Devoir surveillé 2
Samedi 8 octobre - 4h00

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :

- ***la copie devra présenter une en-tête d'au moins une demi-page ainsi qu'une marge suffisante,***
- ***toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,***
- ***les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),***
- ***les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.***

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.

"*Ce n'est pas la force, mais la persévérance, qui fait les grandes œuvres.*"
Samuel Johnson

De l'art de gagner et perdre des points...

Une seule façon de gagner des points :

UN ARGUMENT = UN POINT

Par exemple, il faut veiller à :

- justifier les étapes de calculs,
- justifier la dérivabilité d'une fonction,
- justifier les manipulations sur les inégalités,
- vérifier les hypothèses de tout théorème utilisé,
- citer les théorèmes utilisés (quand ils sont un nom),
- annoncer le type de raisonnement utilisé (par récurrence, par l'absurde, par équivalences, par double-implication...).

En revanche, les motifs de perte de points sont nombreux et les voici :

confusion d'objets / de vocabulaire	-1 par occurrence
absence de quantification	-1 par occurrence
mauvais emploi / absence de symboles mathématiques	-1 par occurrence
récurrence mal rédigée	-1 par occurrence
non sens	jusqu'à -2 par occurrence
manque de codage des opérations dans la résolution d'un système	-1 par résolution
absence ou erreur de numérotation des questions	-1 par occurrence
résultats non soulignés / encadrés	jusqu'à -3 sur la copie
absence / erreur de pagination	jusqu'à -3 sur la copie
copie insuffisamment soignée	jusqu'à -5 sur la copie

Ce qu'il faut retenir des copies : Les bons points / conseils et inspirations...

- Les questions `Python` ont été plutôt bien traitées (sauf celle de l'exercice 3) : point très positif et encourageant !
- Il n'est pas désagréable d'avoir une page de garde complète...
- Pensez à mettre un peu de couleur dans votre copie (et des paillettes dans vos vies) : souligner en rouge est toujours plus lisible... Et rien ne vous empêche de faire comme M.I. : numéroter les questions en rouge (puisque vous avez le stylo rouge en main à ce moment-là...).

Exercice 1

Les questions de cet exercice sont indépendantes entre elles.

1. Donner l'écriture quantifiée de "la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée" puis sa négation.
   "La suite (u_n) est majorée" : $\exists M \in \mathbb{R} \;/\; \forall n \in \mathbb{N},\; u_n \leq M$".
   Sa négation ("la suite (u_n) n'est pas majorée") : $\forall M \in \mathbb{R},\; \exists n \in \mathbb{N} \;/\; u_n > M$.

2. **Vrai ou faux.** Pour chaque affirmation, préciser si elle est vraie ou fausse, et justifier.

   2.a. $\forall x \in \mathbb{R},\; \sqrt{x^2} = x.$
   FAUX
   En effet, si $x = -1$, on a $\sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1 \neq -1$

   ☞ Rappel...
   $\forall x \in \mathbb{R},\; \sqrt{x^2} = |x|$

   2.b. Si une suite est bornée, alors elle est décroissante à partir d'un certain rang.
   FAUX
   Posons (u_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\; u_n = (-1)^n$.
   La suite (u_n) est bornée (par -1 et 1), et pourtant, elle ne sera jamais décroissante...

   Petite remarque
   N'importe quelle suite bornée et strictement croissante fournit un contre-exemple... On peut penser à la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\; u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$...

   2.c. $\exists x, y \in \mathbb{R} \;/\; \exp(x+y) = \exp(x) + \exp(y).$
   VRAI
   Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a :
   $$\exp(x+y) = \exp(x) + \exp(y) \iff \exp(x)\exp(y) = \exp(x) + \exp(y)$$
   On cherche donc deux nombres a et b strictement positifs tels que $ab = a + b$. En prenant $a = 2$ et $b = 2$, l'équation est vérifiée...
   Par conséquent, en prenant $x = \ln(2)$ et $y = \ln(2)$, on a bien $\exp(x+y) = \exp(x) + \exp(y)$.

   2.d. La somme de deux suites géométriques est une suite géométrique.
   FAUX
   Considérons les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par : $\forall n \in \mathbb{N},\; u_n = 2^n \;;\; v_n = 3^n \;;\; w_n = u_n + v_n$.
   Les suites (u_n) et (v_n) sont toutes deux géométriques.
   Pourtant : $w_0 = 2,\; w_1 = 5,\; w_2 = 13$. Puisque $\dfrac{w_2}{w_1} \neq \dfrac{w_1}{w_0}$, la suite (w_n) n'est pas géométrique.

   2.e. Le produit de deux suites géométriques est une suite géométrique.
   VRAI
   Soient $q, q' \in \mathbb{R}$ ainsi que (u_n) et (v_n) deux suites géométriques de raison respectivement q et q'.
   Posons (w_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\; w_n = u_n \times v_n$.
   On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$\begin{aligned} w_{n+1} &= u_{n+1}v_{n+1} \\ &= q u_n q' v_n && \text{car } (u_n) \text{ est géométrique de raison } q \text{ et } (v_n) \text{ géométrique de raison } q' \\ &= qq' w_n \end{aligned}$$
   Par conséquent : la suite (w_n) est géométrique (de raison qq').

3. Résoudre l'inéquation $\ln(x+1)^2 \leq 4$, d'inconnue $x \in]-1;+\infty[$.
   Soit $x \in]-1;+\infty[$.
   On a :
   $$\begin{aligned} \ln(x+1)^2 \leq 4 &\iff -2 \leq \ln(x+1) \leq 2 \\ &\iff e^{-2} \leq x+1 \leq e^2 && \text{par stricte croissance de exp sur } \mathbb{R} \\ &\iff e^{-2} - 1 \leq x \leq e^2 - 1 \end{aligned}$$

   ☞ Rappels...
   • D'après le cours de 2nde, on a : $\forall X \in \mathbb{R},\; \left(X^2 \leq 4 \iff -2 \leq X \leq 3\right)$ inutile de détailler cette équivalence !
   • la **stricte** croissance est nécessaire pour remonter l'équivalence...

4. On considère la fonction $f : x \longmapsto x^x$ définie sur $\mathbb{R}_*^+$. Dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}_*^+$.
   On a :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_*^+,\; f(x) \underset{\text{Réflexe !}}{=} e^{x\ln(x)}$$
   Ainsi :
   $$f = \exp \circ (\mathrm{id} \times \ln)$$
   - id et ln sont dérivables sur $\mathbb{R}_*^+$, donc id $\times$ ln également ; et comme exp est dérivable sur $\mathbb{R}$, par composition, f est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$.
   - Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$. On a :
   $$\begin{aligned} f'(x) &= \left(1\ln(x) + x\frac{1}{x}\right)e^{x\ln(x)} \\ &= (\ln(x) + 1)e^{x\ln(x)} \end{aligned}$$
   Or :
   $$\begin{aligned} \ln(x) + 1 > 0 &\iff \ln(x) > -1 \\ &\iff x > e^{-1} && \text{par stricte croissance de exp sur } \mathbb{R} \end{aligned}$$
   - D'où :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖	↘	$e^{-e^{-1}}$	↗	

5. Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{3^{2k+1}}$.

On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{3^{2k+1}} &= \frac{1}{3}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(3^2)^k} \\
&= \frac{1}{3}\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{9}\right)^k \\
&= \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{9}\right)^k - \left(1+\frac{1}{9}\right)\right) && \text{car } \frac{1}{9} \neq 1 \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{9}} - \frac{10}{9}\right) \\
&= \frac{1}{3}\,\frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}}{\frac{8}{9}} - \frac{10}{27} \\
&= \frac{3}{8}\left(1-\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}\right) - \frac{10}{27}
\end{aligned}$$

6. Soit $n \in [\![3;+\infty[\![$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} 6(k-3)^2$.

On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=3}^{n} 6(k-3)^2 &= 6\sum_{k=3}^{n} (k-3)^2 && \text{changement d'indice } i=k-3 \\
&= 6\sum_{i=0}^{n-3} i^2 \\
&= 6\frac{(n-3)(n-2)(2(n-3)+1)}{6} && \text{car } n-3 \in \mathbb{N} \\
&= (n-3)(n-2)(2n-5)
\end{aligned}$$

7. Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.

On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) &= \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) \\
&= \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\right) \\
&= \sum_{k=2}^{n} \ln(k-1)+\ln(k+1)-2\ln(k) && \text{linéarité de la somme} \\
&= \sum_{k=2}^{n} \ln(k-1)+\sum_{k=2}^{n} \ln(k+1)-\sum_{k=2}^{n} \ln(k)-\sum_{k=2}^{n} \ln(k) && \text{télescopages} \\
&= \ln(1)-\ln(n)-\ln(2)+\ln(n+1) \\
&= -\ln(2)+\ln(n+1)-\ln(n)
\end{aligned}$$

Petite remarque

On peut aussi commencer par :

$$\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \ln\left(\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\right)$$

puis continuer comme dans Chapitre 2 - Exercice 4 - 4 (cela fait travailler sur $\prod$ au lieu de $\sum$).

8. Déterminer le terme général de la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \ ; \ u_1 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n \end{cases}$

- (u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $x^2-4x+4=0$, dont l'unique solution est 2.
- Par conséquent :

$$\exists!\lambda,\mu \in \mathbb{R} \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda n+\mu)2^n$$

- Or $u_0 = 1$ et $u_1 = 4$. De plus :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = 1 \\ 2(\lambda+\mu) = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = 1 \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (n+1)2^n$.

9. On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \ ; \ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n + 2 \end{cases}$.

On définit également la suite (v_n) par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{n+1} - u_n$.

9.a. Montrer que la suite (v_n) est une suite arithmético-géométrique.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+2} - u_{n+1} \\ &= \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n + 2 - u_{n+1} \\ &= \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n + 2 \\ &= \frac{1}{2}v_n + 2 \end{aligned}$$

Conclusion : la suite (v_n) est arithmético-géométrique.

9.b. Déterminer alors le terme général de (v_n).

- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$x = \frac{1}{2}x + 2 \iff x = 4$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On a ainsi :

$$\begin{cases} 4 = \frac{1}{2} \times 4 + 2 \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + 2 \end{cases}$$

D'où, en soustrayant les deux lignes :

$$v_{n+1} - 4 = \frac{1}{2}(v_n - 4)$$

Par conséquent, la suite $(v_n - 4)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{3}{2}$ et de premier terme $v_0 - 4 = u_1 - u_0 - 4 = -3$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n - 4 = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4$.

Petite remarque

Sinon, on introduit la suite (w_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = v_n - 4$. Puis on montre que (w_n) est géométrique...

9.c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par télescopage, on a directement :

$$\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) = u_n - u_0$$

Mais $u_0 = 0$...

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) = u_n$.

9.d. Déduire des questions précédentes le terme général de (u_n).

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) && \text{d'après la question précédente} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} v_k && \text{question 9.b.} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(-3\left(\frac{1}{2}\right)^k + 4\right) && \text{par linéarité de la somme} \\ &= -3\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k + \sum_{k=0}^{n-1} 4 && \text{car } \frac{1}{2} \neq 1 \\ &= -3\,\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} + 4n \\ &= -6\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) + 4n \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = -6\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) + 4n$$

- La relation établie est-elle encore valable pour $n = 0$?
On a :

$$\begin{aligned} -6\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^0\right) + 4 \times 0 &= -6(1-1) \\ &= 0 \\ &= u_0 \end{aligned}$$

La relation établie au point précédent est donc encore valable pour $n = 0$.

✓ Rigueur !

Le résultat établi n'est valable, a priori, que pour $n \in \mathbb{N}^*$. Il reste donc à regarder si on peut inclure le cas $n = 0$ dans le résultat général, ou non.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -6\left(1 - \left(\frac{3}{2}\right)^n\right) + 4n$.

Ce qu'il faut retenir des copies :

- Il faut veiller à fournir les bons raisonnements dans le vrai/faux... Pour rappel :

	VRAI	FAUX
assertion débutant par "$\forall$"	démonstration !	contre-exemple
assertion débutant par "$\exists$"	exemple	démonstration de la négation

- Attention à l'introduction d'une suite : "la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \ldots, \ldots$".
- Il est relativement inadmissible de ne pas savoir résoudre l'inéquation de la question 3.. Ce n'est pas une blague quand je dis que c'est du cours du seconde. Au passage, c'était un des critères de passage en première générale quand j'étais enseignant en classe de 2nde...
- La dérivabilité d'une composée est souvent mal rédigée ! Voici le théorème du cours :

$$\left.\begin{array}{l} u \text{ est dérivable sur I, à valeurs dans J} \\ f \text{ est dérivable sur J} \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad f \circ u \text{ est dérivable sur I et : } \big(f \circ u\big)' = u' \times f' \circ u$$

- Le calcul de la question 5. est à revoir pour bon nombre d'entre vous ! Puissances, sommes, gestion de la somme qui débute à 2... les techniques ne sont pas souvent maîtrisées !

★★★★★★★

Exercice 2

On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

1. Calculer S_1, S_2 et S_3. *Les résultats seront donnés sous forme d'entiers ou de fractions irréductibles.*
   Sans difficulté :
   $$S_1 = 1 \ ;\ S_2 = \frac{5}{4} \ ;\ S_3 = \frac{49}{36}$$

2. Écrire une fonction Python telle que l'exécution de la commande `suite_S(n)` renvoie la valeur de S_n, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

```
def suite_S(n):
    S=0
    for k in range(1,n+1):
        S=S+1/k**2
    return S
```

3. Étudier les variations de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :
   $$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} > 0 \end{aligned}$$

   Conclusion : la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

4. **4.a.** Établir :
   $$\forall k \in [\![2;+\infty[\![,\ \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$$

   Soit $k \in [\![2;+\infty[\![$. On a :
   $$k^2 \geq k^2 - k$$
   C'est à dire :
   $$k^2 \geq k(k-1)$$
   Et, par décroissance de $\frac{1}{\cdot}$ sur $\mathbb{R}_*^+$ (on a $k(k-1) > 0$), on obtient :
   $$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$$

   Conclusion : $\forall k \in [\![2;+\infty[\![,\ \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$.

   Petite remarque
   Il est également possible d'étudier le signe de $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$ après mise sous même dénominateur...

   ✘ Attention !
   "décroissance de $\frac{1}{\cdot}$ sur $\mathbb{R}^*$" n'a AUCUN SENS ! On parle de monotonie sur un **intervalle** ("sur $[\![2;+\infty[\![$ n'a AUCUN SENS pour la même raison).

   ♡ Astuce du chef ! ♡
   $1 = k - (k-1)$...

   4.b. Déterminer les deux réels a et b tels que pour tout $k \in [\![2;+\infty[\![$: $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k-1}$.

   En déduire, pour $n \in [\![2;+\infty[\![$, une expression simplifiée de $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$.

   - Soit $k \in [\![2;+\infty[\![$. On a :
   $$\begin{aligned} \frac{1}{k(k-1)} &= \frac{k-(k-1)}{k(k-1)} \\ &= \frac{k}{k(k-1)} - \frac{k-1}{k(k-1)} \\ &= \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \end{aligned}$$

   Conclusion : $\forall k \in [\![2;+\infty[\![,\ \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

   - Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$. D'après le point précédent, on a :
   $$\forall k \in [\![2;n]\!],\ \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$
   D'où, en sommant de 2 à n :
   $$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} && \text{par linéarité de la somme} \\ &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} && \text{par télescopage} \\ &= 1 - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

   Conclusion : $\forall n \in [\![2;+\infty[\![,\ \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 - \frac{1}{n}$.

4.c. Déduire des questions précédentes :

$$\forall n \in [\![2;+\infty[\![,\ S_n \leq 2 - \frac{1}{n}$$

Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$. D'après la question **4.a.**, on a :

$$\forall k \in [\![2;n]\!],\ \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$$

D'où, en sommant de 2 à n :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$$

Puis, d'après la question précédente, et par transitivité :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 - \frac{1}{n}$$

Ainsi :

$$1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

Autrement dit :

$$S_n \leq 2 - \frac{1}{n}$$

Conclusion : $\forall n \in [\![2;+\infty[\![,\ S_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.

5. Démontrer enfin que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

- La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, elle est donc minorée par son premier terme, qui vaut 1.
- De plus, d'après la question précédente :

$$\forall n \in [\![2;+\infty[\![,\ S_n \leq 2 - \frac{1}{n}$$

✘ Attention !

$2 - \frac{1}{n}$ ne peut être un majorant de (S_n), car un majorant de (S_n) ne peut pas dépendre de n ! Revoir la définition de (S_n) est majorée : la quantification en M est AVANT la quantification en n...

Ainsi, puisque "$\forall n \in [\![2;+\infty[\![,\ \frac{1}{n} > 0$", par transitivité :

$$\forall n \in [\![2;+\infty[\![,\ S_n \leq 2$$

Mais comme $S_1 = 1$, on a aussi $S_1 \leq 2$. Par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n \leq 2$$

Conclusion : la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée par 1 et 2.

Ce qu'il faut retenir des copies : Exercice trop proche de celui donné en DM2 pour être si mal réussi...
Il faut tout de même noter que, la plupart du temps, la question 4.b. est bien rédigée, avec la bonne quantification en k à l'intérieur des équivalences ; c'est très bien !

★★★★★★★

Exercice 3

L'objectif de l'exercice est de déterminer le terme général de la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \ ; \ u_1 = 0 \ ; \ u_2 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$$

(u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 3, dont l'équation caractéristique est : $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$.

1. Recopier et compléter le programme suivant afin que l'exécution de `suite_u(n)` renvoie la valeur de u_n, pour $n \in \mathbb{N}$.

```python
def suite_u(n):
    if n==0 or n==1:
        ..........
    elif n==2:
        ..........
    else:
        u,v,w=..........
        for k in .......... :
            .........................
            .........................
        return ...
```

```python
def suite_u(n):
    if n==0 or n==1:
        return 0
    elif n==2:
        return 1
    else:
        u,v,w=0,0,1
        for k in range(3,n+1):
            u,v,w=v,w,2*w+v-2*u
        return w
```

2. Résoudre l'équation $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On remarque que 1 est solution évidente de cette équation... D'où, par factorisation de tête :

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x-1)(x^2 - x - 2)$$

Conclusion : les solutions de l'équation $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ sont -1, 1 et 2.

3. Soient $q \in \mathbb{R}^*$ et (v_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme $v_0 \neq 0$. Établir l'équivalence :

$$\Big(\forall n \in \mathbb{N}, \ v_{n+3} = 2v_{n+2} + v_{n+1} - 2v_n\Big) \iff q \in \{-1;1;2\}$$

Puisque (v_n) est géométrique de raison q, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \ v_n = v_0 q^n$.
On a alors :

$$\begin{aligned}
\Big(\forall n \in \mathbb{N}, \ v_{n+3} = 2v_{n+2} + v_{n+1} - 2v_n\Big) &\iff \Big(\forall n \in \mathbb{N}, \ v_0 q^{n+3} = 2v_0 q^{n+2} + v_0 q^{n+1} - 2v_0 q^n\Big) \\
&\iff \Big(\forall n \in \mathbb{N}, \ v_0 q^n (q^3 - 2q^2 - q + 2) = 0\Big) \\
&\iff q^3 - 2q^2 - q + 2 = 0 && v_0 \neq 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \ q^n \neq 0 \\
&\iff q \in \{-1;1;2\} && \text{d'après la question précédente}
\end{aligned}$$

4. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Considérons la suite (w_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \ w_n = \alpha + \beta(-1)^n + \gamma 2^n$.
   4.a. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}, \ w_{n+3} = 2w_{n+2} + w_{n+1} - 2w_n$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
2w_{n+2} + w_{n+1} - 2w_n &= 2\alpha + 2\beta(-1)^{n+2} + 2\gamma 2^{n+2} + \alpha + \beta(-1)^{n+1} + \gamma 2^{n+1} - 2\alpha - 2\beta(-1)^n - 2\gamma 2^n \\
&= \alpha + \beta\Big(2(-1)^{n+2} + (-1)^{n+1} - 2(-1)^n\Big) + \gamma\Big(2 \times 2^{n+2} + 2^{n+1} - 2 \times 2^n\Big) \\
&= \alpha + \beta\Big(2(-1)^n + (-1)^{n+3} - 2(-1)^n\Big) + \gamma 2^n (2^3 + 2 - 2) \\
&= \alpha + \beta(-1)^{n+3} + \gamma 2^{n+3} \\
&= w_{n+3}
\end{aligned}$$

☞ **Rappel...**
$(-1)^{n+2} = (-1)^2(-1)^n = (-1)^n$...

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}, \ w_{n+3} = 2w_{n+2} + w_{n+1} - 2w_n$.

4.b. Déterminer les valeurs de α, β et γ de sorte que $w_0 = 0$, $w_1 = 0$ et $w_2 = 1$.

On a : $w_0 = 0$, $w_1 = 0$ et $w_2 = 1$. Or :

$$\left\{\begin{array}{lcl} w_0 & = & 0 \\ w_1 & = & 0 \\ w_2 & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} \alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 0 \\ \alpha & - & \beta & + & 2\gamma & = & 0 \\ \alpha & + & \beta & + & 4\gamma & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} \alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 0 \\ & - & 2\beta & + & \gamma & = & 0 \\ & & & & 3\gamma & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_1 \longleftarrow 3L_1 - L_3 \\ L_2 \longleftarrow 3L_2 - L_3}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3\alpha & + & 3\beta & & & = & -1 \\ & - & 6\beta & & & = & -1 \\ & & & & 3\gamma & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_1 \longleftarrow 2L_1 + L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 6\alpha & & & & & = & -3 \\ & - & 6\beta & & & = & -1 \\ & & & & 3\gamma & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} \alpha & = & \frac{-1}{2} \\ \beta & = & \frac{1}{6} \\ \gamma & = & \frac{1}{3} \end{array}\right.$$

Conclusion : $\alpha = \frac{-1}{2}$, $\beta = \frac{1}{6}$, $\gamma = \frac{1}{3}$.

5. Conclure.

D'après les questions **4.a.** et **4.b.**, la suite (w_n) vérifie la même relation de récurrence que la suite (u_n), et a les mêmes premiers termes.
Par récurrence immédiate (récurrence triple ici), on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = w_n$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{-1}{2} + \frac{1}{6}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n$.

CQFR

Ce qu'il faut retenir des copies : Exercice peu traité et souvent mal traité (et maltraité)... Il y avait cependant des questions faciles avec des points à prendre : 1., 2,ă4.b..

★★★★★★★

Exercice 4

On considère la fonction

$$f : x \longmapsto \ln\left(1+\frac{x}{2}\right)$$

ainsi que la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère du plan.

1. **Étude de la fonction f.**

1.a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

Notons $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de la fonction f. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{D}_f &\iff 1+\frac{x}{2} > 0 \\ &\iff \frac{x}{2} > -1 \\ &\iff x > -2 \end{aligned}$$

Conclusion : l'ensemble de définition de f est $]-2;+\infty[$.

1.b. Étudier les variations de f sur $]-2;+\infty[$.

- Posons $u : x \longmapsto 1+\frac{x}{2}$ de sorte que $f = \ln \circ u$.
  - la fonction u est une fonction affine strictement croissante sur $]-2;+\infty[$ et strictement positive sur ce même intervalle,
  - la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_*^+$.

  Ainsi, par composition, la fonction f est strictement croissante sur $]-2;+\infty[$.
- Soit $x \in]-2;+\infty[$. On a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{2+x} \end{aligned}$$

- Puisque $x > -2$, on a $f'(x) > 0$.
  D'où la stricte croissance de f sur $]-2;+\infty[$.

Conclusion : f est strictement croissante sur $]-2;+\infty[$.

Petite remarque
On peut aussi traiter cette question sans dériver f, mais comme on demande une équation de tangente à la question suivante, autant calculer f' ici...!

Sans dériver :
Posons $u : x \longmapsto 1+\frac{x}{2}$ de sorte que $f = \ln \circ u$.

- la fonction u est une fonction affine strictement croissante sur $]-2;+\infty[$ et strictement positive sur ce même intervalle,
- la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_*^+$

f est donc la composée de deux fonctions strictement croissantes sur les intervalles adéquats...
Conclusion : la fonction f est strictement croissante sur $]-2;+\infty[$.

1.c. Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0. *On notera $\mathcal{T}_0$ cette tangente.*

On a : $\mathrm{T}_0 : y = f'(0)(x-0+f(0)$.

Conclusion : $\mathcal{T}_0 : y = \frac{1}{2}x$.

✘ Attention !
Dans une équation de droite, x et y sont muets.

1.d. Établir :

$$\forall x \in]-2;+\infty[,\ \ln\left(1+\frac{x}{2}\right) \leq \frac{1}{2}x$$

➠Réflexe !
En absence d'inspiration, on pose $g : x \longmapsto \ln\left(1+\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}x$ et on cherche à établir : $\forall x \in]-2;+\infty[,\ g(x) \leq 0$.
Pour cela, on va dresser le tableau de variations de g et **espérer** que sa lecture nous permettra d'obtenir le signe de $g(x)$!

Posons $g : x \longmapsto \ln\left(1+\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}x$, définie sur $]-2;+\infty[$.

- g est dérivable sur $]-2;+\infty[$, comme somme de deux fonctions dérivables sur ce même intervalle.
- Soit $x \in]-2;+\infty[$. On a, en utilisant $f'(x)$ obtenu à la question **1.b.** :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{2+x} - \frac{1}{2} \\ &\underset{\text{Réflexe !}}{=} \frac{2-(2+x)}{2(2+x)} \\ &= \frac{-x}{2(2+x)} \end{aligned}$$

D'où :

x	-2		0		$+\infty$
signe de $g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
variations de g	‖	↗	0	↘	

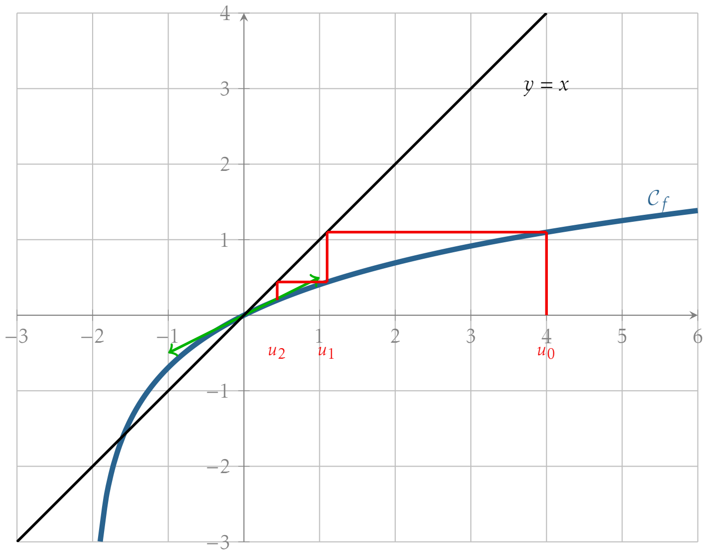
Petite remarque
On procède ainsi, tant que la convexité n'aura pas été revue...
En revanche, on pourrait dire que f est concave sur $]-2;+\infty[$ (composée d'une fonction affine et d'une fonction concave) ; $\mathcal{C}_f$ est donc partout au-dessous de toutes ces tangentes, et en particulier, au-dessous de $\mathcal{T}_0$...

- Par conséquent, le maximum de g sur $]-2;+\infty[$ est 0, atteint en 0. Ainsi :

$$\forall x \in]-2;+\infty[,\ g(x) \leq 0$$

Conclusion : $\forall x \in]-2;+\infty[,\ \ln\left(1+\frac{x}{2}\right) \leq \frac{1}{2}x$.

1.e. Représenter l'allure de $\mathcal{C}_f$ dans un repère du plan judicieusement choisi. *Donnée :* $\ln(3) \simeq 1,1$.



IMPORTANT !
On fait figurer la tangente à la courbe de f ; et on la fait coller à cette tangente en le point de tangence...

2. Étude de la suite (u_n).

2.a. Compléter le graphique obtenu à la question **1.e.** par le tracé des premiers termes de la suite (u_n). Que peut-on conjecturer ?

On peut conjecturer que la suite (u_n) est décroissante (et converge vers 0).

2.b. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 0$.

Par récurrence...

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
  u_0 existe et vaut 4, donc $u_0 > 0$.
  L'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons "u_n existe et $u_n > 0$" et montrons "u_{n+1} existe et $u_{n+1} > 0$".
  - Par hypothèse de récurrence, u_n existe et $u_n > 0$.
    En particulier, $u_n > -2$, et donc, f étant définie sur $]-2;+\infty[$, $]f(u_n)$ existe.
    Autrement dit, u_{n+1} existe.
  - Par hypothèse de récurrence, on a également :
    $$u_n > 0$$
    D'où, f étant strictement croissante sur $]-2;+\infty[$ (en particulier sur $\mathbb{R}^+$) :
    $$f(u_n) > f(0)$$
    Et puisque $f(0) = 0$, on obtient :
    $$u_{n+1} > 0$$

  L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 0$.

PETITE REMARQUE
La question de l'existence de chaque terme d'une suite récurrente se pose à chaque fois que la fonction f n'est pas définie sur $\mathbb{R}$.
Ici, il faut s'assurer que **l'intervalle $]-2;+\infty[$ est stable par f.**

2.c. Écrire une fonction `Python` telle que l'exécution de `suite_u(n)` renvoie la valeur de u_n, pour $n \in \mathbb{N}$.

```python
import numpy as np

def suite_u(n):
    u=4
    for k in range(1,n+1):
        u=np.log(1+u/2)
    return u
```

2.d. En utilisant le résultat établi à la question **1.d.**, établir :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.
D'après la question précédente, on sait que $u_n > 0$. En particulier, $u_n \in]-2;+\infty[$. On peut donc appliquer le résultat de la question **1.d.** avec $x = u_n$.
On obtient :

$$\ln\left(1+\frac{u_n}{2}\right) \leq \frac{1}{2}u_n$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$.

2.e. Déduire du résultat précédent que la suite (u_n) est strictement décroissante ; et établir par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \frac{1}{2^{n-2}}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après le résultat précédent :

$$u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$$

D'où :

$$u_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{2} u_n - u_n$$

C'est à dire :

$$u_{n+1} - u_n \leq \frac{-1}{2} u_n$$

Or $u_n > 0$, d'où $\frac{-1}{2} u_n < 0$. Par transitivité, on obtient :

$$u_{n+1} - u_n < 0$$

Conclusion : la suite (u_n) est strictement décroissante.

> **Petite remarque**
> Exceptionnellement, on peut étudier $\frac{u_{n+1}}{u_n}$...
> Puisque $u_n > 0$ et que $u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$, on obtient $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2} < 1$.
> Et ainsi (car $u_n > 0$ encore une fois) : $u_{n+1} < u_n$...

- ◇ **Initialisation.** Pour $n = 0$:
  $u_0 = 4$ et $\frac{1}{2^{-2}} = 2^2 = 4$.
  On a bien $u_0 \leq \frac{1}{2^{0-2}}$.

  ◇ **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons "$u_n \leq \frac{1}{2^{n-2}}$" et montrons "$u_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$".
  Par hypothèse de récurrence, on a :

$$u_n \leq \frac{1}{2^{n-2}}$$

  D'où, en multipliant par $\frac{1}{2}$ (positif) :

$$\frac{1}{2} u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

  Or, d'après la question **1.d.**, on a :

$$u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$$

  D'où, par transitivité :

$$u_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

  L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \frac{1}{2^{n-2}}$.

2.f. **Question facultative.** Que peut-on déduire sur la suite (u_n) ?
D'après les questions 2.b. et 2.e., on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n \leq \frac{1}{2^{n-2}}$$

Or : $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^{n-2}} = 0$.
Par théorème d'encadrement, on obtient :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

Conclusion : la suite (u_n) converge vers 0.

CQFR

Ce qu'il faut retenir des copies : C'est un exercice très classique sur les suites récurrentes... Quelques remarques sur ce qui a été vu :

- la justification de la dérivabilité de f est à revoir ! Pour rappel : **"si u est dérivable sur I et strictement positive sur I, alors $\ln \circ u$ est dérivable sur I, et..."**.
- La question 1.d. doit être revue. Il faut impérativement penser à la méthode effectuée dans le corrigé. Pour rappel, je vous invite à revoir l'exercice 18 du chapitre 1...
- Dans la récurrence de la question 2.b, il est important de bien rédiger l'existence de u_{n+1}.
  u_{n+1} existe ssi $f(u_n)$ existe ; c'est à dire ssi $u_n \in \mathcal{D}_f$. C'est sur ce point qu'il faut réfléchir... (pas trop longtemps, car c'est trivial, suffit de le dire !).
- Attention, la phrase "$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{1}{2} x \leq x$" est FAUSSE ! Il est donc nécessaire, dans la question 2.e de mentionner la positivité de u_n...
- La récurrence de la question 2.e est un grand classique de cet exercice... Nous aurons l'occasion d'en faire plusieurs autres "identiques" dans l'année.

★★★★★★★

Exercice 5

On considère les fonctions ch et sh définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad ; \quad \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

1. Étude des fonctions ch et sh

1.a. Étudier la parité des fonctions ch et sh.

ch et sh sont définies sur $\mathbb{R}$ qui est un ensemble symétrique par rapport à 0, et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{ch}(-x) = \ldots = \mathrm{ch}(x) \ \ ; \ \ \mathrm{sh}(-x) = \ldots = -\mathrm{sh}(x)$$

Conclusion : ch est une fonction paire et sh une fonction impaire.

1.b. Dresser le tableau de variations de ch sur $\mathbb{R}$.

ch est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\mathrm{ch}'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Et :

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}'(x) > 0 &\iff e^x > e^{-x} \\ &\iff x > -x \quad \text{par stricte croissance de ln sur } \mathbb{R}_*^+ \\ &\iff 2x > 0 \\ &\iff x > 0 \end{aligned}$$

D'où :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $\mathrm{ch}'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de ch		$\searrow$	1	$\nearrow$	

1.c. Résoudre l'équation $\mathrm{sh}(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \mathrm{sh}(x) = 0 &\iff e^x - e^{-x} = 0 \\ &\iff e^x = e^{-x} \\ &\iff x = -x \quad \text{stricte croissance de ln sur } \mathbb{R}_*^+ \\ &\iff 2x = 0 \\ &\iff x = 0 \end{aligned}$$

> ☞ **Pour info...**
> En fait, c'est l'injectivité de la fonction exponentielle qui sert ici... Notion que nous étudierons bientôt.

1.d. Étudier les variations de sh puis en déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le signe de $\mathrm{sh}(x)$ en fonction de x.

sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{sh}'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$$

On en déduit :

x	$-\infty$		$+\infty$
signe de $\mathrm{sh}'(x)$		$+$	
variations de sh		$\nearrow$	

> **Important !**
> TOUT LE MONDE (sauf vous) sait qu'il est inutile d'écrire $\mathrm{sh} = \frac{u}{v}$ pour dériver...

De plus, on sait que $\mathrm{sh}(0) = 0$... et comme sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit son signe :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{sh}(x)$		$-$	0	$+$	

1.e. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(x) > \mathrm{sh}(x)$.

Pour cela, démontrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) > 0$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) &= \frac{e^x + e^{-x} - e^x + e^{-x}}{2} \\ &= e^{-x} > 0 \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(x) > \mathrm{sh}(x)$

1.f. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe de sh en 0, puis étudier la position relative de cette tangente avec la courbe de sh. *On notera $\mathcal{T}_0$ cette tangente.*

- $\mathcal{T}_0 : y = \mathrm{sh}'(0)(x - 0) + \mathrm{sh}(0)$, par conséquent, l'équation réduite de $\mathcal{T}_0$ est $y = x$.
- Pour étudier la position relative de $\mathcal{T}_0$ avec la courbe de sh, étudions le signe de $d : x \longmapsto \mathrm{sh}(x) - x$ sur $\mathbb{R}$...
  La fonction d est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$d'(x) = \mathrm{ch}(x) - 1$$

> **Horreur !!**
> $\mathcal{T}_0$ est une droite hein ! On ne soustrait pas une droite, ça n'a AUCUN SENS !

> **Petite remarque**
> Pour étudier le signe de la fonction d, on va ici chercher ses variations en espérant que cela nous permette d'obtenir son signe... comme dans l'exercice 18 du chapitre 1.

Or, d'après la question 1.d. :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(x) \geq 1 \ \ ; \ \ \mathrm{ch}(0) = 1$$

D'où :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$d'(x)$		$+$	0	$+$	
d		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

Puisque le minimum de la fonction d sur $\mathbb{R}$ est 0, atteint en 0, on a :

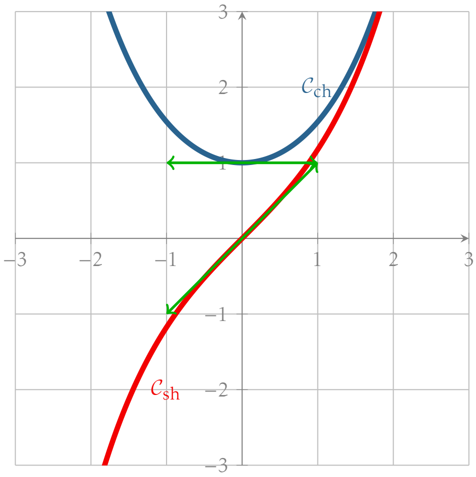
$$\forall x \in]-\infty;0[,\ d(x) < 0$$
$$\forall x \in]0;+\infty[,\ d(x) > 0$$

Autrement dit :

$$\forall x \in]-\infty;0[,\ \mathrm{sh}(x) < x$$
$$\forall x \in]0;+\infty[,\ \mathrm{sh}(x) > x$$

Conclusion : la courbe de sh est au-dessous de $\mathcal{T}_0$ sur $]-\infty;0[$
la courbe de sh est au-dessus de $\mathcal{T}_0$ sur $]0;+\infty[$
la courbe de sh est $\mathcal{T}_0$ se rencontrent en le point de coordonnées $(0,0)$.

1.g. Représenter les allures de ch et sh sur un même graphique.



1.h. Démontrer que pour tout réel x, $\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 = 1$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 &= \big(\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)\big)\big(\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x)\big) \\
&= \left(\frac{e^x + e^{-x} - e^x + e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x + e^{-x} + e^x - e^{-x}}{2}\right) \\
&= e^{-x}e^x \\
&= e^0 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Conclusion : pour tout réel x, $\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 = 1$.

2. On considère maintenant la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x}{\mathrm{sh}(x)}$.

2.a. Donner l'ensemble de définition de f puis étudier sa parité.

- Notons $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$x \in \mathcal{D}_f \iff \mathrm{sh}(x) \neq 0$$

Or, d'après la question **1.c.** : $\mathrm{sh}(x) = 0 \iff x = 0$.

Conclusion : l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}^*$.

- $\mathbb{R}^*$ est symétrique par rapport à 0 et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned}
f(-x) &= \frac{-x}{\mathrm{sh}(-x)} \quad \text{par imparité de sh} \\
&= \frac{-x}{-\mathrm{sh}(x)} \\
&= \frac{x}{\mathrm{sh}(x)} \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

Conclusion : la fonction f est paire.

Petite remarque

Un peu plus astucieux (merci à E.T.) :
Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait que : $e^x \geq x+1$, donc on a aussi : $e^{-x} \geq -x+1$.
En faisant la différence, on obtient :

$$e^x - e^{-x} \geq 2x$$

d'où :

$$\mathrm{sh}(x) \geq x$$

Ne reste qu'à réfléchir aux cas d'égalité...

En tout cas, on ne fait pas comme L.S. : pas de dérivées successives...

Important !

On fait figurer la tangente à la courbe de sh ; et on la fait coller à cette tangente en le point de tangence...

2.b. Notons g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ g(x) = \mathrm{sh}(x) - x\mathrm{ch}(x)$. Étudier les variations de g puis en déduire son signe.

g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, comme produit et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^+$, et, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \mathrm{sh}'(x) - \big(\mathrm{ch}(x) + x\mathrm{ch}'(x)\big) \\ &= \mathrm{ch}(x) - \big(\mathrm{ch}(x) + x\mathrm{sh}(x)\big) \\ &= -x\mathrm{sh}(x) \end{aligned}$$

En utilisant le signe de sh obtenu à la question **1.d.**, on obtient :

x	0		$+\infty$
signe de $g'(x)$		$-$	
variations de g	0	$\searrow$	

Par conséquent, le maximum de g sur $\mathbb{R}^+$ est 0 (atteint en 0).

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) \leq 0$.

2.c. En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^*$.

Posons $u : x \longmapsto x$ et $v : x \longmapsto \mathrm{sh}(x)$ de sorte que $f = \dfrac{u}{v}$.

u et v sont dérivables sur $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$ et v ne s'annule pas sur ces intervalles ; par conséquent, f est dérivable sur ces intervalles et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\mathrm{sh}(x) - x\mathrm{sh}'(x)}{\mathrm{sh}(x)^2} \\ &= \frac{\mathrm{sh}(x) - x\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)^2} \\ &= \frac{g(x)}{\mathrm{sh}(x)^2} \end{aligned}$$

D'après la question précédente, on déduit le tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$, complété sur $]-\infty;0[$ par parité de f... d'où :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	
variations de f		$\nearrow$	$\|\|$	$\searrow$	

CQFR

CE QU'IL FAUT RETENIR DES COPIES : On en parle du DM1 là ?!
Cet exercice aurait dû rapporter au moins 20 points sur chaque copie !!

- On procède par équivalences dans les deux cas suivants (et seulement ces deux cas) :
  1. on résout une équation/inéquation (et les opérations effectuées le permettent...),
  2. on transforme un résultat qui nous semble compliqué à démontrer en un résultat plus simple à établir !

  En revanche, pour les questions 1.e. et 1.h. : vous avez une méthode pour démarrer ; donc on ne doit pas voir de transformation du résultat par équivalences (qui est plus long à rédiger, et moins limpide).
- TANGENTE et pas TANGEANTE ! C'est écrit dans l'énoncé quand-même...
- Il était possible de traiter la question 1.f. à partir de l'étude de la convexité de sh... Mais de façon générale : ce qui n'a pas été revu en classe n'a pas besoin d'être utilisé en devoir !