Devoir surveillé 1
Samedi 10 septembre - 2h00

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :

- ***la copie devra présenter une en-tête d'au moins une demi-page ainsi qu'une marge suffisante,***
- ***toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,***
- ***les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),***
- ***les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.***

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.

"Je ne crois pas au génie, seulement au dur travail."
Michel Petrucciani

De l'art de gagner et perdre des points...

Une seule façon de gagner des points :

UN ARGUMENT = UN POINT

Par exemple, il faut veiller à :

- justifier les étapes de calculs,
- justifier la dérivabilité d'une fonction,
- justifier les manipulations sur les inégalités,
- vérifier les hypothèses de tout théorème utilisé,
- citer les théorèmes utilisés,
- annoncer le type de raisonnement utilisé (par récurrence, par l'absurde, par équivalences, par double-implication...).

En revanche, les motifs de perte de points sont nombreux et les voici :

confusion d'objets / de vocabulaire	-1 par occurrence
absence de quantification	-1 par occurrence
mauvais emploi / absence de symboles mathématiques	-1 par occurrence
récurrence mal rédigée	-1 par occurrence
non sens	jusqu'à -2 par occurrence
absence ou erreur de numérotation des questions	-1 par occurrence
résultats non soulignés / encadrés	jusqu'à -3 sur la copie
absence / erreur de pagination	jusqu'à -3 sur la copie
copie insuffisamment soignée	jusqu'à -5 sur la copie

Exercice 1

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soient n en entier naturel et f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Traduire les énoncés suivants avec des quantificateurs :

   1.a. n est multiple de 3.
   $\exists k \in \mathbb{Z} \,/\, n = 3k$

   1.b. La fonction f n'est pas paire.
   $\exists x \in \mathbb{R}, \,/\, f(-x) \neq f(x)$

   1.c. La fonction f s'annule sur $\mathbb{R}$.
   $\exists x \in \mathbb{R} \,/\, f(x) = 0$

   1.d. La fonction f est la fonction constante égale à 2 sur $\mathbb{R}$.
   $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 2$

   1.e. La fonction f est constante sur $\mathbb{R}$.
   $\exists \mathrm{C} \in \mathbb{R} \,/\, \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{C}$

   1.f. La fonction f est bornée sur $\mathbb{R}$.
   $\exists \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbb{R} \,/\, \forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{A} \leq f(x) \leq \mathrm{B}$

   1.g. La fonction f n'est pas minorée sur $\mathbb{R}$.
   $\forall \mathrm{A} \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R} \,/\, f(x) < \mathrm{A}$

> ☞ **Rappel...**
> f, définie sur $\mathbb{R}$, est paire lorsque : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$.

> ✘ **Attention !**
> Ne pas confondre "s'annule" est "est nulle".

> ☞ **Rappels...**
> • Soit $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$. f est minorée sur $\mathbb{R}$ par A lorsque : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq \mathrm{A}$.
> • f est minorée sur $\mathbb{R}$ lorsque : $\exists \mathrm{A} \in \mathbb{R} \,/\, \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq \mathrm{A}$.

2. Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux assertions.

   2.a. Donner la réciproque de $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$.
   La réciproque de $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$ est $\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{P}$.

   2.b. Donner la contraposée de $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$.
   La contraposée de $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$ est $\text{non}\mathcal{Q} \Longrightarrow \text{non}\mathcal{P}$.

   2.c. Donner la négation de $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$.
   La négation de $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$ est $\mathcal{P}$ et $\text{non}\mathcal{Q}$.

3. Pour chacune des propositions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse, et justifier.

   3.a. $\forall a,b,c,d \in \mathbb{R},\ \big((a \leq b \text{ et } c \leq d) \Longrightarrow ac \leq bd\big)$
   FAUX (montrons que : $\exists a,b,c,d \in \mathbb{R} \,/\,$ "$a \leq b$ et $c \leq d$" et $ac > bd$).
   Posons $a = -2$, $b = 1$, $c = -3$ et $d = 2$. On a $a \leq b$ et $c \leq d$, et pourtant $ac = 6 > 2 = bd$.

> **Petite remarque**
> En revanche, si $a,b,c,d \in \mathbb{R}^+$, c'est vrai (il suffit même que $b,c,d \in \mathbb{R}^+$...).

   3.b. $\exists a,b \in \mathbb{R}^* \,/\, \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{ab}$
   VRAI.
   Soient $a,b \in \mathbb{R}^*$. Transformons le résultat pour y voir plus clair... On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{ab} &\iff \frac{ab}{a} + \frac{ab}{b} = 1 \quad \text{car } a,b \neq 0 \\ &\iff b + a = 1 \end{aligned}$$

   Posons maintenant : $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = \dfrac{1}{2}$. Dans ce cas, on a bien $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{ab}$.

> **Petite remarque**
> Et c'est le cas pour tout couple de réels non nuls (a,b) vérifiant $a + b = 1$. Il y a donc une infinité d'exemples possibles...

   3.c. Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, alors la fonction $g : x \longmapsto f(x) - f(-x)$ est impaire.
   VRAI (montrons que pour toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$, la fonction $g : x \longmapsto f(x) - f(-x)$ est impaire).
   Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. La fonction$g : x \longmapsto f(x) - f(-x)$ est alors également définie sur $\mathbb{R}$, ensemble symétrique par rapport à 0, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g(-x) &= f(-x) - f(x) \\ &= -\big(-f(-x) + f(x)\big) \\ &= -g(x) \end{aligned}$$

   Par conséquent, la fonction g est impaire.

   3.d. Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(-1) = f(1)$, alors f est paire.
   FAUX (montrons qu'il existe une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(-1) = f(1)$, sans que f ne soit paire).
   Posons $f : x \longmapsto x(x+1)(x-1)$. Ainsi, $f(-1) = 0$ et $f(1) = 0$, donc $f(-1) = f(1)$; et pourtant f n'est pas paire puisque $f(-2) = -6 \neq f(2)$.

> **Petite remarque**
> Ici, f est même impaire...

   3.e. Si f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, telles que f est croissante et g décroissante, alors $f \circ g$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.
   VRAI
   En effet, soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, telles que f est croissante et g décroissante, et soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 < x_2$.
   En appliquant g, qui est décroissante sur $\mathbb{R}$, on a :

$$g(x_1) \geq g(x_2)$$

   Et en appliquant f, qui est croissante sur $\mathbb{R}$, on obtient :

$$f(g(x_1)) \geq f(g(x_2))$$

   Autrement dit :

$$(f \circ g)(x_1) \geq (f \circ g)(x_2)$$

   C'est à dire que $f \circ g$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

3.f. Si f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, telles que f est croissante et g décroissante, alors $f+g$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

FAUX (montrons qu'il existe deux fonctions f et g, telles que f croissante, g croissante, mais que $f+g$ ne soit pas décroissante).

Considérons $f : x \longmapsto x$ ainsi que $g : x \longmapsto \frac{-1}{2}x$. La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$, la fonction g est décroissante sur $\mathbb{R}$, et pourtant la fonction $f+g : x \longmapsto \frac{1}{2}x$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

> **Petite remarque**
> Selon les cas, il est possible que $f+g$ soit croissante, décroissante, ou non monotone !

4. Résoudre l'inéquation $x^3 > x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} x^3 > x &\iff x^3 - x > 0 \\ &\iff x(x^2-1) > 0 \\ &\iff x(x+1)(x-1) > 0 \end{aligned}$$

> **➠Réflexe !**
> On factorise autant que possible !!

Tableau de signes de $x(x+1)(x-1)$:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x(x+1)(x-1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Conclusion : $x^3 > x$ lorsque $x \in]-1;0[\cup]1;+\infty[$.

5. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{9x^2-6x+1}}$.

Notons $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de la fonction f. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$x \in \mathcal{D}_f \iff 9x^2-6x+1 > 0$$

Or :

$$9x^2-6x+1 = (3x-1)^2$$

Donc :

$$9x^2-6x+1 > 0 \iff x \neq \frac{1}{3}$$

> **Petite remarque**
> Si ça vous chante, vous calculez le discriminant et vous faites un tableau de signes avec la règle "du signe de a à l'extérieur des racines" ! Ce qui justifie que $9x^2+6x+1$ est bien toujours strictement positif dès que $x \neq \frac{1}{3}$.

Conclusion : l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$.

6. Démontrer par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ (1+x)^n \geq 1+nx$$

> **✓ Rigueur !**
> Ne pas oublier de quantifier le x... Soit dans la récurrence (en début d'initialisation puis en début d'hérédité) ; soit avant la récurrence pour être tranquille.

- **Initialisation.** Pour $n=0$:
  Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $(1+x)^0 = 1$ et $1+0\times x = 1$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $(1+x)^0 \geq 1+0\times x$: l'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que "$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ (1+x)^n \geq 1+nx$" et montrons que "$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$".
  Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Par hypothèse de récurrence, on a :
  $$(1+x)^n \geq 1+nx$$
  D'où, en multipliant par $1+x$ (positif car $x \in \mathbb{R}^+$) :
  $$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x)$$
  C'est à dire :
  $$(1+x)^{n+1} \geq 1+nx+x+nx^2$$
  Mais $n \geq 0$ et $x^2 \geq 0$, donc $nx^2 \geq 0$. Ainsi :
  $$1+nx+x+nx^2 \geq 1+nx+x = 1+(n+1)x$$
  On en déduit donc :
  $$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$$
  L'hérédité est ainsi établie.

> **Important !**
> On mentionne les arguments utiles sur la manipulation des inégalités.

> **✘ Attention !**
> On ne veut pas d'équivalence dans l'hérédité... Déjà parce-que l'hérédité consiste à vérifier une implication ; et aussi parce-qu'en général, vous ne savez pas rédiger correctement par équivalence !

Conclusion : par récurrence, on a démontré que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $(1+x)^n \geq 1+nx$.

7. Soient $a,b,c \in \mathbb{R}$. Démontrer :

$$\left(\forall x \in \mathbb{R},\ ax^2+bx+c = 2x+1\right) \iff \begin{cases} a=0 \\ b=2 \\ c=1 \end{cases}$$

Raisonnons par double-implication...

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $\begin{cases} a=0 \\ b=2 \\ c=1 \end{cases}$.

Dans ce cas, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$ax^2+bx+c = 2x+1$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Réciproquement, supposons $\left(\forall x \in \mathbb{R},\ ax^2+bx+c=2x+1\right)$.
En particulier :

- pour $x=0$, on obtient directement $c=1$,
- pour $x=1$, on obtient $a+b+c=3$; mais comme $c=1$, on a : $a+b=2$,
- pour $x=-1$, on obtient $a-b+c=-1$; mais comme $c=1$, on a : $a-b=-2$

Puisque $a-b=2$ et $a+b=2$, en sommant ces deux égalités, on arrive à :

$$2a=0$$

Par conséquent, $a=0$, et comme $a+b=2$, il reste $b=2$.
Finalement :

$$\begin{cases} a=0 \\ b=2 \\ c=1 \end{cases}$$

Conclusion : on a établi l'équivalence : $\left(\forall x \in \mathbb{R},\ ax^2+bx+c=2x+1\right) \Longleftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=2 \\ c=1 \end{cases}$

Ce qu'il faut retenir des copies : Quelques remarques générales :

- L'ordre des quantificateurs est important... En particulier, la phrase "$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists C \in \mathbb{R} \,/\, f(x)=C$" ne signifie pas que f est constante sur $\mathbb{R}$ puisque cette phrase est valable pour toutes les fonctions ! En effet, dans cette phrase, C peut-être choisi après x et donc en fonction de x...
- Il y a beaucoup de confusion d'objets... On rappelle que f désigne une fonction (qui peut être continue, dérivable, croissante, définie sur...) alors que $f(x)$ est un réel (qui peut être positif, égal à, supérieur à,...).
Également, l'écriture "$f : x \longmapsto x^2+x$" se lit "la fonction f qui à x associe x^2+x" : elle représente donc une fonction, et pas un réel. Au passage, le x est muet dans cette écriture et n'a donc pas besoin d'être quantifié.
- Il est admissible qu'une récurrence ne soit pas correctement rédigée ! Le "Soit $n \in$ ..." en début d'hérédité est PRIMORDIAL au raisonnement (voir le principe de récurrence dans le chapitre 0).
- L'emploi du mot "donc" doit être précis : il indique un lien de causalité entre un résultat et ce qui précède directement. On n'est pas sur Instagram : essayons d'utiliser une vocabulaire approprié !

★★★★★★★

Exercice 2

On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^3-2}{x^2+1}$ et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Donner l'ensemble de définition de f puis étudier la parité de f.

   - Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait que $x^2+1 \neq 0$, donc $f(x)$ existe.

     Conclusion : l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

   - On a :

     $$f(1)=\frac{-1}{2} \quad ; \quad f(-1)=\frac{-3}{2}$$

     Ainsi :

     - puisque $f(-1) \neq f(1)$, f n'est pas paire ;
     - puisque $f(-1) \neq -f(1)$, f n'est pas impaire.

     Conclusion : f n'est ni paire, ni impaire.

Petite remarque
Vue la tête de f, on pense qu'elle n'est ni paire, ni impaire...

✘ Attention !
C'est la seule façon de montrer qu'une fonction n'est ni paire ni impaire !!
En effet, la négation de "$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x)=f(x)$" est "$\exists x \in \mathbb{R} \,/\, f(-x) \neq f(x)$" ; et pour prouver cela, il suffit de trouver un x de sorte que $f(-x) \neq f(x)$...

2. Déterminer la dérivée de f.
Posons $u : x \longmapsto x^3-1$ et $v : x \longmapsto x^2+1$, de sorte que $f=\dfrac{u}{v}$.
Les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et la fonction v ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, par conséquent, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^2(x^2+1)-2x(x^3-2)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{3x^4+3x^2-2x^4+4x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{x^4+3x^2+4x}{(x^2+1)^2} \\ &\underset{\text{Réflexe !}}{=} \frac{x(x^3+3x+4)}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

Rédaction
On se familiarise avec cette rédaction au point de se l'approprier !

3. On considère maintenant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = x^3 + 3x + 4$.

3.a. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.

On sait que :

- la fonction $x \longmapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,
- la fonction $x \longmapsto 3x + 4$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent, la fonction g est une somme de deux fonctions strictement croissantes sur $\mathbb{R}$.

Conclusion : f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3.b. Calculer $g(-1)$ puis en déduire le signe de $g(x)$, pour $x \in \mathbb{R}$.

- Sans difficulté : $\boxed{g(-1) = 0}$.
- De plus, puisque g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

4. Déduire des questions précédentes le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$. *Les limites ne sont pas demandées.*

On remarque que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$$

Ainsi, d'après la question précédente, on obtient :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x^2+1)^2$		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	$-\frac{3}{2}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	

5. Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{x^3-2}{x^2+1} - x \\ &= \frac{x^3 - 2 - \left(x(x^2+1)\right)}{x^2+1} \\ &= \frac{-x-2}{x^2+1} \end{aligned}$$

Or :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$-x-2$		$+$	0	$-$	
x^2+1		$+$		$+$	
$\frac{-x-2}{x^2+1}$		$+$	0	$-$	

Par conséquent :

$$\forall x \in]-\infty;-2[,\ f(x) > x$$
$$\forall x \in]-2;+\infty[,\ f(x) < x$$

Conclusion : $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la droite d'équation $y = x$ sur $]-\infty;-2[$,
$\mathcal{C}_f$ est au-dessous de la droite d'équation $y = x$ sur $]-2;+\infty[$,
$\mathcal{C}_f$ et la droite d'équation $y = x$ se rencontrent en le point de coordonnées $(-2;-2)$.

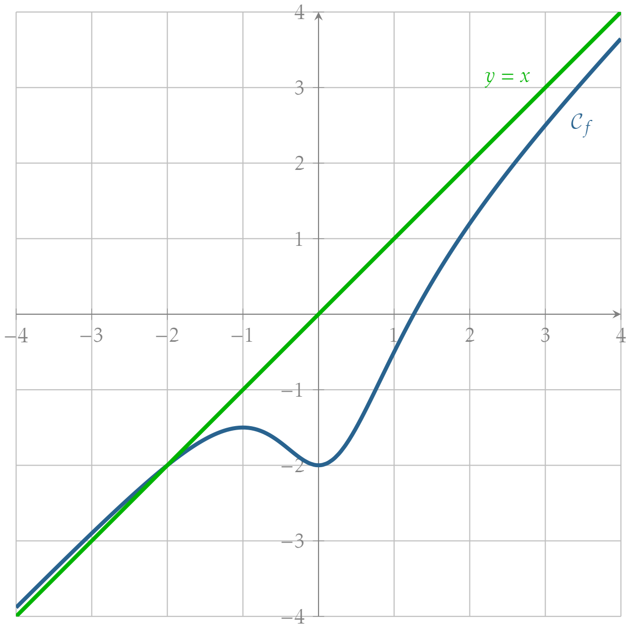
Vocabulaire

La droite d'équation $y = x$ est appelée **première bissectrice** (la seconde étant la droite d'équation $y = -x$).

6. Représenter l'allure de $\mathcal{C}_f$ dans un repère du plan judicieusement choisi. *Donnée :* $\sqrt[3]{2} \simeq 1,26$.

Important !

On pense à faire figurer toutes les informations connues :
- points connus,
- tangentes horizontales,
- positions relatives avec d'autres courbes.



Ce qu'il faut retenir des copies : Rappels sur la différence entre "$\forall x \in \mathbb{R}$" et "Soit $x \in \mathbb{R}$" :

- "$\forall x \in \mathbb{R}$" s'utilise devant une phrase mathématique (un prédicat) et n'est valable que pour cette seule phrase !
  En particulier, on ne commence pas des lignes de calculs par "$\forall x \in \mathbb{R}$" et on n'enchaîne surtout pas sur une phrase en français après avoir écrit "$\forall x \in \mathbb{R}$".
- "Soit $x \in \mathbb{R}$" s'utilise avant d'écrire une phrase mathématique ou avant de mener des étapes de calculs. Il est valable pour l'ensemble de la question (ou sous-question) traitée.

★★★★★★★

Exercice 3

L'objectif de l'exercice est de déterminer toutes les fonctions f, définies sur $\mathbb{Q}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{Q},\ f(x+y) = f(x) + f(y)$$

> ☞ **Pour info...**
> Cette équation fonctionnelle est appelée *équation de Cauchy*, du nom du célèbre mathématicien... Le résultat n'est plus vrai si on considère f définie sur $\mathbb{R}$ (à moins de considérer f continue sur $\mathbb{R}$) ; mais c'est plus délicat à établir et hors programme !

1. **Analyse.** Considérons f une fonction vérifiant : $\forall x, y \in \mathbb{Q},\ f(x+y) = f(x) + f(y)$.

   1.a. Déterminer $f(0)$.
   Utilisons la relation vérifiée par f avec $x = y = 0$, on obtient alors :
   $$f(0) = f(0) + f(0)$$
   D'où
   $$f(0) = 2f(0)$$
   et donc
   $$f(0) = 0$$
   Conclusion : $f(0) = 0$

   1.b. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = nf(1)$.
   Par récurrence...
   - **Initialisation.** Pour $n = 0$:
     $f(0) = 0$ et $0 \times f(1) = 0$: l'initialisation est ainsi vérifiée.
   - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que "$f(n) = nf(1)$" et montrons que "$f(n+1) = (n+1)f(1)$".
     On a :
     $$\begin{aligned} f(n+1) &= f(n) + f(1) \quad \text{(d'après l'équation fonctionnelle sur } f\text{)} \\ &= nf(1) + f(1) \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= (n+1)f(1) \end{aligned}$$
     L'hérédité est ainsi établie.

   Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) = nf(1)$.

1.c. Montrer : $\forall m \in]\!]-\infty;0]\!]$, $f(m) = mf(1)$.
Soit $m \in]\!]-\infty;0]\!]$. On a :

$$\begin{aligned} 0 &= f(0) \\ &= f(m-m) \\ &= f(m)+f(-m) && \text{relation fonctionnelle sur } f \\ &= f(m)+(-mf(1)) && \text{d'après la question 1.a, car } -m \in \mathbb{N} \\ &= f(m)-mf(1) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$f(m) - mf(1) = 0$$

D'où :

$$f(m) = mf(1)$$

. **Conclusion :** $\forall m \in]\!]-\infty;0]\!]$, $f(m) = mf(1)$.

1.d. Notons $a = f(1)$. Démontrer enfin que pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = ax$.
Soit $x \in \mathbb{Q}$. Il existe donc $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $x = \dfrac{p}{q}$.

- Ainsi, on obtient d'une part, $qx = p \in \mathbb{Z}$ et donc :

$$\begin{aligned} f(qx) &= f(p) \\ &= pf(1) && \text{d'après les questions précédentes, car } p \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

- Mais on a également, puisque $q \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} f(qx) &= f(\underbrace{x+x+\dots+x}_{q \text{ fois}}) \\ &= qf(x) && \text{relation fonctionnelle... analogue à la récurrence!} \end{aligned}$$

On en déduit donc :

$$pf(1) = qf(x)$$

Et comme $q \neq 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{p}{q}f(1) \\ &= xf(1) \end{aligned}$$

2. **Synthèse.** Vérifier que les fonctions linéaires sur $\mathbb{Q}$ sont des solutions du problème.
Supposons qu'il existe un réel a tel que pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = ax$. Dans ce cas, pour tout $x, y \in \mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned} f(x+y) &= a(x+y) \\ &= ax+ay \\ &= f(x)+f(y) \end{aligned}$$

Conclusion : les fonctions linéaires sur $\mathbb{Q}$ sont des solutions du problème.

3. Conclure.
Conclusion : les fonctions définies sur $\mathbb{Q}$ telles que $\forall x, y \in \mathbb{Q}$, $f(x+y) = f(x)+f(y)$ sont les fonctions linéaires.

Ce qu'il faut retenir des copies : Dommage que cet exercice n'ait pas été traité, certaines questions (1.a., 1.b., 2) sont très accessibles.