Devoir surveillé 6

Samedi 9 avril - 4h00

NOM .... Prénom ....

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation. Quelques précisions :

- ***la copie devra présenter une marge ainsi qu'une en-tête suffisantes,***
- ***toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,***
- ***les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),***
- ***les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.***

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.

"*J'aime les calculs faux car ils donnent des résultats plus justes.*"
Jean Arp

IMPORTANT !
Les exercices 2,3,4 sont à traiter.
Le candidat choisira de traiter soit "exercice 1 et exercice 5" soit "exercice 1-bis et exercice 5-bis".
Les mélanges "exercice 1-bis et exercice 5" et "exercice 1 et exercice 5-bis" ne sont pas autorisés.
Le candidat mentionnera explicitement en début de copie "Version A" si le choix "exercice 1 et exercice 5" a été fait ; et "Version B" si le choix "exercice 1-bis et exercice 5-bis" a été fait.

Exercice 1

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Déterminer une primitive sur $]0;+\infty[$ de $f : x \longmapsto x - e^{2x} + \dfrac{1}{x^4} + \dfrac{5e^x}{e^x+1}$.
2. Considérons $f : x \longmapsto xe^{-x^2}$. Déterminer l'unique primitive de f s'annulant en 0.
3. On considère la suite (S_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = S_{2n}$ et $v_n = S_{2n+1}$.
   (a) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
   (b) En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{k}$.
4. Considérons $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'application définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $f(M) = JMJ$.
   (a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Vérifier que $f \circ f = \mathrm{id}$.
   (c) En déduire que l'endomorphisme f est bijectif et donner $f^{-1}(M)$ pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (d) Que peut-on en déduire sur le rang de f ainsi que sur $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$?
   (e) Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
5. Soient E un espace vectoriel et p un endomorphisme de E tel que $p \circ p = p$. On suppose également que $p \neq \mathrm{id}_E$.
   (a) Démontrer que p n'est pas bijectif.
   (b) Démontrer que pour tout $y \in E : y \in \mathrm{Im}(p) \iff p(y) = y$.
   (c) Démontrer : $\mathrm{Im}(p) \cap \ker(p) = \{0_E\}$.

★★★★★★★

Exercice 1-bis

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n, et p un endomorphisme de E tel que $p \circ p = p$. On suppose également que $p \neq \mathrm{id}_E$. On pose $s = \mathrm{id}_E - 2p$.

1. Démontrer que p n'est pas bijectif.
2. Démontrer que pour tout $y \in E : y \in \mathrm{Im}(p) \iff p(y) = y$.
3. Démontrer : $\mathrm{Im}(p) \cap \ker(p) = \{0_E\}$.
4. Établir :
$$\forall x \in E,\ \exists!(y,z) \in \mathrm{Im}(p) \times \ker(p)\ /\ x = y + z$$
5. Justifier que $\mathrm{Im}(p)$ et $\ker(p)$ sont des espaces vectoriels de dimension finie.
6. Notons $r = \mathrm{rg}(p)$ et $k = \dim(\ker(p))$. Considérons $\mathcal{B}_1 = (e_i)_{i \in [\![1;r]\!]}$ une base de $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathcal{B}_2 = (f_i)_{i \in [\![1;k]\!]}$ une base de $\ker(p)$.
   (a) Démontrer que la famille obtenue en concaténant les vecteurs de $\mathcal{B}_1$ et ceux de $\mathcal{B}_2$ est une base de E, notée $\mathcal{B}$.
   (b) En déduire une relation entre n, r et k.
   (c) Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$ puis en déduire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s)$.
7. Déterminer $s \circ s$ puis en déduire que s est un isomorphisme et donner s^{-1}.
8. Préciser alors $\mathrm{rg}(s)$, $\ker(s)$ et $\mathrm{Im}(s)$.
9. Montrer :
$$\ker(s - \mathrm{id}_E) = \ker(p)\ \ ;\ \ \ker(s + \mathrm{id}_E) = \mathrm{Im}(p)$$
10. Expliquer comment retrouver alors la matrice de s dans la base $\mathcal{B}$ obtenue à la question 6(c).

★★★★★★★

Exercice 2

On considère l'application $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y+z \\ -2x+3y+2z \\ x-y \end{pmatrix}$, et on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

1. Justifier que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et donner sa matrice canoniquement associée, notée A.
2. Déterminer les réels λ de sorte que $\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_3$ ne soit pas inversible.
3. (a) Calculer $(\mathrm{A} - \mathrm{I}_3)^2$.
   (b) En déduire que A est inversible et écrire A^{-1} comme combinaison linéaire de I_3 et A.
   (c) Que peut-on en déduire sur l'endomorphisme f ?
4. On pose $\mathrm{N} = \mathrm{A} - \mathrm{I}_3$.
   (a) Exprimer, pour tout entier naturel n, la matrice A^n comme combinaison linéaire de I_3 et A.
   (b) Vérifier que l'expression précédente est aussi valable pour $n = -1$.
5. On pose $u_1 = (f - \mathrm{id})(e_1)$ et $u_2 = e_1 + e_3$.
   (a) Montrer que $\mathrm{rg}(f - \mathrm{id}) = 1$.
   (b) Justifier que (u_1, u_2) est une base de $\ker(f - \mathrm{id})$.
6. (a) Montrer que la famille (u_1, u_2, e_1) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   (b) Déterminer la matrice T de f dans cette même base.
7. On pose $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1}.

   On admet la relation : $\mathrm{A} = \mathrm{PTP}^{-1}$.
8. On note $\left(\mathrm{E}_{1,1}, \mathrm{E}_{1,2}, \mathrm{E}_{1,3}, \mathrm{E}_{2,1}, \mathrm{E}_{2,2}, \mathrm{E}_{2,3}, \mathrm{E}_{3,1}, \mathrm{E}_{3,2}, \mathrm{E}_{3,3}\right)$ la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$; et on rappelle que pour tout $(i,j) \in [\![1;3]\!]^2$, la matrice $\mathrm{E}_{i,j}$ n'a que des coefficients nuls sauf celui situé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne qui vaut 1.
   On note $\mathcal{C}_\mathrm{A} = \left\{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ \mathrm{AM} = \mathrm{MA}\right\}$ et $\mathcal{C}_\mathrm{T} = \left\{\mathrm{M}' \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ \mathrm{TM}' = \mathrm{M}'\mathrm{T}\right\}$.
   (a) Montrer que $\mathcal{C}_\mathrm{A}$ est un espace vectoriel.
   (b) Soient $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $\mathrm{M}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$. Établir : $\mathrm{M} \in \mathcal{C}_\mathrm{A} \iff \mathrm{M}' \in \mathcal{C}_\mathrm{T}$.
   (c) Montrer que $\mathcal{C}_\mathrm{T} = \mathrm{Vect}(\mathrm{E}_{1,1} + \mathrm{E}_{3,3}, \mathrm{E}_{1,2}, \mathrm{E}_{1,3}, \mathrm{E}_{2,2}, \mathrm{E}_{2,3})$, puis donner $\dim(\mathcal{C}_\mathrm{T})$.
   (d) En déduire une base de $\mathcal{C}_\mathrm{A}$. On exprimera chacune des matrices de cette base à l'aide des matrices $\mathrm{P}, \mathrm{P}^{-1}$ et de certaines $\mathrm{E}_{i,j}$.

★★★★★★★

Exercice 3

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \longmapsto (1-x)^n e^{-2x}$ ainsi que l'intégrale $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$.

Le but de l'exercice est de montrer l'existence de trois réels a, b, c tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathrm{I}_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon(n)$$

où $\varepsilon(n)$ est une expression dépendant de n telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} \varepsilon(n) = 0$.

On rappelle la formule d'intégration par parties, valable si u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est bien défini et donner son signe.
2. Calculer I_0.
3. Étudier les variations de la suite (I_n).
4. Que peut-on en déduire ?
5. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \mathrm{I}_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.
6. Déterminer la limite de la suite (I_n).
7. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2\mathrm{I}_{n+1} = 1 - (n+1)\mathrm{I}_n$.
8. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} n\mathrm{I}_n$.
9. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(n(n\mathrm{I}_n - 1)\right)$.
10. Donner alors les valeurs de a, b, c.

★★★★★★★

Exercice 4

On dispose de trois pièces indiscernables au toucher :

- une pièce numérotée 0 donnant PILE avec une probabilité $\frac{1}{2}$ et FACE avec une probabilité $\frac{1}{2}$
- une pièce numérotée 1 donnant PILE à coup sûr
- une pièce numérotée 2 donnant FACE à coup sûr

L'expérience consiste à choisir de façon équiprobable l'une de ces trois pièces puis la lancer indéfiniment. On note $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé associé à cette expérience.
Pour $i \in \{0;1;2\}$, on note A_i l'évènement "on a choisi la pièce numérotée i". Ainsi, (A_0, A_1, A_2) est un système complet d'évènements.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note P_k l'évènement : "on obtient PILE au lancer numéro k" et $F_k = \overline{P_k}$.
On considère les deux variables aléatoires :

- X donnant le rang d'apparition du premier PILE
- Y donnant le rang d'apparition du premier FACE

On convient de donner à X la valeur 0 si l'on obtient jamais PILE et de donner à Y la valeur 0 si l'on obtient jamais FACE.

1. **Loi de X.**
   (a) Donner $X(\Omega)$.
   (b) Déterminer $\mathbb{P}([X=1])$.
   (c) Montrer que : $\forall n \in [\![2;+\infty[\![,\ \mathbb{P}([X=n]) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
   (d) En déduire la valeur de $\mathbb{P}([X=0])$.
2. Montrer que X admet une espérance et la calculer. Interpréter le résultat obtenu.
3. Montrer que X admet une variance et la calculer.
4. Justifier que Y suit la même loi que X.
5. (a) Montrer que pour tout $j \in [\![2;+\infty[\![$, $\mathbb{P}\big([X=1]\cap[Y=j]\big) = \mathbb{P}([Y=j])$.
   (b) Montrer que pour tout $i \in [\![2;+\infty[\![$, $\mathbb{P}\big([X=i]\cap[Y=1]\big) = \mathbb{P}([X=i])$.
   (c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
6. On considère la variable aléatoire $Z = X + Y$.
   (a) Expliquer pourquoi Z prend toutes les valeurs entières positives sauf 0 et 2.
   (b) Montrer que $\mathbb{P}([Z=1]) = \frac{2}{3}$.
   (c) Justifier que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :
   $$[Z=n] = \big([X=1]\cap[Y=n-1]\big) \cup \big([Y=1]\cap[X=n-1]\big)$$
   (d) En déduire que :
   $$\forall n \in [\![3;+\infty[\![,\ \mathbb{P}([Z=n]) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
7. **Simulation informatique.** On rappelle que, en `Python`, la commande `rd.random()` renvoie un réel aléatoire de $]0;1[$, et que la commande `rd.randint(a,b)` renvoie un entier aléatoire de $[\![a;b[\![$.
   (a) Recopier et compléter les lignes manquantes du programme `Python` suivant afin que la fonction `simulX` renvoie une réalisation de la variable aléatoire X.

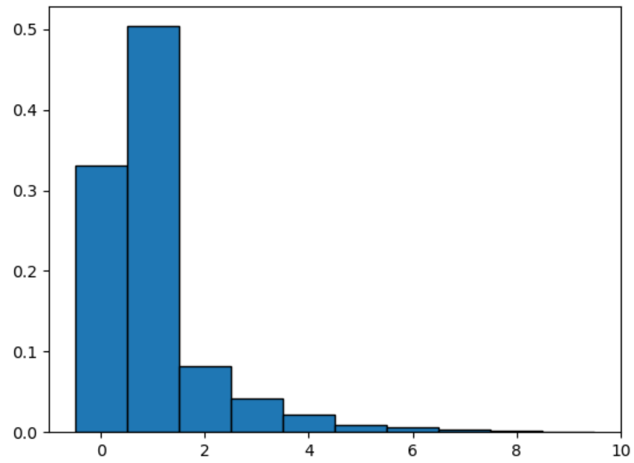
```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt

def simulX():
    piece=rd.randint(... ,...)
    x=1
    if piece==0:
        lancer=rd.random()
        while ..............
            ..............
            ..............
    else:
        if piece==2:
            ..............
    return(x)
```

   (b) Justifier que le cas où l'on joue la pièce numérotée 1 ne soit pas pris en compte dans le script précédent.
   (c) On souhaite obtenir un histogramme des fréquences des valeurs de X sur 10000 réalisations de l'expérience.
      i. Créer une liste `L` contenant 10000 réalisations de la variable aléatoire X (on pourra faire appel à la fonction `simulX` précédente).
      ii. A l'aide d'une écriture en compréhension, recopier et compléter les lignes manquantes du programme suivant afin que la liste `Labs` contiennent les valeurs $-0.5, 0.5, \ldots, 9.5$.

```
Labs = .....................
plt.hist(L,Labs,  density=True,edgecolor='k')
plt.show()
```

iii. L'exécution des lignes précédentes permet d'obtenir le graphique suivant :



Expliquer l'intérêt des options `density=True` et `edgecolor='k'`.
Ce graphique permet-il de confirmer la loi obtenue pour la variable aléatoire X ?

★★★★★★★

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^{-x} - \dfrac{x^2}{2} + x$.

1. Écrire une fonction Python d'en-tête `def f(x)` qui prend un réel x en argument d'entrée et renvoie $f(x)$ en sortie.
2. **Étude de f.**
   (a) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   (b) Dresser le tableau de variations complet de f et étudier sa convexité.
   (c) Démontrer que l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée α, dont on donnera un encadrement entre deux entiers consécutifs.
3. **Étude d'une première suite.**
   Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;1]$.
   (b) Démontrer que pour tout $x \in [0;1]$, $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{e}$.
   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{e}|u_n - \alpha|$ puis $|u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{e}\right)^n$.
   (d) Conclure sur la convergence de la suite (u_n) et préciser sa limite.
   (e) Déterminer un rang à partir duquel u_n est une valeur approchée à 10^{-10} près de α. *Donnée :* $\ln(10) \simeq 2,303$.
   (f) Créer une fonction Python d'en-tête `def u(n):` qui prend n en valeur d'entrée et renvoie u_n en sortie.
4. **Étude d'une seconde suite.**
   (a) Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle à préciser. Dresser le tableau de variations complet de f^{-1}.
   (b) Écrire une fonction Python nommée `dicho` qui prend la valeur d'un réel strictement positif p en argument d'entrée et renvoie une valeur approchée de $f^{-1}(0)$ à p près, à l'aide de l'algorithme de dichotomie.
   L'exécution de `dicho(0.01)` *renvoie* $2,11$.
   (c) Déduire de la question 4(a) que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique nombre, noté x_n, tel que $f(x_n) = \dfrac{1}{n}$.
   (d) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in [0;3]$.
   (e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer x_n en fonction de n et f^{-1}.
   (f) En déduire la limite de (x_n).

★★★★★★★

Exercice 5-bis

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n la fonction polynomiale définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}_n(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-x)^k}{k!}$$

1. **Question préliminaire.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{Q} : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ une fonction polynomiale de degré n. Justifier que $\lim_{x \to +\infty} \mathrm{Q}(x) = \lim_{x \to +\infty} a_n x^n$.
2. (a) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les limites de P_n en $+\infty$ et $-\infty$.
   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme P_n possède au moins une racine réelle.
3. (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}_n'(x) = -\mathrm{P}_n(x) - \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si x_n est racine de P_n, alors x_n n'est pas racine de P_n'.
   Autrement dit : les racines de P_n sont des racines simples.
4. (a) Vérifier : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^{2k}}{(2k)!}\left(1 - \dfrac{x}{2k+1}\right)$.
   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les racines de P_n appartiennent nécessairement à l'intervalle $[1; 2n+1]$.
5. (a) Établir :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} \mathrm{P}_{n+1}'(x) = -\mathrm{P}_n(x) - \dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \\ \mathrm{P}_{n+1}''(x) = \mathrm{P}_n(x) \end{cases}$$
   (b) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction P_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'une seule fois, en un réel noté u_n.
6. (a) Écrire une fonction `Python` telle que l'exécution de `P(n,x)` renvoie la valeur de $\mathrm{P}_n(x)$ pour un entier n et un réel x.
   (b) En déduire une fonction nommée `u` qui prend en argument d'entrée un entier naturel n et renvoie en sortie une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près obtenue à l'aide de la méthode de dichotomie.
7. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
8. On suppose dans cette question que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ.
   (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ |\mathrm{P}_n(u_n) - \mathrm{P}_n(\ell)| \leq e^{\ell} |u_n - \ell|$.
   (b) Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \mathrm{P}_n(\ell)$.
   (c) Aboutir à une contradiction.
9. Conclure sur la limite de la suite (u_n).

★★★★★★★

Fin du sujet