Devoir surveillé 2
Samedi 8 octobre - 4h00

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :

- ***la copie devra présenter une en-tête d'au moins une demi-page ainsi qu'une marge suffisante,***
- ***toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,***
- ***les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),***
- ***les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.***

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.

"Ce n'est pas la force, mais la persévérance, qui fait les grandes œuvres."
Samuel Johnson

De l'art de gagner et perdre des points...

Une seule façon de gagner des points :

UN ARGUMENT = UN POINT

Par exemple, il faut veiller à :

- justifier les étapes de calculs,
- justifier la dérivabilité d'une fonction,
- justifier les manipulations sur les inégalités,
- vérifier les hypothèses de tout théorème utilisé,
- citer les théorèmes utilisés (quand ils sont un nom),
- annoncer le type de raisonnement utilisé (par récurrence, par l'absurde, par équivalences, par double-implication...).

En revanche, les motifs de perte de points sont nombreux et les voici :

confusion d'objets / de vocabulaire	-1 par occurrence
absence de quantification	-1 par occurrence
mauvais emploi / absence de symboles mathématiques	-1 par occurrence
récurrence mal rédigée	-1 par occurrence
non sens	jusqu'à -2 par occurrence
manque de codage des opérations dans la résolution d'un système	-1 par résolution
absence ou erreur de numérotation des questions	-1 par occurrence
résultats non soulignés / encadrés	jusqu'à -3 sur la copie
absence / erreur de pagination	jusqu'à -3 sur la copie
copie insuffisamment soignée	jusqu'à -5 sur la copie

Exercice 1

Les questions de cet exercice sont indépendantes entre elles.

1. Donner l'écriture quantifiée de "la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée" puis sa négation.
2. **Vrai ou faux.** Pour chaque affirmation, préciser si elle est vraie ou fausse, et justifier.
   - 2.a. $\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x^2} = x$.
   - 2.b. Si une suite est bornée, alors elle est décroissante à partir d'un certain rang.
   - 2.c. $\exists x, y \in \mathbb{R} \ /\ \exp(x+y) = \exp(x) + \exp(y)$.
   - 2.d. La somme de deux suites géométriques est une suite géométrique.
   - 2.e. Le produit de deux suites géométriques est une suite géométrique.
3. Résoudre l'inéquation $\ln(x+1)^2 \leq 4$, d'inconnue $x \in]-1;+\infty[$.
4. On considère la fonction $f : x \longmapsto x^x$ définie sur $\mathbb{R}_*^+$. Dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}_*^+$.
5. Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{3^{2k+1}}$.
6. Soit $n \in [\![3;+\infty[\![$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} 6(k-3)^2$.
7. Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.
8. Déterminer le terme général de la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \ ;\ u_1 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n \end{cases}$
9. On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \ ;\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \dfrac{3}{2}u_{n+1} - \dfrac{1}{2}u_n + 2 \end{cases}$.

   On définit également la suite (v_n) par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{n+1} - u_n$.
   - 9.a. Montrer que la suite (v_n) est une suite arithmético-géométrique.
   - 9.b. Déterminer alors le terme général de (v_n).
   - 9.c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k)$.
   - 9.d. Déduire des questions précédentes le terme général de (u_n).

★★★★★★★

Exercice 2

On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

1. Calculer S_1, S_2 et S_3. *Les résultats seront donnés sous forme d'entiers ou de fractions irréductibles.*
2. Écrire une fonction `Python` telle que l'exécution de la commande `suite_S(n)` renvoie la valeur de S_n, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Étudier les variations de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
4. 4.a. Établir :

   $$\forall k \in [\![2;+\infty[\![,\ \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$$

   - 4.b. Déterminer les deux réels a et b tels que pour tout $k \in [\![2;+\infty[\![$: $\dfrac{1}{k(k-1)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k-1}$.

     En déduire, pour $n \in [\![2;+\infty[\![$, une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$.
   - 4.c. Déduire des questions précédentes :

     $$\forall n \in [\![2;+\infty[\![,\ S_n \leq 2 - \frac{1}{n}$$
5. Démontrer enfin que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

★★★★★★★

Exercice 3

L'objectif de l'exercice est de déterminer le terme général de la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \ ; \ u_1 = 0 \ ; \ u_2 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$$

(u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 3, dont l'équation caractéristique est : $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$.

1. Recopier et compléter le programme suivant afin que l'exécution de `suite_u(n)` renvoie la valeur de u_n, pour $n \in \mathbb{N}$.

```
def suite_u(n):
    if n==0 or n==1:
        ..........
    elif n==2:
        ..........
    else:
        u,v,w=..........
        for k in ..........:
            ..........................
            ..........................
        return ...
```

2. Résoudre l'équation $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. Soient $q \in \mathbb{R}^*$ et (v_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme $v_0 \neq 0$. Établir l'équivalence :

$$\left(\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+3} = 2v_{n+2} + v_{n+1} - 2v_n\right) \iff q \in \{-1;1;2\}$$

4. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Considérons la suite (w_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \alpha + \beta(-1)^n + \gamma 2^n$.
   - 4.a. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+3} = 2w_{n+2} + w_{n+1} - 2w_n$.
   - 4.b. Déterminer les valeurs de α, β et γ de sorte que $w_0 = 0$, $w_1 = 0$ et $w_2 = 1$.
5. Conclure.

★★★★★★★

Exercice 4

On considère la fonction

$$f : x \longmapsto \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right)$$

ainsi que la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère du plan.

1. **Étude de la fonction f.**
   - 1.a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
   - 1.b. Étudier les variations de f sur $]-2;+\infty[$.
   - 1.c. Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0. *On notera $\mathcal{T}_0$ cette tangente.*
   - 1.d. Établir :

$$\forall x \in]-2;+\infty[,\ \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) \leq \frac{1}{2}x$$

   - 1.e. Représenter l'allure de $\mathcal{C}_f$ dans un repère du plan judicieusement choisi. *Donnée :* $\ln(3) \simeq 1,1$.
2. **Étude de la suite (u_n).**
   - 2.a. Compléter le graphique obtenu à la question 1.e. par le tracé des premiers termes de la suite (u_n). Que peut-on conjecturer ?
   - 2.b. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 0$.
   - 2.c. Écrire une fonction `Python` telle que l'exécution de `suite_u(n)` renvoie la valeur de u_n, pour $n \in \mathbb{N}$.
   - 2.d. En utilisant le résultat établi à la question 1.d., établir :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$$

   - 2.e. Déduire du résultat précédent que la suite (u_n) est strictement décroissante ; et établir par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \frac{1}{2^{n-2}}$$

   - 2.f. **Question facultative.** Que peut-on déduire sur la suite (u_n) ?

★★★★★★★

Exercice 5

On considère les fonctions ch et sh définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \ \ ; \ \ \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

1. **Étude des fonctions ch et sh**
   - **1.a.** Étudier la parité des fonctions ch et sh.
   - **1.b.** Dresser le tableau de variations de ch sur $\mathbb{R}$.
   - **1.c.** Résoudre l'équation $\mathrm{sh}(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
   - **1.d.** Étudier les variations de sh puis en déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le signe de $\mathrm{sh}(x)$ en fonction de x.
   - **1.e.** Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(x) > \mathrm{sh}(x)$.
   - **1.f.** Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe de sh en 0, puis étudier la position relative de cette tangente avec la courbe de sh. *On notera $\mathcal{T}_0$ cette tangente.*
   - **1.g.** Représenter les allures de ch et sh sur un même graphique.
   - **1.h.** Démontrer que pour tout réel x, $\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 = 1$.
2. On considère maintenant la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x}{\mathrm{sh}(x)}$.
   - **2.a.** Donner l'ensemble de définition de f puis étudier sa parité.
   - **2.b.** Notons g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ g(x) = \mathrm{sh}(x) - x\mathrm{ch}(x)$. Étudier les variations de g puis en déduire son signe.
   - **2.c.** En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^*$.