n}$.
   (d) Déduire de la question précédente que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \ell - u_n \leq \ell\left(1 - e^{-\frac{1}{2^n}}\right)$.
   (e) Justifier que, pour tout réel x, on a $1 - e^{-x} \leq x$. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \ell - u_n \leq \frac{\ell}{2^n}$.
   Conclure quant à la nature de la série de terme général $\ell - u_n$.
   (f) i. Écrire une fonction `Python` qui prend un entier naturel n en argument d'entrée et renvoie la valeur de u_n en sortie.
   ii. Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ell - u_n \leq \frac{e^2}{2^n}$.
   iii. Résoudre, dans $\mathbb{N}$, l'inéquation $\frac{e^2}{2^n} < 10^{-5}$. Interpréter le résultat. *Donnée :* $\frac{5\ln(10)+2}{\ln(2)} \simeq 19,5$.

★★★★★★★

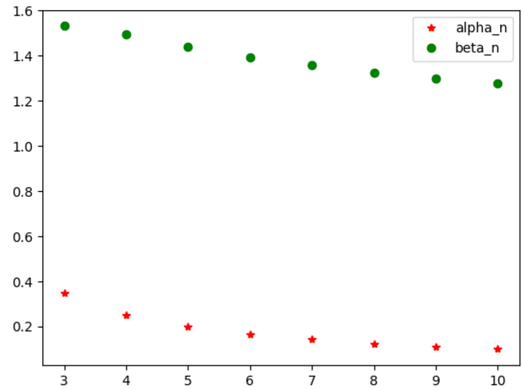
Exercice 4

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on définit la fonction f_n sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $f_n(x) = x^n - nx + 1$.

1. Écrire une fonction `Python` de sorte que l'exécution de la commande `f(n,x)` renvoie la valeur de $f_n(x)$, où $n \in [\![2;+\infty[\![$ et $x \in \mathbb{R}^+$.
2. Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$. Dresser le tableau de variations complet de f_n sur $[0;+\infty[$.
3. (a) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $f_2(x) = 0$.
   (b) Soit $n \in [\![3;+\infty[\![$. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède exactement deux solutions, notées α_n et β_n, vérifiant :
   $$0 < \alpha_n < 1 < \beta_n$$
   (c) Démontrer que pour tout $n \in [\![3;+\infty[\![$, $\beta_n < 2$.
4. (a) Recopier et compléter les lignes 4,7,8,10,11,12 de la fonction `Python` ci-dessous (où `f` est la fonction `Python` créée à la question 1) afin qu'elle renvoie une valeur approchée à 10^{-5} près de α_n, pour $n \in [\![3;+\infty[\![$.

```python
def alpha(n):
    a=0
    b=1
    while ......
        m=(a+b)/2
        if f(n,m)==0:
            ......
        elif ......
            b=m
        elif ......
            ......
    return ......
```

(b) On admet que l'on a écrit une fonction `beta(n)` qui renvoie une valeur approchée de β_n (pour $n \in [\![3;+\infty[\![$) à 10^{-5} près. Proposer un programme dont l'exécution permettrait d'obtenir le graphique ci-dessous :



5. (a) Justifier que la série $\sum\limits_{n\geq 3} \beta_n$ est divergente.

   (b) Démontrer que la série $\sum\limits_{n\geq 3} \alpha_n$ est divergente. *Indication : on pourra chercher à la comparer à la série harmonique.*

6. **Étude de la suite (α_n).**

   (a) Démontrer que : $\forall n \in [\![3;+\infty[\![,\ \forall x \in]0;1[,\ f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$.

   (b) En déduire que la suite (α_n) est décroissante.

   (c) Démontrer que pour tout $n \in [\![3;+\infty[\![$, $\alpha_n \leq \dfrac{2}{n}$ puis en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$.

   (d) Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\alpha_n = 1$.

   (e) La série $\sum\limits_{n\geq 3} \dfrac{\alpha_n}{n}$ est-elle convergente ?

7. **Convergence de la suite (β_n).**

   (a) Établir : $\forall n \in [\![3;+\infty[\![,\ \beta_n < n^{\frac{1}{(n-1)}}$.

   (b) En déduire que la suite (β_n) converge vers 1.