Devoir surveillé 1

Samedi 10 septembre - 2h00

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :

- ***la copie devra présenter une en-tête d'au moins une demi-page ainsi qu'une marge suffisante,***
- ***toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,***
- ***les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),***
- ***les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.***

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.

"Je ne crois pas au génie, seulement au dur travail."
Michel Petrucciani

De l'art de gagner et perdre des points...

Une seule façon de gagner des points :

UN ARGUMENT = UN POINT

Par exemple, il faut veiller à :

- justifier les étapes de calculs,
- justifier la dérivabilité d'une fonction,
- justifier les manipulations sur les inégalités,
- vérifier les hypothèses de tout théorème utilisé,
- citer les théorèmes utilisés,
- annoncer le type de raisonnement utilisé (par récurrence, par l'absurde, par équivalences, par double-implication...).

En revanche, les motifs de perte de points sont nombreux et les voici :

confusion d'objets / de vocabulaire	-1 par occurrence
absence de quantification	-1 par occurrence
mauvais emploi / absence de symboles mathématiques	-1 par occurrence
récurrence mal rédigée	-1 par occurrence
non sens	jusqu'à -2 par occurrence
absence ou erreur de numérotation des questions	-1 par occurrence
résultats non soulignés / encadrés	jusqu'à -3 sur la copie
absence / erreur de pagination	jusqu'à -3 sur la copie
copie insuffisamment soignée	jusqu'à -5 sur la copie

Exercice 1

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soient n en entier naturel et f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Traduire les énoncés suivants avec des quantificateurs :
   - **1.a.** n est multiple de 3.
   - **1.b.** La fonction f n'est pas paire.
   - **1.c.** La fonction f s'annule sur $\mathbb{R}$.
   - **1.d.** La fonction f est la fonction constante égale à 2 sur $\mathbb{R}$.
   - **1.e.** La fonction f est constante sur $\mathbb{R}$.
   - **1.f.** La fonction f est bornée sur $\mathbb{R}$.
   - **1.g.** La fonction f n'est pas minorée sur $\mathbb{R}$.
2. Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux assertions.
   - **2.a.** Donner la réciproque de $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$.
   - **2.b.** Donner la contraposée de $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$.
   - **2.c.** Donner la négation de $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$.
3. Pour chacune des propositions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse, et justifier.
   - **3.a.** $\forall a,b,c,d \in \mathbb{R},\ \big((a \leq b \text{ ET } c \leq d) \Longrightarrow ac \leq bd\big)$
   - **3.b.** $\exists a,b \in \mathbb{R}^* \ / \ \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{ab}$
   - **3.c.** Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, alors la fonction $g : x \longmapsto f(x) - f(-x)$ est impaire.
   - **3.d.** Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(-1) = f(1)$, alors f est paire.
   - **3.e.** Si f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, telles que f est croissante et g décroissante, alors $f \circ g$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.
   - **3.f.** Si f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, telles que f est croissante et g décroissante, alors $f + g$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.
4. Résoudre l'inéquation $x^3 > x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
5. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{9x^2 - 6x + 1}}$.
6. Démontrer par récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ (1+x)^n \geq 1 + nx$$
7. Soient $a,b,c \in \mathbb{R}$. Démontrer :
$$\big(\forall x \in \mathbb{R},\ ax^2 + bx + c = 2x + 1\big) \Longleftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \\ c = 1 \end{cases}$$

★★★★★★★

Exercice 2

On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^3 - 2}{x^2 + 1}$ et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Donner l'ensemble de définition de f puis étudier la parité de f.
2. Déterminer la dérivée de f.
3. On considère maintenant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = x^3 + 3x + 4$.
   - **3.a.** Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.
   - **3.b.** Calculer $g(-1)$ puis en déduire le signe de $g(x)$, pour $x \in \mathbb{R}$.
4. Déduire des questions précédentes le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$. *Les limites ne sont pas demandées.*
5. Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite d'équation $y = x$.
6. Représenter l'allure de $\mathcal{C}_f$ dans un repère du plan judicieusement choisi. *Donnée :* $\sqrt[3]{2} \simeq 1,26$.

★★★★★★★

Exercice 3

L'objectif de l'exercice est de déterminer toutes les fonctions f, définies sur $\mathbb{Q}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{Q},\ f(x+y) = f(x) + f(y)$$

1. **Analyse.** Considérons f une fonction vérifiant : $\forall x, y \in \mathbb{Q},\ f(x+y) = f(x) + f(y)$.
   - **1.a.** Déterminer $f(0)$.
   - **1.b.** Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = nf(1)$.
   - **1.c.** Montrer : $\forall m \in]\!]-\infty; 0]\!],\ f(m) = mf(1)$.
   - **1.d.** Notons $a = f(1)$. Démontrer enfin que pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = ax$.
2. **Synthèse.** Vérifier que les fonctions linéaires sur $\mathbb{Q}$ sont des solutions du problème.
3. Conclure.