Devoir surveillé 6
Samedi 9 avril - 4h00

NOM .... Prénom ....

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation. Quelques précisions :

- ***la copie devra présenter une marge ainsi qu'une en-tête suffisantes,***
- ***toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,***
- ***les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),***
- ***les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.***

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.

"*J'aime les calculs faux car ils donnent des résultats plus justes.*"
Jean Arp

IMPORTANT !
Les exercices 2,3,4 sont à traiter.
Le candidat choisira de traiter soit "exercice 1 et exercice 5" soit "exercice 1-bis et exercice 5-bis".
Les mélanges "exercice 1-bis et exercice 5" et "exercice 1 et exercice 5-bis" ne sont pas autorisés.
Le candidat mentionnera explicitement en début de copie "Version A" si le choix "exercice 1 et exercice 5" a été fait ; et "Version B" si le choix "exercice 1-bis et exercice 5-bis" a été fait.

Exercice 1

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Déterminer une primitive sur $]0;+\infty[$ de $f : x \longmapsto x - e^{2x} + \frac{1}{x^4} + \frac{5e^x}{e^x+1}$.
   $F : x \longmapsto \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{3x^3} + 5\ln(e^x+1)$ convient.
2. Considérons $f : x \longmapsto xe^{-x^2}$. Déterminer l'unique primitive de f s'annulant en 0.
   Notons F l'unique primitive de f s'annulant en 0 (F existe car f est continue sur $\mathbb{R}$).
   Il existe ainsi une constante C telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{-1}{2}e^{-x^2} + C$.
   Or : $F(0) = 0 \iff \frac{-1}{2} + C = 0 \iff C = \frac{1}{2}$.

   Conclusion : l'unique primitive de f s'annulant en 0 est la fonction $F : x \longmapsto \frac{-1}{2}e^{-x^2} + \frac{1}{2}$.

3. On considère la suite (S_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = S_{2n}$ et $v_n = S_{2n+1}$.
   (a) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
   - **Variations de (u_n).**
     Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :
     $$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= S_{2n+2} - S_{2n} \\ &= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} \\ &= \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} \\ &= \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} \\ &\underset{\text{Réflexe !}}{=} \frac{-1}{(2n+1)(2n+2)} \end{aligned}$$
     Par conséquent, $u_{n+1} - u_n < 0$ et la suite (u_n) est ainsi décroissante.
   - **Variations de (v_n).** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :
     $$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= S_{2n+3} - S_{2n+1} \\ &= \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+3} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} \\ &= \frac{-1}{2n+3} + \frac{1}{2n+2} \\ &\underset{\text{Réflexe !}}{=} \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} \end{aligned}$$
     Par conséquent, $v_{n+1} - v_n > 0$ et la suite (u_n) est ainsi croissante.
   - **Limite de $(v_n - u_n)$.**
     On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
     $$\begin{aligned} v_n - u_n &= S_{2n+1} - S_{2n} \\ &= \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} \\ &= \frac{-1}{2n+1} \end{aligned}$$
     Par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

   Conclusion : les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

   (b) En déduire la convergence de la série $\sum\limits_{k\geq1} \frac{(-1)^k}{k}$.
   Puisque les sites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, elles convergent et ont même limite.
   Ainsi, les suites de termes de rangs pairs et de rangs impairs de la suite (S_n) convergent vers une valeur commune.
   Par propriété de recouvrement, la suite (S_n) converge également vers ce réel.

   Conclusion : la série $\sum\limits_{k\geq1} \frac{(-1)^k}{k}$ est convergente.

4. Considérons $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'application définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $f(M) = JMJ$.

(a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Déjà fait en exercice.

(b) Vérifier que $f \circ f = \mathrm{id}$.
Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} f \circ f(M) &= f(f(M)) \\ &= f(JMJ) \\ &= J^2MJ^2 \quad \text{car } J^2 = I_2 \\ &= M \end{aligned}$$

Conclusion : $f \circ f = \mathrm{id}$.

(c) En déduire que l'endomorphisme f est bijectif et donner $f^{-1}(M)$ pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Puisque $f \circ f = \mathrm{id}$, f est donc bijectif et $f^{-1} = f$, c'est à dire que pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f^{-1}(M) = JMJ$.

(d) Que peut-on en déduire sur le rang de f ainsi que sur $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$?

Conclusion : Puisque f est bijectif, on a directement d'après le cours :
- $\mathrm{rg}(f) = 4$
- $\mathrm{Im}(f) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
- $\ker(f) = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$.

(e) Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
La base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est : $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.
Or :

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;;\; f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \;;\; f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;;\; f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'où :

$$Mat_{bc}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Petite remarque
On retrouve que $\mathrm{rg}(f) = 4$, et que $f \circ f = \mathrm{id}$...

5. Soient E un espace vectoriel et p un endomorphisme de E tel que $p \circ p = p$. On suppose également que $p \neq \mathrm{id}_E$.

(a) Démontrer que p n'est pas bijectif.
Raisonnons par l'absurde et supposons que p est bijectif.
En composant l'égalité $p \circ p = p$ par p^{-1}, on obtient ainsi : $p = \mathrm{id}$, ce qui est absurde.

Conclusion : p n'est pas bijectif.

Important !
Nous avions, à plusieurs reprises, fait ce même raisonnement dans des exercices sur les matrices...

(b) Démontrer que pour tout $y \in E$: $y \in \mathrm{Im}(p) \iff p(y) = y$.
Soit $y \in E$. Raisonnons par double implication.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $y \in \mathrm{Im}(p)$ et montrons que $p(y) = y$.
Puisque $y \in \mathrm{Im}(p)$, il existe $x \in E$ tel que $y = p(x)$.
Dans ce cas :

$$\begin{aligned} p(y) &= p\big(p(x)\big) \\ &= p \circ p(x) \quad p \circ p = p \\ &= p(x) \\ &= y \end{aligned}$$

D'où l'implication : $y \in \mathrm{Im}(p) \Longrightarrow p(y) = y$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $p(y) = y$.
y est ainsi l'image de lui-même ; il appartient donc en particulier à $\mathrm{Im}(p)$.
D'où l'implication $p(y) = y \Longrightarrow y \in \mathrm{Im}(p)$.

Conclusion : pour tout $y \in E$: $y \in \mathrm{Im}(p) \iff p(y) = y$.

(c) Démontrer : $\mathrm{Im}(p) \cap \ker(p) = \{0_E\}$.
Raisonnons pas double inclusion...

$\boxed{\supset}$ Puisque $\mathrm{Im}(p)$ et $\ker(p)$ sont deux sous-espaces vectoriels de E, ils contiennent tous deux 0_E.
Donc $0_E \in \mathrm{Im}(p) \cap \ker(p)$. Autrement dit : $\{0_E\} \subset \mathrm{Im}(p) \cap \ker(p)$.

$\boxed{\subset}$ Soit $y \in \mathrm{Im}(p) \cap \ker(p)$. Montrons que $y = 0_E$.
Puisque $y \in \mathrm{Im}(p)$, il existe $x \in E$ tel que $y = p(x)$.
Et puisque $y \in \ker(p)$, on a $p(y) = 0_E$.
Par conséquent :

$$p\big(p(x)\big) = 0_E$$

Mais $p \circ p = p$, donc $p\big(p(x)\big) = p(x) = y$.
On obtient ainsi :

$$y = 0_E$$

D'où l'inclusion : $\mathrm{Im}(p) \cap \ker(p) \subset \{0_E\}$.

Conclusion : $\mathrm{Im}(p) \cap \ker(p) = \{0_E\}$.

Ce qu'il faut retenir des copies :

- Encore trop peu de copies dans lesquelles la question 3 est bien traitée. C'est un indispensable qui ne contient aucune difficulté majeure ! La définition de "suites adjacentes" n'est pas toujours sue...
  La question 4 faisait l'objet d'un exercice du chapitre 19... C'était donc, normalement, un cadeau.

★★★★★★★

Exercice 1-bis

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n, et p un endomorphisme de E tel que $p \circ p = p$. On suppose également que $p \neq \mathrm{id}_E$. On pose $s = \mathrm{id}_E - 2p$.

1. Démontrer que p n'est pas bijectif.

   Raisonnons par l'absurde et supposons que p est bijectif.
   En composant l'égalité $p \circ p = p$ par p^{-1}, on obtient ainsi : $p = \mathrm{id}$, ce qui est absurde.

   Conclusion : p n'est pas bijectif.

Important !
Nous avions, à plusieurs reprises, fait ce même raisonnement dans des exercices sur les matrices...

2. Démontrer que pour tout $y \in E : y \in \mathrm{Im}(p) \iff p(y) = y$.

   Soit $y \in E$. Raisonnons par double implication.

   $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $y \in \mathrm{Im}(p)$ et montrons que $p(y) = y$.
   Puisque $y \in \mathrm{Im}(p)$, il existe $x \in E$ tel que $y = p(x)$.
   Dans ce cas :

   $$\begin{array}{rcl} p(y) & = & p\big(p(x)\big) \\ & = & p \circ p(x) \\ & = & p(x) \quad {\scriptstyle p \circ p = p} \\ & = & y \end{array}$$

   D'où l'implication : $y \in \mathrm{Im}(p) \Longrightarrow p(y) = y$.

   $\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $p(y) = y$.
   y est ainsi l'image de lui-même ; il appartient donc en particulier à $\mathrm{Im}(p)$.
   D'où l'implication $p(y) = y \Longrightarrow y \in \mathrm{Im}(p)$.

   Conclusion : pour tout $y \in E : y \in \mathrm{Im}(p) \iff p(y) = y$.

3. Démontrer : $\mathrm{Im}(p) \cap \ker(p) = \{0_E\}$.

   Raisonnons pas double inclusion...

   $\boxed{\supset}$ Puisque $\mathrm{Im}(p)$ et $\ker(p)$ sont deux sous-espaces vectoriels de E, ils contiennent tous deux 0_E.
   Donc $0_E \in \mathrm{Im}(p) \cap \ker(p)$. Autrement dit : $\{0_E\} \subset \mathrm{Im}(p) \cap \ker(p)$.

   $\boxed{\subset}$ Soit $y \in \mathrm{Im}(p) \cap \ker(p)$. Montrons que $y = 0_E$.
   Puisque $y \in \mathrm{Im}(p)$, il existe $x \in E$ tel que $y = p(x)$.
   Et puisque $y \in \ker(p)$, on a $p(y) = 0_E$.
   Par conséquent :

   $$p\big(p(x)\big) = 0_E$$

   Mais $p \circ p = p$, donc $p\big(p(x)\big) = p(x) = y$.
   On obtient ainsi :

   $$y = 0_E$$

   D'où l'inclusion : $\mathrm{Im}(p) \cap \ker(p) \subset \{0_E\}$.

   Conclusion : $\mathrm{Im}(p) \cap \ker(p) = \{0_E\}$.

4. Établir :

   $$\forall x \in E,\ \exists!(y,z) \in \mathrm{Im}(p) \times \ker(p)\ /\ x = y + z$$

   Procédons par analyse-synthèse... Soit $x \in E$.

   - **Analyse.**
     Supposons qu'il existe $(y,z) \in \mathrm{Im}(p) \times \ker(p)$ tel que $x = y + z$.
     On a ainsi, p étant linéaire :

     $$p(x) = p(y) + p(z)$$

     Mais $z \in \ker(p)$, donc $p(z) = 0_E$. Et $y \in \mathrm{Im}(p)$, donc il existe $u \in E$ tel que $y = p(u)$.
     D'où :

     $$p(x) = p\big(p(u)\big)$$

     Et comme $p \circ p = p$, on obtient $p(x) = p(u) = y$ On a alors nécessairement :

     $$y = p(x) \ ; \ z = x - p(x)$$

     Ce qui prouve, sous réserve d'existence, l'unicité d'une telle décomposition.
   - **Synthèse.**
     Posons $y = p(x)$ et $z = x - p(x)$. Vérifions les trois points souhaités :
     - Par définition, on a bien $y \in \mathrm{Im}(p)$.
     - De plus, par linéarité de p :

       $$\begin{array}{rcl} p(z) & = & p\big(p(x)\big) - p(x) \quad {\scriptstyle p \circ p = p} \\ & = & p(x) - p(x) \\ & = & 0_E \end{array}$$

       Ainsi, $z \in \ker(p)$.
     - Et sans difficulté : $x = y + z$.

     Ce qui prouve l'existence d'une telle décomposition.

   Conclusion : $\forall x \in E,\ \exists!(y,z) \in \mathrm{Im}(p) \times \ker(p)\ /\ x = y + z$.

Petite remarque
Le raisonnement par analyse synthèse n'est pas nécessaire ici...
On peut déjà commencer par remarquer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x = p(x) + x - p(x)$... avec $p(x) \in \mathrm{Im}(p)$ et $x - p(x) \in \ker(p)$...
Ensuite, on montre l'unicité en supposons qu'il existe deux décompositions puis on utilise q3...

5. Justifier que $\mathrm{Im}(p)$ et $\ker(p)$ sont des espaces vectoriels de dimension finie.

   $\mathrm{Im}(p)$ et $\ker(p)$ sont tous deux des sous-espaces vectoriels de E, qui est de dimension finie.

   Conclusion : $\mathrm{Im}(p)$ et $\ker(p)$ sont des espaces vectoriels de dimension finie.

6. Notons $r=\operatorname{rg}(p)$ et $k=\dim(\ker(p))$. Considérons $\mathcal{B}_1=(e_i)_{i\in[\![1;r]\!]}$ une base de $\operatorname{Im}(p)$ et $\mathcal{B}_2=(f_i)_{i\in[\![1;k]\!]}$ une base de $\ker(p)$.

(a) Démontrer que la famille obtenue en concaténant les vecteurs de $\mathcal{B}_1$ et ceux de $\mathcal{B}_2$ est une base de E, notée $\mathcal{B}$.

Proposons trois méthodes pour cette question, et notons déjà $\mathcal{B}$ la famille obtenue en en concaténant les vecteurs de $\mathcal{B}_1$ et ceux de $\mathcal{B}_2$:

- **Première méthode (dans la logique des questions précédentes).**
Soit $x\in E$. Notons déjà $\mathcal{B}=(g_1,g_2,\dots,g_{r+k})$ la famille obtenue en concaténant les vecteurs des bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.
Autrement dit : $g_1=e_1,\dots,g_r=e_r$; $g_{r+1}=f_1,\dots,g_{r+k}=e_k$.
D'après la question précédente, il existe un unique couple $(y,z)\in\operatorname{Im}(p)\times\ker(p)$ tel que $x=y+z$.
  - Mais $\mathcal{B}_1$ est une base de $\operatorname{Im}(p)$. Par conséquent, il existe des uniques $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_r\in\mathbb{R}$ tels que $y=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i e_i$.
  - Et $\mathcal{B}_2$ est une base de $\ker(p)$. Par conséquent, il existe des uniques $\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_r\in\mathbb{R}$ tels que $z=\sum_{i=1}^{r}\mu_i f_i$.

Par conséquent :
$$\exists!x_1,x_2,\dots,x_{r+k}\in\mathbb{R}\ /\ x=\sum_{i=1}^{r+k}x_ig_i$$
où
$$x_1=\lambda_1,\ x_2=\lambda_2,\ \dots,\ x_r=\lambda_r\ ;\ x_{r+1}=\mu_1,\ x_{r+2}=\mu_2,\ \dots,\ x_{r+k}=\mu_k$$

Conclusion : $\mathcal{B}$ est une base de E.

- **Deuxième méthode.**
  - D'après le théorème du rang, on a : $\dim(E)=\dim\big(\ker(p)\big)+\operatorname{rg}(p)$. Ainsi : $n=k+r$.
Or $\operatorname{Card}(B)=k+r$. Donc pour montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E, il suffit de montrer qu'elle est génératrice de E.
  - Ceci découle immédiatement de la question 4 et du fait que $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont des bases de $\operatorname{Im}(p)$ et $\ker(p)$, et sont donc en particulier génératrices de ces espaces.

Conclusion : $\mathcal{B}$ est une base de E.

- **Troisième méthode (comme d'hab !).**
  - D'après le théorème du rang, on a : $\dim(E)=\dim\big(\ker(p)\big)+\operatorname{rg}(p)$. Ainsi : $n=k+r$.
Or $\operatorname{Card}(B)=k+r$. Donc pour montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E, il suffit de montrer qu'elle est libre.
  - Soient $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$. Supposons que $\lambda_1e_1+\dots+\lambda_re_r+\lambda_{r+1}f_1+\dots+\lambda_nf_k=0_E$ (notons $(\star)$ cette équation)..
En appliquant p, qui est linéaire, et puisque pour tout $i\in[\![1;k]\!]$, $f_i\in\ker(p)$, on obtient :
$$\lambda_1p(e_1)+\dots+\lambda_rp(e_r)=0_E$$
Mais pour tout $i\in[\![1;r]\!]$, $e_i\in\operatorname{Im}(p)$, donc d'après la question 2, $p(e_i)=e_i$. On obtient ainsi :
$$\lambda_1e_1+\dots+\lambda_re_r=0_E$$
Mais la famille $(e_1,\dots,e_r)$ est une base de $\operatorname{Im}(p)$, elle est donc en particulier libre. D'où :
$$\lambda_1=\dots=\lambda_r=0$$
Par conséquent, l'équation $(\star)$ devient :
$$\lambda_{r+1}f_1+\dots+\lambda_nf_k=0_E$$
Mais $(f_1,\dots,f_k)$ est une base de $\ker(p)$, elle est donc en particulier libre. D'où :
$$\lambda_{r+1}=\dots=\lambda_n=0$$
Par conséquent :
$$\forall i\in[\![1;n]\!],\ \lambda_i=0$$
La famille $\mathcal{B}$ est ainsi libre.

Conclusion : $\mathcal{B}$ est une base de E.

(b) En déduire une relation entre n, r et k.

Puisque $\mathcal{B}$ est une base de E, on a $\operatorname{Card}(\mathcal{B})=\dim(E)$. Or $\operatorname{Card}(\mathcal{B})=r+k$ et $\dim(E)=n$.

Conclusion : $r+k=n$.

Petite remarque
On retrouve le théorème du rang...

(c) Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$ puis en déduire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s)$.

Soit $i\in[\![1;r]\!]$. Puisque $e_i\in\operatorname{Im}(p)$, d'après la question 2 : $p(e_i)=e_i$.
Soit $i\in[\![1;k]\!]$. Puisque $f_i\in\ker(p)$: $p(f_i)=0_E$.
Par conséquent :
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p)=\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r,k}\\ \hline 0_{k,r} & 0_k\end{array}\right)$$

Vocabulaire
Ceci est une matrice définie par blocs. C'est bien pratique...

Et puisque $s=\mathrm{id}_E-2p$, on a :
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s)=I_n-2\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p)=\left(\begin{array}{c|c} -I_r & 0_{r,k}\\ \hline 0_{k,r} & I_k\end{array}\right)$$

7. Déterminer $s \circ s$ puis en déduire que s est un isomorphisme et donner s^{-1}.

On a :

$$\begin{array}{rcll} s \circ s & = & (\mathrm{id}_E - 2p) \circ (\mathrm{id}_E - 2p) & \\ & = & \mathrm{id}_E - 4p + 4p \circ p & \text{id}_E \text{ et } p \text{ commutent} \\ & = & \mathrm{id}_E & p \circ p = p \end{array}$$

Conclusion : s est un automorphisme de E et $s^{-1} = s$.

8. Préciser alors $\mathrm{rg}(s)$, $\ker(s)$ et $\mathrm{Im}(s)$.

Immédiat d'après les propriétés du cours...

Conclusion :
- $\mathrm{rg}(s) = \dim(E) = n$
- $\mathrm{Im}(s) = E$
- $\ker(s) = \{0_E\}$

9. Montrer :

$$\ker(s - \mathrm{id}_E) = \ker(p) \quad ; \quad \ker(s + \mathrm{id}_E) = \mathrm{Im}(p)$$

Les double-inclusions sont inutiles ici...

- $$\begin{array}{rcl} \ker(s - \mathrm{id}_E) & = & \ker(\mathrm{id}_E - 2p - \mathrm{id}_E) \\ & = & \ker(-2p) \\ & = & \ker(p) \end{array}$$

- Soit $x \in E$. On a :

$$\begin{array}{rcll} x \in \ker(s + \mathrm{id}_E) & \Longleftrightarrow & (s + \mathrm{id}_E)(x) = 0 & \\ & \Longleftrightarrow & s(x) + x = 0_E & \\ & \Longleftrightarrow & x - 2p(x) + x = 0_E & s = \mathrm{id}_E - 2p \\ & \Longleftrightarrow & x - p(x) = 0_E & \\ & \Longleftrightarrow & p(x) = x & \\ & \Longleftrightarrow & x \in \mathrm{Im}(p) & \text{question 2} \end{array}$$

D'où :

$$\ker(s + \mathrm{id}_E) = \mathrm{Im}(p)$$

Conclusion : $\ker(s - \mathrm{id}_E) = \ker(p) \quad ; \quad \ker(s + \mathrm{id}_E) = \mathrm{Im}(p)$.

10. Expliquer comment retrouver alors la matrice de s dans la base $\mathcal{B}$ obtenue à la question 6(c).

On procède comme habituellement :

Soit $i \in [\![1;r]\!]$. Puisque $e_i \in \mathrm{Im}(p)$, d'après la question précédente, $e_i \in \ker(s + \mathrm{id}_E)$, donc : $s(e_i) = -e_i$.

Soit $i \in [\![1;k]\!]$. Puisque $f_i \in \ker(p)$, d'après la question précédente, $f_i \in \ker(s - \mathrm{id}_E)$, donc $s(f_i) = f_i$.

Par conséquent :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \left(\begin{array}{c|c} -I_r & 0_{r,k} \\ \hline 0_{k,r} & I_k \end{array}\right)$$

Petite remarque

On aurait déjà pu faire ainsi à la question 6(c) ! Mais dans la question 6(c), il était demandé de déduire la matrice de s à partir de celle de p...

CQFR

Ce qu'il faut retenir des copies : Les questions 2 et 3 ont été bien abordées. Pour le reste, c'est plus aléatoire... Surprenant que la question 9 ait été peu traitée : elle est pourtant dans le même esprit !

★★★★★★★

Exercice 2

On considère l'application $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y+z \\ -2x+3y+2z \\ x-y \end{pmatrix}$, et on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

1. Justifier que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et donner sa matrice canoniquement associée, notée A.
   - On remarque déjà que f est une application de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   - De plus, en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, on a : $f(X) = AX$.

   Par conséquent, f est une application linéaire.

   Conclusion : f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et A est sa matrice canoniquement associée.

2. Déterminer les réels λ de sorte que $A - \lambda I_3$ ne soit pas inversible.
   Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La matrice $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible si, et seulement si, $\mathrm{rg}(A - \lambda I_3) \neq 3$.
   Or :

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(A-\lambda I_3) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ -2 & 3-\lambda & 2 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} \\
&\underset{L_1 \longleftrightarrow L_3}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -\lambda \\ -2 & 3-\lambda & 2 \\ -\lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&\underset{\substack{L_2 \longleftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 + \lambda L_1}}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 2-2\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 \end{pmatrix} \\
&\underset{L_3 \longleftarrow L_3 - L_2}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 2-2\lambda \\ 0 & 0 & -1+2\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 2-2\lambda \\ 0 & 0 & -(\lambda-1)^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

   Conclusion : la matrice $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible si, et seulement si, $\lambda = 1$.

3. (a) Calculer $(A - I_3)^2$.
   Sans difficulté, on trouve $(A - I_3)^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

   (b) En déduire que A est inversible et écrire A^{-1} comme combinaison linéaire de I_3 et A.
   On en déduit (identité remarquable, puisque A et I_3 commutent) : $A^2 - 2A + I_3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.
   D'où :
$$A(-A + 2I_3) = I_3$$

   Conclusion : A est inversible et $A^{-1} = -A + 2I_3$.

   (c) Que peut-on en déduire sur l'endomorphisme f ?

   Conclusion : on en déduit que f est un automorphisme et que $f^{-1} = -f + 2\mathrm{id}$.

4. On pose $N = A - I_3$.
   (a) Exprimer, pour tout entier naturel n, la matrice A^n comme combinaison linéaire de I_3 et A.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
A^n &= (N + I_3)^n && \text{N et } I_3 \text{ commutent} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k I_3^{n-k} && \forall k \in [\![0;n]\!],\ I_3^{n-k} = I_3 \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k && N^2 = 0, \text{ donc } \forall k \geq 2,\ N^k = 0 \\
&= \binom{n}{0} I_3 + \binom{n}{1} N && \text{seulement si } n \geq 1 \\
&= I_3 + nN \\
&= I_3 + n(A - I_3) \\
&= (1-n)I_3 + nA
\end{aligned}$$

   Et cette relation est encore valable pour $n = 0$.

   Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = (1-n)I_3 + nA$.

   ✘ Attention ! Chaque argument rapporte un point sur cette question ! Et on lit bien l'énoncé, qui demande d'exprimer A^n en fonction de I_3 et A, pas en fonction de I_3 et N...

   (b) Vérifier que l'expression précédente est aussi valable pour $n = -1$.
   On a :
   - d'après la question 3(b) : $A^{-1} = 2I_3 - A$
   - d'autre part, $(1-(-1))I_3 + (-1)A = 2I_3 - A$

   Conclusion : la relation établie à la question précédente est encore valable si $n = -1$.

5. On pose $u_1 = (f - \mathrm{id})(e_1)$ et $u_2 = e_1 + e_3$.

(a) Montrer que $\text{rg}(f-\text{id})=1$.
On a :

$$\begin{aligned}\text{rg}(f-\text{id}) &= \text{rg}(A-I_3)\\ &= \text{rg}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ -2 & 2 & 2\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix} & \text{les 3 colonnes sont colinéaires et non nulles}\\ &= 1\end{aligned}$$

Important ! Il est bon de mentionner que les colonnes sont non nulles, sinon le rang serait égal à 0.

(b) Justifier que (u_1,u_2) est une base de $\ker(f-\text{id})$.
D'après le théorème du rang :

$$\dim\left(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\right)=\dim\left(\ker(f-\text{id})\right)+\text{rg}(f-\text{id})$$

D'après la question qui précède, on obtient :

$$\dim\left(\ker(f-\text{id})\right)=2$$

De plus :

- $(f-\text{id})(u_1)=(f-\text{id})\circ(f-\text{id})(e_1)=0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$, car $(A-I_3)^2=0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$, donc $(f-\text{id})\circ(f-\text{id})=0_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))}$. Ainsi, $u_1\in\ker(f-\text{id})$.
- $u_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et on vérifie sans mal que $(f-\text{id})(u_2)=0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$, donc $u_2\in\ker(f-\text{id})$.

Par conséquent, (u_1,u_2) est une famille de cardinal 2 de $\ker(f-\text{id})$. De plus, elle est libre car $u_1=\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$ n'est pas colinéaire à u_2.

Conclusion : (u_1,u_2) est une base de $\ker(f-\text{id})$.

Petite remarque On pouvait aussi déterminer $\ker(f-\text{id})$ en résolvant un système bien entendu...

6. (a) Montrer que la famille (u_1,u_2,e_1) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
Puisque $\text{Card}(u_1,u_2,e_1)=3=\dim\left(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\right)$, il suffit de montrer que la famille (u_1,u_2,e_1) est libre pour qu'elle soit une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
Méthode habituelle, on trouve qu'elle est libre.

Conclusion : la famille (u_1,u_2,e_1) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Petite remarque On peut aussi partir de $au_1+bu_2+ce_1=0$, puis appliquer $f-\text{id}$...

(b) Déterminer la matrice T de f dans cette même base.

- Puisque $u_1\in\ker(f-\text{id})$, on a : $f(u_1)=u_1$
- De même, $f(u_2)=u_2$
- Également, $u_1=(f-\text{id})(e_1)$, donc $u_1=f(e_1)-e_1$. Autrement dit : $f(e_1)=u_1+e_1$.

Conclusion : $\text{Mat}_{(u_1,u_2,e_1)}(f)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

7. On pose $P=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ -2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$. Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1}.

On admet la relation : $A=PTP^{-1}$.

Comme d'habitude... On trouve $P^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -1/2 & 0\\ 0 & 1/2 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$.

8. On note $\left(E_{1,1},E_{1,2},E_{1,3},E_{2,1},E_{2,2},E_{2,3},E_{3,1},E_{3,2},E_{3,3}\right)$ la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$; et on rappelle que pour tout $(i,j)\in[\![1;3]\!]^2$, la matrice $E_{i,j}$ n'a que des coefficients nuls sauf celui situé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne qui vaut 1.
On note $\mathcal{C}_A=\left\{M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})\ /\ AM=MA\right\}$ et $\mathcal{C}_T=\left\{M'\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})\ /\ TM'=M'T\right\}$.

(a) Montrer que $\mathcal{C}_A$ est un espace vectoriel.

- Par définition, $\mathcal{C}_A\subset\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel ;
- La matrice nulle appartient à $\mathcal{C}_A$ (car $A\times 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}=0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}\times A$), donc $\mathcal{C}_A$ est non vide.
- Soient $a,b\in\mathbb{R}$ et $M,M'\in\mathcal{C}_A$. Montrons que $aM+bM'\in\mathcal{C}_A$.
On sait déjà que $aM+bM'\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et de plus :

$$\begin{aligned}A(aM+bM') &= aAM+bAM'\\ &= aMA+bM'A & M,M'\in\mathcal{C}\\ &= (aM+bM')A\end{aligned}$$

Par conséquent : $aM+bM'\in\mathcal{C}_A$.

Conclusion : $\mathcal{C}_A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, donc un espace vectoriel.

(b) Soient $M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $M'=P^{-1}MP$. Établir : $M\in\mathcal{C}_A \iff M'\in\mathcal{C}_T$.
On a :

$$\begin{aligned}M\in\mathcal{C}_A &\iff AM=MA\\ &\iff PTP^{-1}PM'P^{-1}=PM'P^{-1}PTP^{-1} & A=PTP^{-1}\text{ et }M=PM'P^{-1}\\ &\iff PTM'P^{-1}=PM'TP^{-1} & PP^{-1}=P^{-1}P=I_3\\ &\iff TM'=M'T\\ &\iff M'\in\mathcal{C}_T\end{aligned}$$

Conclusion : $M\in\mathcal{C}_A \iff M'\in\mathcal{C}_T$.

(c) Montrer que $\mathcal{C}_T = \text{Vect}(E_{1,1}+E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})$, puis donner $\dim(\mathcal{C}_T)$.

Soit $M' = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On a :

$$\begin{aligned} M' \in \mathcal{C}_T & \iff TM' = M'T \\ & \iff \ldots \\ & \iff M' = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où :

$$\mathcal{C}_T = \left\{ a(E_{1,1}+E_{3,3}) + bE_{2,1} + cE_{3,1} + eE_{2,2} + fE_{2,3} \ / \ a,b,c,e,f \in \mathbb{R} \right\}$$

Conclusion : $\mathcal{C}_T = \text{Vect}(E_{1,1}+E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})$.

Testons la liberté de la famille $\left(E_{1,1}+E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3}\right)$. Soient $a,b,c,d,e \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} a(E_{1,1}+E_{3,3}) + bE_{2,1} + cE_{3,1} + dE_{2,2} + eE_{2,3} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} & \iff \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & \iff a = b = c = d = e = 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, la famille $\left(E_{1,1}+E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3}\right)$ est génératrice et libre de $\mathcal{C}_T$; c'est donc une base de $\mathcal{C}_T$.

Conclusion : $\dim(\mathcal{C}_T) = 5$.

(d) En déduire une base de $\mathcal{C}_A$. On exprimera chacune des matrices de cette base à l'aide des matrices P, P^{-1} et de certaines $E_{i,j}$.

On sait que :

- la famille $\left(E_{1,1}+E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3}\right)$ est une base de $\mathcal{C}_T$
- pour tout $M' \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$: $M' \in \mathcal{C}_T \iff PM'P^{-1} \in \mathcal{C}_A$.

Par conséquent, la famille $\left(P(E_{1,1}+E_{3,3})P^{-1}, PE_{1,2}P^{-1}, PE_{1,3}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{2,3}P^{-1}\right)$ est une base de $\mathcal{C}_A$.

Ce qu'il faut retenir des copies : Exercice qui méritait d'y passer du temps. Les techniques et méthodes sont classiques, il n'y avait pas de difficulté calculatoire, et il était bien rémunéré.
La question 4(a) sur le binôme de Newton doit être reprise pour tous ! Il n'est pas normal d'avoir si peu de points sur cette question ; c'est du point quasi-donné...

★★★★★★★

Exercice 3

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \longmapsto (1-x)^n e^{-2x}$ ainsi que l'intégrale $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.

Le but de l'exercice est de montrer l'existence de trois réels a, b, c tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon(n)$$

où $\varepsilon(n)$ est une expression dépendant de n telle que $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0$.

On rappelle la formule d'intégration par parties, valable si u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est bien défini et donner son signe.
   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   - La fonction f_n est continue sur $[0;1]$, donc l'intégrale $\int_0^1 f_n(x)dx$ est bien définie.
   - On a : $\forall x \in [0;1],\ f_n(x) \geq 0$.
     D'où, par croissance de l'intégrale (les bornes sont dans l'ordre croissant) : $I_n \geq 0$.

   Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est bien défini et $I_n \geq 0$.

2. Calculer I_0.

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^1 f_0(x)dx \\ &= \int_0^1 e^{-2x}dx \\ &= \left[\frac{1}{-2}e^{-2x}\right]_0^1 \\ &= \frac{-e^{-2}}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1-e^{-2}}{2} \end{aligned}$$

➠ **Réflexe !**
On vérifie la cohérence du signe...

3. Étudier les variations de la suite (I_n).
   Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 f_{n+1}(x) - f_n(x)dx \\ &= \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x}(1-x-1)dx \\ &= \int_0^1 -x(1-x)^n e^{-2x}dx \end{aligned}$$

   Or, pour tout $x \in [0;1]$:

$$-x \leq 0 \ ; \ (1-x)^n \geq 0 \ ; \ e^{-2x} > 0$$

   D'où, pas croissance de l'intégrale (les bornes étant dans l'ordre croissant), on obtient :

$$I_{n+1} - I_n \leq 0$$

   Conclusion : la suite (I_n) est décroissante.

4. Que peut-on en déduire ?
   D'après les questions précédentes, (I_n) est décroissante et minorée par 0.

   Conclusion : d'après le théorème de convergence monotone, la suite (I_n) converge.

5. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   On sait que pour tout $x \in [0;1]$:

$$e^{-2x} \leq 1$$

   D'où, pour tout $x \in [0;1]$, en multipliant par $(1-x)^n$ qui est positif :

$$f_n(x) \leq (1-x)^n$$

   Et par croissance de l'intégrale (les bornes étant dans l'ordre croissant) :

$$I_n \leq \int_0^1 (1-x)^n dx$$

   Or :

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-x)^n dx &= \left[\frac{-1}{n+1}(1-x)^{n+1}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

   Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

6. Déterminer la limite de la suite (I_n).

On a :

- d'après les questions 1 et 5 : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \mathrm{I}_n \leq \dfrac{1}{n+1}$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$

Conclusion : par théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = 0$.

7. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2\mathrm{I}_{n+1} = 1-(n+1)\mathrm{I}_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a : $\mathrm{I}_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 (1-x)^{n+1} e^{-2x}\,dx$.

Posons : $\left| \begin{array}{l} u : x \longmapsto (1-x)^{n+1} \\ v : x \longmapsto \dfrac{-1}{2} e^{-2x} \end{array} \right.$. Les fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$ et pour tout $x \in [0;1]$: $\left| \begin{array}{l} u'(x) = -(n+1)(1-x)^n \\ v'(x) = e^{-2x} \end{array} \right.$.

Par intégration par parties, on a alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_{n+1} &= \left[\frac{-1}{2}(1-x)^{n+1} e^{-2x}\right]_0^1 - \int_0^1 -(n+1)(1-x)^n \frac{-1}{2} e^{-2x}\,dx \\ &= \frac{1}{2} - \frac{n+1}{2}\mathrm{I}_n \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2\mathrm{I}_{n+1} = 1-(n+1)\mathrm{I}_n$.

8. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} n\mathrm{I}_n$.

D'après la question précédente, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad 2\mathrm{I}_{n+1} = 1 - n\mathrm{I}_n - \mathrm{I}_n$$

Autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad n\mathrm{I}_n = 1 - 2\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n$$

Or on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{I}_{n+1} = 0$ également.

Et ainsi, en passant à la limite dans l'égalité ci-dessus, on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\mathrm{I}_n = 1$.

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\mathrm{I}_n = 1$.

9. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \big(n(n\mathrm{I}_n - 1)\big)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On reprend ce qui a été obtenu dans la question précédente :

$$n\mathrm{I}_n = 1 - 2\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n$$

Et donc :

$$n\mathrm{I}_n - 1 = -2\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n$$

Ce qui donne :

$$n(n\mathrm{I}_n - 1) = -2n\mathrm{I}_{n+1} - n\mathrm{I}_n$$

Or :

$$\begin{aligned} -2n\mathrm{I}_{n+1} &= -2(n+1-1)\mathrm{I}_{n+1} \\ &= -2(n+1)\mathrm{I}_{n+1} + 2\mathrm{I}_{n+1} \end{aligned}$$

D'où :

$$n(n\mathrm{I}_n - 1) = -2(n+1)\mathrm{I}_{n+1} + 2\mathrm{I}_{n+1} - n\mathrm{I}_n$$

On passe ensuite à la limite, en utilisant le résultat de la question précédente !

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} n(n\mathrm{I}_n - 1) = -3$.

✘ Attention !

$\lim\limits_{N\to+\infty} N\mathrm{I}_N = 1$; mais *a priori*, $\lim\limits_{N\to+\infty} N\mathrm{I}_{N+1} \neq \lim\limits_{N\to+\infty} N\mathrm{I}_N$...

Attention quand on compose des limites !

Dans le même genre, on sait que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{x} \neq 1$ (même si $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$)...

10. Donner alors les valeurs de a, b, c.

D'après la question précédente, il existe donc une fonction e telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} e(n) = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(n\mathrm{I}_n - 1) = -3 + e(n)$.

Ce qui donne, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathrm{I}_n = \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{e(n)}{n^2}$$

On reconnaît alors la forme donnée dans l'énoncé, avec $\varepsilon(n) = e(n)$.

Conclusion : $a = 0$, $b = 1$ et $c = -3$.

Petite remarque

Pour davantage de détails, se référer à DS5-Exercice2-Question5(d).

CQFR

Ce qu'il faut retenir des copies : De bonnes choses sur le début de l'exercice ; les questions 5 et 7 doivent être reprises, maintenant que vous avez davantage d'entraînement sur ces techniques.

★★★★★★★

Exercice 4

On dispose de trois pièces indiscernables au toucher :

- une pièce numérotée 0 donnant PILE avec une probabilité $\frac{1}{2}$ et FACE avec une probabilité $\frac{1}{2}$
- une pièce numérotée 1 donnant PILE à coup sûr
- une pièce numérotée 2 donnant FACE à coup sûr

L'expérience consiste à choisir de façon équiprobable l'une de ces trois pièces puis la lancer indéfiniment.
On note $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé associé à cette expérience.
Pour $i \in \{0;1;2\}$, on note A_i l'évènement "on a choisi la pièce numérotée i". Ainsi, (A_0, A_1, A_2) est un système complet d'évènements.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note P_k l'évènement : "on obtient PILE au lancer numéro k" et $F_k = \overline{P_k}$.
On considère les deux variables aléatoires :

- X donnant le rang d'apparition du premier PILE
- Y donnant le rang d'apparition du premier FACE

On convient de donner à X la valeur 0 si l'on obtient jamais PILE et de donner à Y la valeur 0 si l'on obtient jamais FACE.

1. **Loi de X.**

(a) Donner $X(\Omega)$.

$X(\Omega) = \mathbb{N}$

(b) Déterminer $\mathbb{P}([X=1])$.

D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements (A_0, A_1, A_2), on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X=1]) &= \mathbb{P}(A_0 \cap [X=1]) + \mathbb{P}(A_1 \cap [X=1]) + \mathbb{P}(A_2 \cap [X=2]) \\
&= \mathbb{P}(A_0) \times \mathbb{P}_{A_0}([X=1]) + \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}([X=1]) + \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_2}([X=1]) \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 0 \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{P}([X=1]) = \frac{1}{2}$.

(c) Montrer que : $\forall n \in [\![2;+\infty[\![,\ \mathbb{P}([X=n]) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$. D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements (A_0, A_1, A_2), on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X=n]) &= \mathbb{P}(A_0 \cap [X=n]) + \mathbb{P}(A_1 \cap [X=n]) + \mathbb{P}(A_2 \cap [X=n]) \\
&= \mathbb{P}(A_0) \times \mathbb{P}_{A_0}([X=n]) + \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}([X=n]) + \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_2}([X=n])
\end{aligned}$$

Or :

- la pièce 1 donne PILE dès le premier lancer et $n \geq 2$, d'où $\mathbb{P}_{A_1}([X=n]) = 0$
- la pièce 2 ne donne jamais PILE, donc $\mathbb{P}_{A_2}([X=n]) = 0$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X=n]) &= \frac{1}{3} \times \mathbb{P}_{A_0}(F_1 \cap \ldots \cap F_{n-1} \cap P_n) + \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 0 \\
&= \frac{1}{3} \times \mathbb{P}_{A_0}(F_1) \times \ldots \mathbb{P}_{A_0}(F_{n-1}) \times \mathbb{P}_{A_0}(P_n) && \text{par indépendance des lancers une fois } A_0 \text{ réalisé} \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n
\end{aligned}$$

> **★ Subtile... ★**
> Les évènements $P_1, P_2, \ldots$ sont indépendants pour $\mathbb{P}_{A_0}$; mais pas pour $\mathbb{P}$. Il suffirait pour cela de vérifier que $\mathbb{P}(P_1 \cap P_2) \neq \mathbb{P}(P_1) \times \mathbb{P}(P_2)$.

Conclusion : $\forall n \in [\![2;+\infty[\![,\ \mathbb{P}([X=n]) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

(d) En déduire la valeur de $\mathbb{P}([X=0])$.

Puisque $\big([X=n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n) = 1$.

> **✘ Attention !**
> L'expression $\mathbb{P}([X=n]) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ n'est pas valable quand $n=1$!!

Or :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X=n]) = 1 &\iff \mathbb{P}([X=0]) + \mathbb{P}([X=1]) + \sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}([X=n]) = 1 \\
&\iff \mathbb{P}([X=0]) + \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 \\
&\iff \mathbb{P}([X=0]) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n && \text{changement d'indice } i = n-2 \\
&\iff \mathbb{P}([X=0]) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\frac{1}{2^2}\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i \\
&\iff \mathbb{P}([X=0]) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\frac{1}{2^2} \times 2 \\
&\iff \mathbb{P}([X=0]) = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{P}([X=0]) = \frac{1}{3}$.

2. Montrer que X admet une espérance et la calculer. Interpréter le résultat obtenu.

- Pour tout $n \in [\![2;+\infty[\![$:

$$\begin{array}{rcl} |n\mathbb{P}([X=n])| & = & n\mathbb{P}([X=n]) \\ & = & \frac{1}{3}n\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ & = & \frac{1}{3}\frac{1}{2}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{array}$$

Or, la série $\sum_{n\geq 2} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ est une série géométrique dérivée convergente (car $\frac{1}{2} \in]-1;1[$). Ainsi, $\sum_{n\geq 2} |n\mathbb{P}(X=n)|$ est convergente.
Conclusion : X admet une espérance.

- Et :

$$\begin{array}{rcl} E(X) & = & \sum_{n=0}^{+\infty} n\mathbb{P}([X=n]) \\ & = & 0\times\mathbb{P}([X=0]) + 1\times\mathbb{P}([X=1]) + \sum_{n=2}^{+\infty} n\mathbb{P}([X=n]) \\ & = & \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ & = & \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 0 - 1\right) \\ & = & \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} - 1\right) \\ & = & 1 \end{array}$$

Conclusion : X possède une espérance et $E(X) = 1$.
Interprétation : en moyenne, sur un grand nombre de répétitions de l'expérience, le joueur obtiendra son premier PILE au premier lancer.

✘ ATTENTION !
L'expression $\mathbb{P}([X=n]) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ n'est pas valable quand $n = 1$... Puis, de toute façon, pour étudier la nature d'une série, inutile de regarder les premiers termes...

3. Montrer que X admet une variance et la calculer.
On justifie que X possède un moment d'ordre 2 (c'est à dire que $E(X^2)$ existe) et on le calcule. Puis on utilise la formule de Koenig-Huygens...

Conclusion : X possède une variance et $V(X) = \frac{4}{3}$.

4. Justifier que Y suit la même loi que X.
Les rôles PILE et FACE sont symétriques ici (car équiprobabilité du choix de la pièce initiale, puis équiprobabilité sur la pièce 0). Donc il est équivalent de compter le rang du premier PILE ou le rang du premier FACE...

Conclusion : X et Y suivent la même loi.

5. (a) Montrer que pour tout $j \in [\![2;+\infty[\![$, $\mathbb{P}\big([X=1]\cap[Y=j]\big) = \mathbb{P}([Y=j])$.
Soit $j \in [\![2;+\infty[\![$.
Puisque $j \geq 2$, c'est la pièce 0 qui a été choisie... Ainsi :

$$[Y=j] = A_0 \cap P_1 \cap .... \cap P_{j-1} \cap F_j$$

Or $[X=1] = P_1$.
D'où :

$$\begin{array}{rcl} [X=1]\cap[Y=j] & = & P_1 \cap \left(A_0 \cap P_1 \cap .... \cap P_{j-1} \cap F_j\right) \\ & = & A_0 \cap P_1 \cap .... \cap P_{j-1} \cap F_j \\ & = & [Y=j] \end{array}$$

Les évènements étant égaux, leurs probabilités sont ainsi égales.

Conclusion : pour tout $j \in [\![2;+\infty[\![$, $\mathbb{P}\big([X=1]\cap[Y=j]\big) = \mathbb{P}(Y=j)$.

(b) Montrer que pour tout $i \in [\![2;+\infty[\![$, $\mathbb{P}\big([X=i]\cap[Y=1]\big) = \mathbb{P}([X=i])$.
Raisonnement analogue.

(c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
Puisque $\mathbb{P}([X=1]) = \frac{1}{2}$ et que X et Y suivent la même loi :

$$\mathbb{P}([X=1])\times\mathbb{P}([Y=1]) = \frac{1}{4}$$

Mais : $[X=1]\cap[Y=1] = \varnothing$, car il est impossible d'avoir PILE et FACE au même lancer. D'où :

$$\mathbb{P}([X=1]\cap[Y=1]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

Par conséquent :

$$\mathbb{P}([X=1])\times\mathbb{P}([Y=1]) \neq \mathbb{P}([X=1]\cap[Y=1])$$

Conclusion : les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

6. On considère la variable aléatoire $Z = X + Y$.
(a) Expliquer pourquoi Z prend toutes les valeurs entières positives sauf 0 et 2.
On a :
   - $X(\Omega) = Y(\Omega) = N$, donc $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}$.
   - $[Z=0] = [X=0]\cap[Y=0] = \varnothing$ (impossible de n'obtenir aucune PILE et aucun FACE)

- $[Z=2] = \big([X=0]\cap[Y=2]\big)\cup\big([X=2]\cap Y=0]\big)\cup\big([X=1]\cap Y=1]\big)$ et ces trois intersections sont vides (impossible de n'avoir aucun PILE et le premier FACE au second lancer... et impossible d'avoir le premier PILE et le premier FACE au premier lancer...).
D'où $[Z=2]=\varnothing$.
- Pour les autres valeurs : si $[Z=1]$ est possible (justification plus approfondie en question suivante) et si $i\in[\![3;+\infty[\![$, toute issue de $[X=1]\cap[Y=i-1]$ permet de réaliser $[Z=i]$...

Conclusion : $Z(\Omega)=\{1\}\cup[\![3;+\infty ll$.

(b) Montrer que $\mathbb{P}([Z=1])=\dfrac{2}{3}$.

- On a : $[Z=1]=\big([X=0]\cap[Y=1]\big)\cup\big([X=1]\cap[Y=0]\big)$
- De plus, les évènements $\big([X=0]\cap[Y=1]\big)$ et $\big([X=1]\cap[Y=0]\big)$ sont incompatibles. D'où :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([Z=1]) &= \mathbb{P}\big([X=0]\cap[Y=1]\big)+\mathbb{P}\big([X=1]\cap[Y=0]\big)\\ &= \mathbb{P}([X=0])\times\mathbb{P}_{[X=0]}([Y=1])+\mathbb{P}([Y=0])\times\mathbb{P}_{[Y=0]}([X=1]) && \text{X et Y suivent la même loi et } \mathbb{P}([X=0])=\tfrac{1}{3}\\ &= \frac{1}{3}\times\mathbb{P}_{[X=0]}([Y=1])+\frac{1}{3}\times\mathbb{P}_{[Y=0]}([X=1])\end{aligned}$$

Mais $\mathbb{P}_{[X=0]}([Y=1])=1$, car si $[X=0]$ est réalisé, cela implique d'avoir FACE dès le premier lancer, et donc $[Y=1]$ est réalisé. De même pour l'autre probabilité conditionnelle...

Conclusion : $\mathbb{P}(Z=1)=\dfrac{2}{3}$.

(c) Justifier que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :

$$[Z=n]=\big([X=1]\cap[Y=n-1]\big)\cup\big([Y=1]\cap[X=n-1]\big)$$

Soit $n\in[\![3;+\infty[\![$. Puisque (P_1,F_1) est un système complet d'évènements, on a :

$$\begin{aligned}[Z=n] &= \big(P_1\cap[Z=n]\big)\cup\big(F_1\cap[Z=n]\big) && P_1=[X=1] \text{ et } F_1=[Y=1]\\ &= \big([X=1]\cap[X+Y=n]\big)\cup([X=1]\cap[X+Y=n]\big)\\ &= \big([X=1]\cap[Y=n-1]\big)\cup\big([Y=1]\cap[X=n-1]\big)\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n\in[\![3;+\infty[\![,\ [Z=n]=\big([X=1]\cap[Y=n-1]\big)\cup\big([Y=1]\cap[X=n-1]\big)$.

(d) En déduire que :

$$\forall n\in[\![3;+\infty[\![,\ \mathbb{P}([Z=n])=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Soit $n\in[\![3;+\infty[\![$.
D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([Z=n]) &= \mathbb{P}\Big(\big([X=1]\cap[Y=n-1]\big)\cup\big([Y=1]\cap[X=n-1]\big)\Big) && \text{incompatibilté}\\ &= \mathbb{P}\big([X=1]\cap[Y=n-1]\big)+\mathbb{P}\big([Y=1]\cap[X=n-1]\big) && \text{questions 5(a), 5(b) car } n-1\geq 2\\ &= \mathbb{P}([Y=n-1])+\mathbb{P}([X=n-1]) && \text{X et Y ont même loi, et question 1(c) car } n-1\geq 2\\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n\in[\![3;+\infty[\![,\ \mathbb{P}([Z=n])=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

7. **Simulation informatique.** On rappelle que, en `Python`, la commande `rd.random()` renvoie un réel aléatoire de $]0;1[$, et que la commande `rd.randint(a,b)` renvoie un entier aléatoire de $[\![a;b[\![$.

(a) Recopier et compléter les lignes manquantes du programme `Python` suivant afin que la fonction `simulX` renvoie une réalisation de la variable aléatoire X.

```
1  import numpy as np
2  import numpy.random as rd
3  import matplotlib.pyplot as plt
4
5  def simulX():
6      piece=rd.randint(... ,...)
7      x=1
8      if piece==0:
9          lancer=rd.random()
10         while ..............
11             ..............
12             ..............
13     else:
14         if piece==2:
15             ..............
16     return(x)
```

(b) Justifier que le cas où l'on joue la pièce numérotée 1 ne soit pas pris en compte dans le script précédent.

Dans le cas où la pièce 1 est jouée, le programme renverra 1, car `x` prend la valeur 1 dès la ligne 7. Si l'instruction `x=1` avait été placée à l'intérieur du `if piece==0`, il aurait fallu traiter le cas de la pièce 1.

(c) On souhaite obtenir un histogramme des fréquences des valeurs de X sur 10000 réalisations de l'expérience.

i. Créer une liste `L` contenant 10000 réalisations de la variable aléatoire X (on pourra faire appel à la fonction `simulX` précédente).

ii. A l'aide d'une écriture en compréhension, recopier et compléter les lignes manquantes du programme suivant afin que la liste `Labs` contiennent les valeurs $-0.5, 0.5, \ldots, 9.5$.

```
Labs = .....................
plt.hist(L,Labs, density=True,edgecolor='k')
plt.show()
```

Voici le programme complet qui répond également aux questions précédentes :

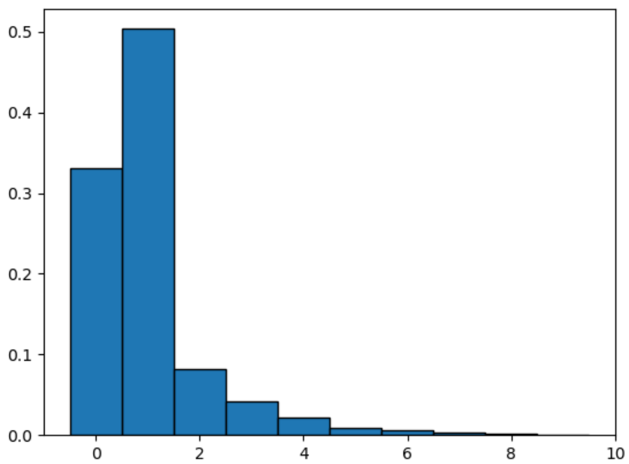
```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt

def simulX():
    piece=rd.randint(0,3)
    x=1
    if piece==0:
        lancer=rd.random()
        while lancer<1/2:
            lancer=rd.random()
            x=x+1
    else:
        if piece==2:
            x=0
    return(x)

L=[simulX() for k in range(10000)]

Labs=[-0.5+k for k in range(0,11)]
plt.hist(L,Labs, density=True,edgecolor='k')
plt.show()
```

iii. L'exécution des lignes précédentes permet d'obtenir le graphique suivant :



Expliquer l'intérêt des options `density=True` et `edgecolor='k'`.

`density=True` permet d'obtenir un histogramme de fréquences, et pas un histogramme d'effectifs. `edgecolor='k'`, c'est pour faire joli : on dessine les contours des rectangles pour plus de lisibilité...

Ce graphique permet-il de confirmer la loi obtenue pour la variable aléatoire X ?

Mais carrément !! On vérifie en particulier que pour tout $n \in [\![0;9]\!]$, $\mathbb{P}([X = n])$ est très proche de la fréquence observée sur 10000 répétitions...

☞ Pour info...
C'est encore la loi faible des grands nombres !

CQFR

Ce qu'il faut retenir des copies : Globalement, l'expérience est comprise. La difficulté de cet exercice réside dans les justifications à apporter aux calculs des probabilités (et ils sont nombreux).
Il est important, à chaque fois, de mentionner l'élément de l'expérience qui explique la valeur d'une probabilité / probabilité conditionnelle.
Nombreux sont ceux qui oublient d'interpréter l'espérance !

★★★★★★★

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^{-x} - \dfrac{x^2}{2} + x$.

1. Écrire une fonction Python d'en-tête `def f(x)` qui prend un réel x en argument d'entrée et renvoie $f(x)$ en sortie.

```python
import numpy as np

def f(x):
    y=np.exp(-x)-x**2/2+x
    return y
```

2. **Étude de f.**

(a) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

- **En $-\infty$:**
Pour x suffisamment proche de $-\infty$:
$$f(x) = e^{-x}\left(1 - \frac{x^2}{2e^{-x}} + \frac{x}{e^{-x}}\right)$$
Or, par croissance comparée : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{2e^{-x}} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{e^{-x}} = 0$.
D'où, par opérations :
$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$$

- **En $+\infty$:**
On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{x^2}{2} + x = -\infty$... D'où, par opérations :
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$$

(b) Dresser le tableau de variations complet de f et étudier sa convexité.
f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :
$$f'(x) = -e^{-x} - x + 1 \ ; \ f''(x) = e^{-x} - 1$$

Petite remarque
On peut avoir le signe de $f'(x)$ en utilisant : $\forall y \in \mathbb{R},\ e^y \geq 1 + y$, avec $y = -x$...

Et :
$$\begin{aligned} f''(x) \geq 0 &\iff e^{-x} - 1 \geq 0 \\ &\iff e^{-x} \geq 1 \\ &\iff -x \geq 0 \quad \text{stricte croissance de ln sur } \mathbb{R}_*^+ \\ &\iff x \leq 0 \end{aligned}$$

D'où le tableau de variations de f' :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $f''(x)$		$+$	0	$-$	
variations de f'		$\nearrow$	0	$\searrow$	

Ainsi, puisque le maximum de f' sur $\mathbb{R}$ est 0, atteint en 0, on en déduit :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$-$	
variations de f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Convexité.
On a en fait le signe de $f''(x)$ (dans l'étude des variations de f')...

Conclusion : f est convexe sur $\mathbb{R}^-$, concave sur $\mathbb{R}^+$, et $\mathcal{C}_f$ possède un point d'inflexion de coordonnées $(0;1)$.

(c) Démontrer que l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée α, dont on donnera un encadrement entre deux entiers consécutifs.

✘ Attention !
Ce n'est pas sur f qu'il faut appliquer le théorème de bijection... C'est sur g !

On pose $g : x \longmapsto f(x) - x = e^{-x} - \dfrac{x^2}{2}$. On a ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = x \iff g(x) = 0$.

- ◦ g est continue sur l'intervalle $]-\infty;+\infty[$,
  ◦ f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et $x \longmapsto -x$ également. Ainsi, g est une somme de deux fonctions strictement décroissante sur $\mathbb{R}$; elle est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

  Par conséquent, d'après le théorème de bijection, g est bijective de $\mathbb{R}$ dans $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Petite remarque
Sinon, on dérive, et on remarque que $g'(x) = f'(x) - 1 < 0$...

- De plus, puisque $0 \in g(\mathbb{R})$, l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}$; ce qui est donc le cas de l'équation $f(x) = x$. Notons α cette solution.
- Enfin : $g(0) = 1 > 0$ et $g(1) = e^{-1} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{e} - \dfrac{1}{2} < 0$ car $e > 2$.
Ainsi :
$$g(0) > g(\alpha) > g(1)$$
Et comme g^{-1} est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, on obtient :
$$0 < \alpha < 1$$

Conclusion : l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution réelle α, et $\alpha \in [0;1]$.

3. **Étude d'une première suite.**
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;1]$.

Récurrence immédiate, f étant décroissante sur $[0,1]$ et en utilisant : $f(0) = 1$ et $f(1) = e^{-1} + \frac{1}{2} \geq 0$.

(b) Démontrer que pour tout $x \in [0;1]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{e}$.

Réflexe ! Avant de se lancer dans les calculs en majorant / minorant des expressions : est-ce que l'inégalité est trivialisée par les variations de f' ? Ah bah oui !

Soit $x \in [0;1]$. Puisque f' est décroissante sur $[0;1]$, on a :

$$f'(0) \geq f'(x) \geq f'(1)$$

Autrement dit :

$$0 \geq f'(x) \geq \frac{-1}{e}$$

Par conséquent :

$$\frac{1}{e} > 0 \geq f'(x) \geq \frac{-1}{e}$$

Conclusion : pour tout $x \in [0;1]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{e}$.

(c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{e}|u_n - \alpha|$ puis $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.
  - f est continue et dérivable sur $[0;1]$
  - $\forall x \in [0;1], \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{e}$
  - $u_n \in [0;1]$ et $\alpha \in [0;1]$

  Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis :

  $$|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{e}|u_n - \alpha|$$

  Et, d'après la question 2(c), $f(\alpha) = \alpha$.

  Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{e}|u_n - \alpha|$.

- Par récurrence...
  - **Initialisation.** Pour $n = 0$:
  On a : $|u_0 - \alpha| = \alpha$. Or, on a vu que $\alpha \in [0;1]$. On a donc bien : $|u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{e}\right)^0$. L'initialisation est vérifiée.
  - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n$ et montrons $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}$.
  Par hypothèse de récurrence, on a :

  $$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n$$

  d'où, en multipliant par $\frac{1}{e} > 0$:

  $$\frac{1}{e}|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}$$

  Et ainsi d'après le point précédent et par transitivité :

  $$|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}$$

  L'hérédité est établie.

  Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n$.

(d) Conclure sur la convergence de la suite (u_n) et préciser sa limite.

- D'après la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n$.
- De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n = 0$.

D'après le théorème d'encadrement, on en déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| = 0$. Autrement dit : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - \alpha = 0$.

★ Subtile... ★ Tout serait différent si on avait $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| = 1$: on ne pourrait même pas conclure que (u_n) converge...

Conclusion : la suite (u_n) converge vers α.

(e) Déterminer un rang à partir duquel u_n est une valeur approchée à 10^{-10} près de α. *Donnée :* $\ln(10) \simeq 2,303$.

★ Subtile... ★ On ne demande pas le premier rang à partir duquel c'est le cas...

D'après le résultat de la question 3(c), il suffit de trouver un n à partir duquel $\left(\frac{1}{e}\right)^n < 10^{-10}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{e}\right)^n \leq 10^{-10} & \iff n \ln\left(\frac{1}{e}\right) \leq -10\ln(10) \quad \text{par stricte décroissance de ln sur } \mathbb{R}_*^+ \\ & \iff -n \leq -10\ln(10) \\ & \iff n \geq 10\ln(10) \end{aligned}$$

Conclusion : pour $n \geq 24$, on peut affirmer que $|u_n - \alpha| < 10^{-10}$; ce qui répond à la question.

(f) Créer une fonction Python d'en-tête `def u(n):` qui prend n en valeur d'entrée et renvoie u_n en sortie.

```python
def u(n):
    u=0
    for k in range(1,n+1):
        u=f(u) #où f est la fonction de la question 1
    return u
```

4. **Étude d'une seconde suite.**

(a) Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle à préciser. Dresser le tableau de variations complet de f^{-1}.

D'après la question 2(b) et le théorème de bijection, f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
On a également :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
variations de f^{-1}	$+\infty$	0	$-\infty$

> **Petite remarque**
> C'est le second théorème de bijection qu'on applique, on peut donc se permettre d'aller un peu plus vite.

(b) Écrire une fonction Python nommée `dicho` qui prend la valeur d'un réel strictement positif p en argument d'entrée et renvoie une valeur approchée de $f^{-1}(0)$ à p près, à l'aide de l'algorithme de dichotomie.
L'exécution de `dicho(0.01)` *renvoie* $2,11$.

On sait que $f(0) = 1$ et on remarque que $f(3) = e^{-3} - \frac{3}{2} < 0$... D'où :

$$f(0) > 0 > f(3)$$

Et ainsi, par stricte décroissance de f^{-1} sur $\mathbb{R}$, on obtient :

$$0 < f^{-1}(0) < 3$$

Ceci nous permet d'obtenir un premier intervalle sur lequel débuter !

> **Petite remarque**
> L'intervalle $[2;3]$ convenait également...

```python
def dicho(p):
    a=0
    b=3
    while b-a>p:
        m=(a+b)/2
        if f(m)==0: #où f est la fonction de la question 1
            a,b=m,m
        elif f(m)*f(a)<0:
            b=m
        elif f(m)*f(a)>0:
            a=m
    return (a+b)/2
```

(c) Déduire de la question 4(a) que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique nombre, noté x_n, tel que $f(x_n) = \frac{1}{n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Puisque $\frac{1}{n} \in f(\mathbb{R})$ et que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R})$, il existe un unique antécédent à $\frac{1}{n}$ par f, noté x_n.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique nombre réel x_n tel que $f(x_n) = \frac{1}{n}$.

(d) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in [0;3]$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a : $f(x_n) = \frac{1}{n} \in]0;1]$, ainsi que $f(0) = 1$ et $f(3) < 0$... D'où :

$$f(0) > f(x_n) > f(3)$$

Et par stricte décroissance de f^{-1} sur $\mathbb{R}$, on obtient :

$$0 < x_n < 3$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in [0;3]$.

(e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer x_n en fonction de n et f^{-1}.

On a $f(x_n) = \frac{1}{n}$, et comme f est bijective : $x_n = f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$.

(f) En déduire la limite de (x_n).

Puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et que f^{-1} est continue en 0, on obtient : $\lim_{n\to+\infty} x_n = f^{-1}(0)$.

Conclusion : $\lim_{n\to+\infty} x_n = f^{-1}(0) \simeq 2,11$.

> **Pourquoi ?**
> `dicho(0.01)` renvoie une valeur approchée de $f^{-1}(0)$ à 10^{-2} près.

Ce qu'il faut retenir des copies : Certains ont bien saisi les techniques et méthodes de cet exercice : il était alors aisé d'obtenir beaucoup de points en un temps assez court.
Pour celles et ceux qui n'ont pas eu assez de points (moins 20), il faut reprendre cet exercice (et ceux qui lui ressemblent) autant de fois que nécessaire ! Elisa a tout de même eu 33 points sur 38 : bravo ! !

★★★★★★★

Exercice 5-bis

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n la fonction polynomiale définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-x)^k}{k!}$$

1. **Question préliminaire.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ et $Q : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ une fonction polynomiale de degré n. Justifier que $\lim_{x\to+\infty} Q(x) = \lim_{x\to+\infty} a_n x^n$.

   Commençons déjà par dire $\lim_{n\to+\infty x^n}$ existe toujours (peu importe la parité de n).

   Ensuite, puisque $\deg(Q) = n$, $a_n \neq 0$.

   Ainsi, pour tout $x \neq 0$:

   $$Q(x) = a_n x^n \left(1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{a_n x^{n-k}}\right)$$

   Or, pour tout $k \in [\![0; n-1$, $n-k > 0$. D'où : $\lim_{x\to+\infty} \frac{a_k}{a_n x^{n-k}} = 0$.

   Par opérations, on en déduit alors :

   $$\boxed{\lim_{x\to+\infty} Q(x) = \lim_{x\to+\infty} a_n x^n}$$

2. (a) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les limites de P_n en $+\infty$ et $-\infty$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente :

   $$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} P_n(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{(-1)^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!} && \text{2n+1 est impair}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^{2n+1}}{(2n+1)!}\\ &= +\infty\end{aligned}$$

   De même, et puisque $2n+1$ est impair (donc $\lim_{x\to-\infty} x^{2n+1}$ existe et vaut $-\infty$) on obtient :

   $$\lim_{x\to-\infty} P_n(x) = +\infty$$

   Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x\to+\infty} P_n(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} P_n(x) = +\infty$.

   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme P_n possède au moins une racine réelle.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction P_n est une fonction polynomiale, elle est donc continue sur $\mathbb{R}$. Et on vient d'obtenir $\lim_{x\to+\infty} P_n(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} P_n(x) = +\infty$...

   Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $P_n(x) = 0$ possède au moins une solution.
   Autrement dit, P_n possède au moins une racine réelle.

3. (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ P_n'(x) = -P_n(x) - \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. P_n est une fonction polynomiale, elle est donc $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
   Et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

   $$\begin{aligned}P_n'(x) &= \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{-k(-x)^{k-1}}{k!} && k \neq 0\\ &= \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{-(-x)^{k-1}}{(k-1)!} && \text{changement } j = k-1\\ &= -\sum_{j=0}^{2n} \frac{(-x)^j}{j!}\\ &= -\left(P_n(x) - \frac{(-x)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\\ &= -P_n(x) + \frac{(-1)^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}\\ &= -P_n(x) - \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\end{aligned}$$

   ✘ Attention ! La somme débute bien à 1, car le terme en $k=0$ dans la somme définissant P_n est constant !

   Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ P_n'(x) = -P_n(x) - \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si x_n est racine de P_n, alors x_n n'est pas racine de P_n'.
   Autrement dit : les racines de P_n sont des racines simples.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons x_n une racine de P_n et montrons que x_n n'est pas racine de P_n'.
   D'après le résultat précédent (valable pour tout réel x), on a :

   $$P_n'(x_n) = -P_n(x_n) - \frac{x_n^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

   Et comme $P_n(x_n) = 0$, on obtient :

   $$P_n'(x_n) = -\frac{x_n^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Sauf que $x_n \neq 0$. En effet : $P_n(0) = 1$. 0 n'est donc pas une racine de P_n.
Par conséquent :

$$P_n'(x_n) \neq 0$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, si x_n est racine de P_n, alors x_n n'est pas racine de P_n'.

4. (a) Vérifier : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!}\left(1 - \frac{x}{2k+1}\right)$.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!}\left(1 - \frac{x}{2k+1}\right) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1))!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{-x^{2k+1}}{(2k+1))!} \qquad \text{pour tout } k \in [\![0;n]\!],\ 2k \text{ est pair et } 2k+1 \text{ impair} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-x)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-x)^{2k+1}}{(2k+1))!} \\
&= \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ pair}}}^{2n} \frac{(-x)^j}{j!} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ impair}}}^{2n+1} \frac{(-x)^j}{j!} \\
&= \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ pair}}}^{2n+1} \frac{(-x)^j}{j!} + \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ impair}}}^{2n+1} \frac{(-x)^j}{j!} \\
&= \sum_{j=0}^{2n+1} \frac{(-x)^j}{j!} \\
&= P_n(x)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!}\left(1 - \frac{x}{2k+1}\right)$.

(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les racines de P_n appartiennent nécessairement à l'intervalle $[1; 2n+1]$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x > 2n+1$.
  Alors pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $\dfrac{x}{2k+1} > 1$, et ainsi, d'après la relation précédente : $P_n(x) < 0$.
  Par conséquent : P_n n'a pas de racine sur $]2n+1; +\infty[$.
- Si $x < 1$:
  Alors pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $x < 2k+1$, donc $1 - \dfrac{x}{2k+1} > 0$, et ainsi, d'après la question précédente : $P_n(x) > 0$.
  Par conséquent : P_n n'a pas de racine sur $]-\infty; 1[$.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, les racines de P_n appartiennent nécessairement à l'intervalle $[1; 2n+1]$.

5. (a) Établir :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} P_{n+1}'(x) = -P_n(x) - \dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \\ P_{n+1}''(x) = P_n(x) \end{cases}$$

Pas de réelle difficulté, en utilisant, pour les deux égalités, le résultat de la question 3(a)...

(b) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction P_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'une seule fois, en un réel noté u_n.

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
  La fonction $P_0 : x \longmapsto 1 - x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'en 1.
  L'initialisation est ainsi vérifiée et on a, au passage, $u_0 = 1$.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que "P_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'en un réel noté u_n", et montrons que "P_{n+1} est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'en un réel noté u_{n+1}".
  Par hypothèse de récurrence, puisque P_n est strictement décroissante et que $P_n(u_n) = 0$, on a le signe de $P_n(x)$ pour tout réel x. Et puisque, d'après la question précédente, $P_{n+1}'' = P_n$, on obtient :

x	$-\infty$		u_n		$+\infty$
$P_{n+1}''(x) = P_n(x)$		$+$	0	$-$	
P_{n+1}'		$\nearrow$	$P_{n+1}'(u_n)$	$\searrow$	

  Or, d'après la relation précédente :

$$\begin{aligned}
P_{n+1}'(u_n) &= -P_n(u_n) - \frac{u_n^{2n+2}}{(2n+2)!} \qquad P_n(u_n) = 0 \\
&= -\frac{u_n^{2n+2}}{(2n+2)!} \qquad u_n > 0 \\
&< 0
\end{aligned}$$

  Par conséquent, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_{n+1}'(x) < 0$$

  Ainsi, la fonction P_{n+1} est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. On avait justifié (question 2(b)) que P_{n+1} possède au moins une racine ; par stricte décroissance, elle n'en possède donc qu'une seule.
  L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction P_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'une seule fois, en un réel noté u_n.

6. (a) Écrire une fonction Python telle que l'exécution de `P(n,x)` renvoie la valeur de $P_n(x)$ pour un entier n et un réel x.
   Demander à Émile, le pro de la récursivité !

   (b) En déduire une fonction nommée `u` qui prend en argument d'entrée un entier naturel n et renvoie en sortie une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près obtenue à l'aide de la méthode de dichotomie.
   Algorithme de dichotomie classique... On pense bien à entrer `a=1` et `b=2n+1`, puisque l'on sait, d'après la question 4(b), que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1;2n+1]$.

PETITE REMARQUE
Sinon, on fait des sommes...

7. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} P_{n+1}(u_n) &= \sum_{k=0}^{2n+3} \frac{(-u_n)^k}{k} \\ &= P_n(u_n) + \frac{u_n^{2n+2}}{(2n+2)!} - \frac{u_n^{2n+3}}{(2n+3)!} \\ &= \frac{u_n^{2n+2}}{(2n+2)!}\left(1 - \frac{u_n}{2n+3}\right) \end{aligned}$$

Or on sait, d'après q4(b), que $u_n \leq 2n+1$, donc $u_n < 2n+3$ et ainsi : $\dfrac{u_n}{2n+3} < 1$. D'où :

$$1 - \frac{u_n}{2n+3} > 0$$

Par conséquent :

$$P_{n+1}(u_n) > 0$$

Or $P_{n+1}(u_{n+1})) = 0$, d'où :

$$P_{n+1}(u_n) > P_{n+1}(u_{n+1})$$

Et par stricte décroissance de P_{n+1} sur $\mathbb{R}$, on obtient :

$$u_n < u_{n+1}$$

Conclusion : la suite (u_n) est strictement croissante.

♣ MÉTHODE !
On connait la méthode sur les suites implicites : on compare $P_{n+1}(u_n)$ et $P_{n+1}(u_{n+1}) = 0$...

8. On suppose dans cette question que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ.

   (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ |P_n(u_n) - P_n(\ell)| \leq e^{\ell}|u_n - \ell|$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$.

   - Puisque (u_n) est croissante, minorée par 1 et converge vers ℓ, on a : $u_n \leq \ell$.
   - **Majorons $|P_n'|$ sur l'intervalle $[u_n;\ell]$.** Soit $x \in [u_n;\ell]$.
     - ◇ Si $n \geq 1$:
       Dans la récurrence de la question 5(b), on a vu que P_n' est décroissante sur $[u_{n-1};+\infty[$. Or (u_n) est croissante, on a ainsi :

       $$u_{n-1} \leq u_n \leq x \leq \ell$$

       Et par décroissance de P_n' :

       $$P_n'(u_{n-1}) geq P_n'(u_n) \geq P_n'(x) \geq P_n'(\ell)$$

       or $P_n'(u_{n-1} < 0$ (justifié dans la récurrence de la question 5(b)), d'où :

       $$0 \geq P_n'(u_n) \geq P_n'(x) \geq P_n'(\ell)$$

       Ainsi :

       $$|P_n'(x)| \leq -P_n'(\ell)$$

       Mais :

       $$\begin{aligned} -P_n'(\ell) &= -\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{-(-\ell)^{k-1}}{(k-1)!} \quad j = k-1 \\ &= \sum_{j=0}^{2n} \frac{(-\ell)^j}{j!} \end{aligned}$$

       Mais on a, puisque $\ell \geq 0$: $\forall j \in [\![0;2n]\!]$, $(-\ell)^j \leq \ell^j$, d'où, en sommant :

       $$\sum_{j=0}^{2n} \frac{(-\ell)^j}{j!} \leq \sum_{j=0}^{2n} \frac{\ell^j}{j!}$$

       On reconnaît ici une somme partielle de la série exponentielle... Or $\ell > 0$, donc la suite des sommes partielles de la série $\sum \dfrac{\ell^k}{k!}$ est croissante... étant de limite e^{ℓ}, on obtient :

       $$\sum_{j=0}^{2n} \frac{\ell^j}{j!} \leq e^{\ell}$$

       Finalement, par transitivité :

       $$|P_n'(x)| \leq e^{\ell}$$

     - ◇ Si $n = 0$:
       $P_0'(x) = -1$, d'où $|P_0'(x)| = 1$; et comme $\ell \geq u_0 = 1$, on a bien $|P_0'(x)| \leq e^{\ell}$.

     Conclusion : $\forall x \in [u_n;\ell]$, $|P_n'(x)| \leq e^{\ell}$.

   On déduit, d'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à P_n (continue et dérivable sur $[u_n;\ell]$) :

   $$|P_n(u_n) - P_n(\ell)| \leq e^{\ell}|u_n - \ell|$$

   Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|P_n(u_n) - P_n(\ell)| \leq e^{\ell}|u_n - \ell|$.

➠ RÉFLEXE !
Tu empestes l'IAF à 3km (cherchez la réf !).

✓ RIGUEUR !
Disjonction de cas nécessaire pour pouvoir écrire u_{n-1}...

PETITE REMARQUE
Question difficile !

(b) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}_n(\ell)$.

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{P}_n(\ell) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-\ell)^k}{k!}$$

Or, on sait que la série $\sum \frac{(-\ell)^k}{k!}$ est convergente, de somme égale à $e^{-\ell}$. Ainsi, la suite $(\mathrm{P}_n(\ell))_{n\in\mathbb{N}}$ (étant une suite extraite de la suite des sommes partielles de la série $\sum \frac{(-\ell)^k}{k!}$) converge également vers $e^{-\ell}$.

Conclusion : $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}_n(\ell) = e^{-\ell}$.

(c) Aboutir à une contradiction.

- En passant à la limite dans l'inégalité de la question 8(a), on obtient alors, par théorème d'encadrement (puisque $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$) :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}_n(u_n) - \mathrm{P}_n(\ell) = 0$$

Et par conséquent, d'après la question précédente :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}_n(u_n) = e^{-\ell}$$

- Mais on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{P}_n(u_n) = 0$$

D'où la contradiction.

9. Conclure sur la limite de la suite (u_n).

L'hypothèse selon laquelle (u_n) converge est ainsi fausse. Et comme (u_n) est croissante, par théorème de divergence monotone, elle diverge vers $+\infty$.

Conclusion : $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

CQFR

Ce qu'il faut retenir des copies : Peu de choses faites sur cet exercice du fait de la longueur du sujet.
Il y avait en revanche un certain nombre de questions relativement classiques et abordables, même si la fin était plus compliquée...

★★★★★★★

Fin du sujet