Concours blanc 1
Samedi 10 décembre 2022 - 4h00

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :
- ***la copie devra présenter une en-tête d'au moins une demi-page ainsi qu'une marge suffisante,***
- ***toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,***
- ***les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),***
- ***les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.***

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.

"*L'âge mûr devient sot et négligent lorsqu'il sous-estime la jeunesse.*"
Albus Dumbledore [Harry Potter et le Prince de Sang Mêlé]

EXERCICE 1

Considérons la fonction $f : x \longmapsto \ln(1+x) + \dfrac{1}{1+x} - 1$, définie sur $]-1;+\infty[$.

1. **1.a.** Déterminer $\lim\limits_{\substack{X \to 0 \\ X>0}} \left(\ln(X) + \dfrac{1}{X}\right)$.

Soit X suffisamment proche de 0 avec $X > 0$. On a :

$$\ln(X) + \frac{1}{X} = \frac{X\ln(X)+1}{X}$$

Or, par croissance comparée :

$$\lim_{\substack{X \to 0 \\ X>0}} X\ln(X) = 0$$

D'où, par opérations :

$$\lim_{\substack{X \to 0 \\ X>0}} \frac{X\ln(X)+1}{X} = +\infty$$

Conclusion : $\lim\limits_{\substack{X \to 0 \\ X>0}} \left(\ln(X) + \dfrac{1}{X}\right) = +\infty$.

1.b. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition, et préciser les éventuelles asymptotes de sa courbe représentative.

- **En -1, par la droite :**

On a : $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x>-1}} 1+x = 0^+ \\ \lim\limits_{\substack{X \to 0 \\ X>0}} \left(\ln(X) + \dfrac{1}{X}\right) = +\infty \end{array}\right\}$ donc par composition : $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x>-1}} \ln(1+x) + \dfrac{1}{1+x} = +\infty$

Par opérations, on obtient :

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to -1 \\ x>-1}} f(x) = +\infty}$$

Ainsi : la droite d'équation $x = -1$ est asymptote à la courbe de f au voisinage de -1 (par la droite).

- **En $+\infty$:**

Par composition et opérations, on a directement :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$$

2. Dresser le tableau de variations complet de f sur $]-1;+\infty[$.

- Posons $u : x \longmapsto 1+x$ et $v : x \longmapsto -1$ de sorte que $f = \ln\circ u + \dfrac{1}{u} + v$.
La fonction u est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et est à valeurs strictement positives sur cet intervalle, donc la fonction $\ln\circ u$ est dérivable sur $]-1;+\infty[$.
Également, puisque u est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et ne s'annule pas sur cet intervalle (à valeurs strictement positives), la fonction $\dfrac{1}{u}$ est dérivable sur $]-1;+\infty[$.
Par conséquent, f est une somme de fonctions dérivables sur $]-1;+\infty[$; f est donc dérivable sur $]-1;+\infty[$.
- Soit $x \in]-1;+\infty[$. On a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} \\ &\underset{\text{RÉFLEXE !}}{=} \frac{1+x-1}{(1+x)^2} \\ &= \frac{x}{(1+x)^2} \end{aligned}$$

- On en déduit :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

3. Établir :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) \leq x^2$$

PETITE REMARQUE — On demande d'établir le résultat sur $\mathbb{R}^+$, inutile de poser g ailleurs...

Posons $g : x \longmapsto f(x) - x^2$, définie sur $\mathbb{R}^+$.

- La fonction g est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^+$, elle est donc également dérivable sur $\mathbb{R}^+$.
- Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) - 2x \\ &= \frac{x}{(1+x)^2} - 2x \\ &= \frac{x - 2x(1+x)^2}{(1+x)^2} \\ &= \frac{x - 2x(1+2x+x^2)}{(1+x)^2} \\ &= \frac{-2x^3 - 4x^2 - x}{(1+x)^2} \\ &\underset{\text{RÉFLEXE !}}{=} \frac{-x(2x^2+4x+1)}{(1+x)^2} \end{aligned}$$

Or $x \in \mathbb{R}^+$, donc $2x^2 + 4x + 1 > 0$. D'où :

x	0 $\quad$ $+\infty$
$g'(x)$	0 $\quad -$
g	$0 \searrow -$

Le maximum de g sur $\mathbb{R}^+$ étant 0, atteint en 0, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ g(x) \leq 0$$

Autrement dit :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) - x^2 \leq 0$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) \leq x^2$.

PETITE REMARQUE
Sinon, on calcule les racines de $x \longmapsto 2x^2 + 4x + 1$, qui sont $-1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, toutes deux négatives...

On considère à présent la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$; $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

4. Démontrer que la suite (u_n) est bien définie et minorée par 0.

Démontrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 0$.

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
  u_0 existe et $u_0 = 1$: l'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons "u_n existe et $u_n \geq 0$" et montrons "u_{n+1} existe et $u_{n+1} \geq 0$".
  - Par hypothèse de récurrence, u_n existe et $u_n \geq 0$. En particulier, u_n appartient à l'ensemble de définition de f.
    Donc $f(u_n)$ existe. Autrement dit : u_{n+1} existe.
  - Par hypothèse de récurrence, on a également :

    $$u_n \geq 0$$

    D'où, en appliquant f, croissante sur $\mathbb{R}^+$:

    $$f(u_n) \geq f(0)$$

    Autrement dit :

    $$u_{n+1} \geq 0$$

    L'hérédité est établie.

IMPORTANT !
On doit vérifier que $u_n \in \mathcal{D}_f$ pour assurer l'existence de $f(u_n)$.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 0$.
Autrement dit : la suite (u_n) est bien définie et minorée par 0.

5. Établir :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq u_n^2$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, $u_n \geq 0$. Ainsi, on peut utiliser le résultat de la question **3.** avec $x = u_n$.
Ce qui donne :

$$f(u_n) \leq u_n^2$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq u_n^2$.

6. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leq \left(\ln(2) - \frac{1}{2}\right)^{2^{n-1}}$$

Par récurrence...

- **Initialisation.** Pour $n = 1$:
  $u_0 = 1$, donc $u_1 = f(1) = \ln(2) - \frac{1}{2}$ Et : $\left(\ln(2) - \frac{1}{2}\right)^{2^{1-1}} = \left(\ln(2) - \frac{1}{2}\right)^1 = \ln(2) - \frac{1}{2}$.
  On a bien :

  $$u_1 \leq \left(\ln(2) - \frac{1}{2}\right)^{2^{1-1}}$$

  L'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons "$u_n \leq \left(\ln(2) - \frac{1}{2}\right)^{2^{n-1}}$" et montrons "$u_{n+1} \leq \left(\ln(2) - \frac{1}{2}\right)^{2^n}$". Par hypothèse de récurrence :

  $$u_n \leq \left(\ln(2) - \frac{1}{2}\right)^{2^{n-1}}$$

  D'où, en appliquant la fonction carrée, croissante sur $\mathbb{R}^+$, et puisque $u_n \geq 0$ (question **4.**) :

  $$u_n^2 \leq \left(\left(\ln(2) - \frac{1}{2}\right)^{2^{n-1}}\right)^2$$

  C'est à dire :

  $$u_n^2 \leq \left(\ln(2) - \frac{1}{2}\right)^{2^n}$$

  Mais, d'après la question précédente :

  $$u_{n+1} \leq u_n^2$$

  D'où, par transitivité :

  $$u_{n+1} \leq \left(\ln(2) - \frac{1}{2}\right)^{2^n}$$

  L'hérédité est ainsi établie.

☞ RAPPEL...
$(a^b)^c = a^{bc}$...

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq u_n^2$

7. Démontrer finalement la convergence de la suite (u_n) et préciser sa limite.

- D'après la question précédente et la question **4.** :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq u_n \leq \left(\ln(2) - \frac{1}{2}\right)^{2^{n-1}}$$

Petite remarque

L'encadrement n'est pas valable quand $n = 0$; et il n'est pas nécessaire, puisque n est destiné à tendre vers l'infini et au-delà...

- Or : $1 < 2 < e$, donc, par croissance de ln sur $\mathbb{R}_*^+$:

$$0 < \ln(2) < 1$$

D'où :

$$\frac{-1}{2} < \ln(2) - \frac{1}{2} < \frac{1}{2}$$

En particulier, on a bien $\ln(2) - \dfrac{1}{2} \in]-1;1[$.

Par conséquent, puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^{n-1} = +\infty$, par composition, on obtient :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\ln(2) - \frac{1}{2}\right)^{2^{n-1}} = 0$$

Conclusion : par théorème d'encadrement, la suite (u_n) converge vers 0.

CQFR

Ce qu'il faut retenir des copies : Exercice qui, compte tenu de sa difficulté et de son originalité est mal traité !

- Il est anormal de ne pas connaître les croissances comparées et donc de ne pas réussir la première question. Une connaissance parfaite du cours permet d'identifier les croissances comparées en jeu. Du X et du ln(X) en 0, le choix est très réduit... Et pour information : $\ln(X) + 1$, ce n'est pas $\ln(X + 1)$!!
- Du mieux dans l'ensemble sur la justification de la dérivabilité de f à la question 3.. Aux restants de s'y mettre sérieusement !
- COMMENT PEUT-ON CONCEVOIR D'ARRIVER EN DEVOIR SANS CONNAÎTRE SES FORMULES DE CALCULS DE DÉRIVÉES ?
- Beaucoup mieux également sur la récurrence de la question 4.. Là encore, les quelques-uns restants doivent réagir !
- Dommage que la fin ait été si peu et mal traitée... La question 7. empestait le théorème d'encadrement à des kilomètres pourtant...

★★★★★★★

Exercice 2

Considérons la fonction $f : x \longmapsto (x-1)^2$, définie sur $\mathbb{R}$, ainsi que la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \ ; \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Écrire un programme permettant d'afficher la liste des termes u_0 à u_{10}. L'exécution de ce programme doit afficher :

```
[0.5, 0.25, 0.562, 0.191, 0.654, 0.12, 0.775, 0.051, 0.901, 0.01, 0.981]
```

```python
u=1/2
L=[u]
for k in range(1,11):
    u=(1-u)**2
    L.append(round(u,3))
print(L)
```

Si $a \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$, la commande `round(a,p)` *renvoie l'arrondi de a à 10^{-p} près.*

2. Donner les variations de f sur $\mathbb{R}$ puis établir : $\forall x \in [0;1],\ f(x) \in [0;1]$.

   - Puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)^2$, on a directement :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	0	$\nearrow$

   - Soit $x \in [0;1]$. On a :
$$0 \leq x \leq 1$$
Puis, par décroissance de f sur $[0;1]$, on obtient :
$$f(0) \geq f(x) \geq f(1)$$
Autrement dit :
$$1 \geq x \geq 0$$

Conclusion : $\forall x \in [0;1],\ f(x) \in [0;1]$.

3. Démontrer que f possède un unique point fixe sur $[0;1]$ et le déterminer. *On notera α ce point fixe.* Établir : $\dfrac{1}{4} < \alpha < \dfrac{1}{2}$.

   - Soit $x \in [0;1]$. On a :

$$\begin{aligned} f(x) = x \quad & \Longleftrightarrow \quad (x-1)^2 = 1 \\ & \Longleftrightarrow \quad x^2 - 3x + 1 = 0 \\ & \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \\ \text{OU} \\ x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Or : $2 = \sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9} = 3$, d'où :
$$\frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$$
et :
$$\frac{1}{2} > \frac{3-\sqrt{5}}{2} > 0$$
Par conséquent : f possède un unique point fixe sur $[0;1]$: $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

   - Transformons, par équivalences, le résultat à établir. On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{2} \quad & \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{4} < \frac{3-\sqrt{5}}{2} < \frac{1}{2} \\ & \Longleftrightarrow \quad 1 < 6 - 2\sqrt{5} < 2 \\ & \Longleftrightarrow \quad -5 < -2\sqrt{5} < -4 \\ & \Longleftrightarrow \quad 5 > 2\sqrt{5} > 4 \\ & \Longleftrightarrow \quad 25 > 20 > 16 \end{aligned}$$

par stricte croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$

Ce dernier encadrement étant vrai, par équivalence, le premier l'est également.
Ainsi :
$$\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{2}$$

Conclusion : f possède un unique point fixe sur $[0;1]$: $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, noté α. Et on a même $\dfrac{1}{4} < \alpha < \dfrac{1}{2}$.

4. Représenter l'allure de la courbe de f sur $[0;1]$, ainsi que les premiers termes de la suite (u_n). Que peut-on conjecturer ?

5. Résoudre l'équation $f \circ f(x) = x$, d'inconnue $x \in [0;1]$.

Soit $x \in [0;1]$. On a :

$$\begin{aligned}
f \circ f(x) = x &\iff f(f(x)) = x \\
&\iff \left((x-1)^2 - 1\right)^2 = x \\
&\iff (x^2 - 2x)^2 = x \\
&\iff x^4 - 4x^3 + 4x^2 - x = 0 \\
&\iff x(x^3 - 4x^2 + 4x - 1) = 0 \quad \text{car 1 est racine de } x \longmapsto x^3 - 4x^2 + 4x - 1 \\
&\iff x(x-1)(x^2 - 3x + 1) = 0 \\
&\iff \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = 1 \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \quad \text{d'après la question 3. : } \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1 \text{ et } \frac{3-\sqrt{5}}{2} \in [0;1] \\
&\iff \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = 1 \\ \text{ou} \\ x = \alpha \end{cases}
\end{aligned}$$

Conclusion : les solutions de l'équation $f \circ f(x) = x$, d'inconnue $x \in [0;1]$, sont : 0, 1 et α.

> ☞ **Pour info...**
> La fonction f admet un unique point fixe sur $[0;1]$. En revanche, la fonction $f \circ f$ en admet 3...

6. **6.a.** Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_{2n+3} \leq u_{2n+1} \leq \alpha \leq u_{2n} \leq u_{2n+2} \leq 1$$

Par récurrence...

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
  - $$u_0 = \frac{1}{2} \ ;\ u_1 = \frac{1}{4} \ ;\ u_2 = \frac{9}{16} \ ;\ u_3 = \frac{49}{256}$$
  - On a :
  $$u_2 = \frac{9}{16} > \frac{8}{16} = \frac{1}{2} = u_0$$
  et :
  $$u_1 = \frac{1}{4} = \frac{4}{16} = \frac{64}{256} > \frac{49}{256} = u_3$$
  - D'après la question **3.**, on a :
  $$\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{2}$$

  Par conséquent :
  $$0 \leq u_3 \leq u_1 \leq \alpha \leq u_0 \leq u_2 \leq 1$$
  L'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons "$0 \leq u_{2n+3} \leq u_{2n+1} \leq \alpha \leq u_{2n} \leq u_{2n+2} \leq 1$" et montrons "$0 \leq u_{2n+5} \leq u_{2n+3} \leq \alpha \leq u_{2n+2} \leq u_{2n+4} \leq 1$".
  Par hypothèse de récurrence, on a :
  $$0 \leq u_{2n+3} \leq u_{2n+1} \leq \alpha \leq u_{2n} \leq u_{2n+2} \leq 1$$
  En appliquant f, décroissante sur $[0;1]$:
  $$f(0) \geq f(u_{2n+3}) \geq f(u_{2n+1}) \geq f(\alpha) \geq f(u_{2n}) \geq f(u_{2n+2}) \leq f(1)$$
  Autrement dit, puisque α est point fixe de f :
  $$1 \geq u_{2n+4} \geq u_{2n+2} \geq \alpha \geq u_{2n+1} \geq u_{2n+3} \geq 0$$
  En appliquant à nouveau f, décroissante sur $[0;1]$, on obtient :
  $$f(1) \leq f(u_{2n+4}) \leq f(u_{2n+2}) \leq f(\alpha) \leq f(u_{2n+1}) \leq f(u_{2n+3}) \leq f(0)$$
  Autrement dit :
  $$0 \leq u_{2n+5} \leq u_{2n+3} \leq \alpha \leq u_{2n+2} \leq u_{2n+4} \leq 1$$
  L'hérédité est ainsi établie.

6.b. Justifier que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes. On notera ℓ et ℓ' leurs limites respectives.

- D'après la question précédente, la suite (u_{2n}) est croissante et majorée (par 1). Ainsi, par théorème de convergence monotone, la suite (u_{2n}) converge vers un réel ℓ.
  Et puisque (u_{2n}) est minorée par son premier terme (étant croissante) et majorée par 1, on a même : $\ell \in \left[\frac{1}{2};1\right]$.
- De même, la suite (u_{2n+1}) converge vers un réel ℓ' qui vérifie : $\ell' \in \left[0;\frac{1}{4}\right]$.

> **Petite remarque**
> On voit donc que $\ell \neq \ell'$...

6.c. Démontrer que $\ell = 1$. Établir : $\ell' = f(\ell)$. En déduire la valeur de ℓ'.

- La suite (u_{2n}) converge vers ℓ. Donc :
  $$\lim_{n \to +\infty} u_{2n+2} = \ell$$
  Or :
  $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n})$$
  D'où, par opérations (ou composition) sur les limites et par unicité de la limite, on obtient :
  $$\ell = f \circ f(\ell)$$

Mais, on sait que $\ell \in \left[\frac{1}{2};1\right]$ et, puisque $\alpha > \frac{1}{2}$, l'équation $f \circ f(x) = x$ possède une unique solution sur $\left[\frac{1}{2};1\right]$: 1.

Conclusion : $\ell = 1$.

- On sait que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n+1} = f(u_n)$$
D'où, par opérations (ou composition) et unicité de la limite on a :
$$\ell' = f(\ell)$$
.
- Or $\ell = 1$ et $f(1) = 0$.

Conclusion : $\ell' = 0$.

7. Que peut-on déduire des questions précédentes quant à la suite (u_n) ?

D'après la question précédente, la suite(u_{2n}) converge vers 1 et la suite (u_{2n+1}) converge vers 0.

Conclusion : par théorème de recouvrement, la suite (u_n) diverge sans avoir de limite.

CQFR

Ce qu'il faut retenir des copies : De bonnes choses ont été faites sur cet exercice, revenons tout de même sur certains points :

- Pas de structure de fonction dans le programme `Python` ! Relisez l'énoncé...
- Question 3. : il est important de démontrer qu'une des solutions est en dehors de $[0;1]$ et que l'autre y est pour conclure ! Attention à l'horreur "$\alpha \geq 0$ donc $\alpha \geq \frac{1}{4}$" : j'en ai encore des nausées...
- Trop d'erreurs de calculs dans $f \circ f(x)$ à la question 5.. A retravailler.
- L'hérédité de la question 6.a. est bien faite, même si l'initialisation doit encore être améliorée. Il est d'ailleurs impossible d'utiliser des valeurs approchées pour conclure !!
- La fin a été peu traitée, dommage...

★★★★★★★

Exercice 3

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. L'exécution du programme suivant

```python
import numpy as np

A=np.array([[-1,-2,3],[1,2,-1],[-1,-1,3]])
A2=np.dot(A,A)
A3=np.dot(A2,A)
print(A3-4*A2+5*A)
```

affiche le résultat :

```
[[2 0 0]
 [0 2 0]
 [0 0 2]]
```

Interpréter ce résultat.
A2 désigne la matrice A^2 et A3 la matrice A^3.
Ainsi :

$$A^3 - 4A^2 + 5A = 2I_3$$

Conclusion : $A^3 - 4A^2 + 5A = 2I_3$, autrement dit, le polynôme $X^3 - 4X^2 + 5X - 2$ est annulateur de A.

2. Déduire de la question précédente que A est inversible et exprimer son inverse en fonction de I_3, A et A^2.
Puisque :

$$A^3 - 4A^2 + 5A = 2I_3$$

on obtient :

$$A \times \frac{1}{2}(A^2 - 4A + 5I_3) = I_3$$

Conclusion : la matrice A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}(A^2 - 4A + 5I_3)$.

Partie A. Puissances par trigonalisation.

3. Justifier que la matrice $A - 2I_3$ n'est pas inversible puis résoudre l'équation $AX = 2X$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   - On a :

   $$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   On remarque alors que $C_3 = -C_1$.

   Conclusion : la matrice $A - 2I_3$ n'est pas inversible.

   - Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
AX = 2X \quad & \iff \quad (A - 2I_3)X = 0_{3,1} \\
& \iff \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -3x & - & 2y & + & 3z & = & 0 \\ x & & & - & z & = & 0 \\ -x & - & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\
\begin{cases} L_2 \leftarrow 3L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 3L_3 - L_1 \end{cases} & \iff \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -3x & - & 2y & + & 3z & = & 0 \\ & - & 2y & & & = & 0 \\ & - & y & & & = & 0 \end{array} \right. \\
& \iff \quad \left\{ \begin{array}{rcl} -3x & = & -3z \\ y & = & 0 \end{array} \right. \\
& \iff \quad X = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

   Conclusion : l'ensemble des solutions de l'équation $AX = 2X$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est : $\left\{ z.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;/\; z \in \mathbb{R} \right\}$.

Cohérence...
Puisque la matrice $A - 2I_3$ n'est pas inversible, l'équation matricielle $(A - 2I_3)X = 0$ ne possède pas une unique solution.
Mais elle en possède au moins une (la matrice colonne nulle) ; par conséquent, elle en possède une infinité (voir résultat sur les systèmes).
Par conséquent, l'équation $AX = 2X$ possède une infinité de solutions.

4. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Démontrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
Méthode habituelle...

Conclusion : la matrice P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

5. Vérifier que la matrice $P^{-1}AP$ est triangulaire supérieur. On notera T cette matrice. Démontrer ensuite :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PT^nP^{-1}$$

- On a :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Par récurrence...
  - ◇ **Initialisation.** Pour $n = 0$:
    $PT^0P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2 = A^0$: l'initialisation est vérifiée.
  - ◇ **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $A^n = PT^nP^{-1}$ et montrons que $A^{n+1} = PT^{n+1}P^{-1}$.
    On a :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= PT^nP^{-1}PTP^{-1} && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= PT^nI_2TP^{-1} \\ &= PT^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

L'hérédité est ainsi établie.

> **Conclusion :** pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PT^nP^{-1}$, avec $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. 6.a. 6.a.i. Posons $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer N^2 puis en déduire, pour tout $k \in [\![2;+\infty[\![$, N^k.

On trouve $N^2 = 0_2$...

> **Conclusion :** pour tout $k \in [\![2;+\infty[\![$, $N^k = 0_2$.

6.a.ii. Déterminer alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de T^n.

- Posons $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de sorte que $T = D + N$.
  On remarque que :

$$DN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = ND$$

  Ainsi, les matrices D et N commutent.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} T^n &= (D+N)^n && \text{formule du binôme de Newton, car D et N commutent} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} \end{aligned}$$

  - ◇ Si $n \geq 1$:
    On a alors, par relation de Chasles (la dernière somme portant sur un ensemble vide dans le cas où $n = 1$) :

$$\begin{aligned} T^n &= \binom{n}{0}N^0D^n + \binom{n}{1}ND^{n-1} + \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}N^kD^{n-k} && \text{somme nulle si } n = 1 \text{ et sinon : } \forall k \geq 2,\ N^k = 0_3 \\ &= D^n + nND^{n-1} && \text{D est diagonale} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  - ◇ Si $n = 0$:

$$\begin{pmatrix} 2^0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 = T^0$$

> **Conclusion :** $\forall n \in \mathbb{N},\ T^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6.b. Proposer une autre méthode pour déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de T^n (sans la mettre en œuvre).

On pourrait aisément conjecturer une expression de T^n (après avoir calculé T^2 et T^3) puis démontrer cette conjecture par récurrence.

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déduire des questions précédentes l'expression de A^n en fonction de n.
En utilisant les questions **5.** et **6.a.ii.** :

$$\begin{aligned}
A &= PT^nP^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^n & -1 & 1-n \\ 0 & 1 & 1+n \\ 2^n & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2-n-2^n & 1-n-2^n & 2^{n+1}-2+n \\ n & 1+n & -n \\ 1-2^n & 1-2^n & 2^{n+1}-1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Vérification
On vérifie que l'expression trouvée est bien valable pour $n = 0$ et $n = 1$... Ouf !!

Partie B. Puissances par division euclidienne.

8. **Question préliminaire.**
Soient P une fonction polynomiale de degré supérieur ou égal à 2 et α un réel. Démontrer le résultat :

$$\left(\exists Q \in \mathbb{R}[x] \;/\; \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x-\alpha)^2 Q(x)\right) \iff \left(P(\alpha) = 0 \ \text{ET}\ P'(\alpha) = 0\right)$$

Il s'agit de démontrer une équivalence, raisonnons donc par double-implication.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[x]$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x-\alpha)^2 Q(x)$.

- Sans problème, on a alors $P(\alpha) = 0$.
- De plus, P et Q sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P'(x) = 2(x-\alpha)Q(x) + (x-\alpha)^2 Q'(x)$$

D'où :

$$P'(\alpha) = 0$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $P(\alpha) = 0$ et $P'(\alpha) = 0$.
Par théorème de factorisation, il existe $Q_1 \in \mathbb{R}[x]$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x-\alpha)Q_1(x)$.
Mais P et Q sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P'(x) = Q_1(x) + (x-\alpha)Q_1'(x)$$

Or $P'(\alpha) = 0$. On obtient alors : $Q_1(\alpha) = 0$. Par conséquent, α est racine de la fonction polynomiale Q_1... Ainsi, d'après le théorème de factorisation, il existe $Q_2 \in \mathbb{R}[x]$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Q_1(x) = (x-\alpha)Q_2(x)$.
D'où :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x-\alpha)^2 Q_2(x)$$

On a ainsi établi :

$$\exists Q \in \mathbb{R}[x] \;/\; \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x-\alpha)^2 Q(x)$$

Petite remarque
Cette question avait fait l'objet d'un exercice dans le chapitre sur les polynômes...

Conclusion : $\left(\exists Q \in \mathbb{R}[x] \;/\; \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x-\alpha)^2 Q(x)\right) \iff \left(P(\alpha) = 0 \ \text{ET}\ P'(\alpha) = 0\right)$.

9. On considère la fonction polynomiale $P : x \longmapsto x^3 - 4x^2 + 5x - 2$.

9.a. Déterminer les racines de P.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
P(x) &= x^3 - 4x^2 + 5x - 2 && \text{1 est racine de P} \\
&= (x-1)(x^2 - 3x + 2) && \text{les racines de } x \longmapsto x^2 - 3x + 2 \text{ sont 1 et 2} \\
&= (x-1)^2(x-2)
\end{aligned}$$

Conclusion : les racines de P sont 1 (de multiplicité 2) et 2 (de multiplicité 1).

9.b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On admet qu'il existe deux fonctions polynomiales Q_n et R_n telles que : $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ x^n = P(x)Q_n(x) + R_n(x) \\ \deg(R_n) < \deg(P) \end{cases}$.

Établir :

$$R_n(1) = 1 \quad ; \quad R_n(2) = 2^n \quad ; \quad R_n'(1) = n$$

En déduire l'expression de R_n.

- On a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^n = P(x)Q_n(x) + R_n(x)$$

Et on sait aussi que 2 est racine de P. Donc :

$$P(2) = 0$$

Et 1 est racine double de P, donc, d'après la question **8.** :

$$P(1) = 0 \ ; \ P'(1) = 0$$

  - En évaluant en 1 et en 2, on obtient alors :

$$1^n = R_n(1) \ ; \ 2^n = R_n(2)$$

  - En dérivant cette relation (toutes les fonctions en jeu sont polynomiales, donc dérivables sur $\mathbb{R}$) on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ nx^{n-1} = P'(x)Q_n(x) + P(x)Q_n'(x) + R_n'(x)$$

Puis, en évaluant en 1 :

$$n = R_n'(1)$$

- Puisque $\deg(P) = 3$, R_n est de degré inférieur ou égal à 2.
  Par conséquent, il existe $a_n, b_n, c_n \in \mathbb{R}$ tels que :
  $$\forall x \in \mathbb{R},\ R_n(x) = a_n x^2 + b_n x + c_n$$
  D'après le point précédent, on a :
  $$R_n(1) = 1 \ ;\ R_n(2) = 2^n \ ;\ R_n'(1) = n$$
  Et :
  $$\left\{\begin{array}{lcl} R_n(1) & = & 1 \\ R_n(2) & = & 2^n \\ R_n'(1) & = & n \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} a_n & + & b_n & + & c_n & = & 1 \\ 4a_n & + & 2b_n & + & c_n & = & 2^n \\ 2a_n & + & b_n & & & = & n \end{array}\right.$$
  $$\underset{\left\{\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}\right.}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} a_n & + & b_n & + & c_n & = & 1 \\ & - & 2b_n & - & 3c_n & = & 2^n - 4 \\ & - & b_n & - & 2c_n & = & n - 2 \end{array}\right.$$
  $$\underset{L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} a_n & + & b_n & + & c_n & = & 1 \\ & - & 2b_n & - & 3c_n & = & 2^n - 4 \\ & & & - & c_n & = & 2n - 2^n \end{array}\right.$$
  $$\underset{\left\{\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3 \end{array}\right.}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} a_n & + & b_n & & & = & 1 + 2n - 2^n \\ & - & 2b_n & & & = & 4 \times 2^n - 4 - 6n \\ & & & - & c_n & = & 2n - 2^n \end{array}\right.$$
  $$\underset{L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2a_n & & & & & = & -2 - 2n + 2^n \\ & - & 2b_n & & & = & 4 \times 2^n - 4 - 6n \\ & & & - & c_n & = & 2n - 2^n \end{array}\right.$$
  $$\iff \left\{\begin{array}{lcl} a_n & = & 2^n - 1 - 1 \\ b_n & = & 2 + 3n - 2^{n+1} \\ c_n & = & 2^n - 2n \end{array}\right.$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ R_n(x) = (2^n - 1 - n)x^2 + (2 + 3n - 2^{n+1})x + 2^n - 2n.$

10. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déduire des questions précédentes l'expression de A^n en combinaison linéaire de I_3, A et A^2. Cette expression est-elle encore valable pour $n = -1$?

- En évaluant la relation de division euclidienne, et puisque P est annulateur de A (question **1.**), on obtient :
  $$\begin{array}{rcl} A^n & = & R_n(A) \\ & = & (2^n - 1 - n)A^2 + (2 + 3n - 2^{n+1})A + (2^n - 2n)I_3 \end{array}$$
  question précédente
- Pour $n = -1$:
  $$\begin{array}{rcl} (2^{-1} - 1 - (-1))A^2 + (2 + 3(-1) - 2^{-1+1})A + (2^{-1} - 2(-1))I_3 & = & \frac{1}{2}A^2 - 2A + \frac{5}{2}I_3 \\ & = & \frac{1}{2}(A^2 - 4A + 5I_3) \\ & = & A^{-1} \end{array}$$
  question **2.**

  Par conséquent, la relation obtenue est encore valable pour $n = -1$.

Conclusion : $\forall n \in [\![-1;+\infty[\![,\ A^n = (2^n - 1 - n)A^2 + (2 + 3n - 2^{n+1})A + (2^n - 2n)I_3.$

CQFR

Ce qu'il faut retenir des copies : Pour bon nombre, les techniques et méthodes sont acquises. L'exercice a été souvent bien traité.
La question sur le binôme de Newton mérite encore d'être travaillée pour s'assurer un maximum de points.
Dommage que la fin de la partie C n'ait pas inspiré grand monde...

★★★★★★★

Exercice 4

Dans tout l'exercice, on prend comme convention : $\forall x \in \mathbb{R},\ x^0 = 1$.
L'objectif de l'exercice est d'établir :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

Partie A. Programme Python.

1. Recopier et compléter le script Python suivant de sorte que, si $k \in \mathbb{N}$, alors l'exécution de `factorielle(k)` renvoie la valeur de $k!$.

```
def factorielle(k):
    res=......
    for i in range(......):
        res=......
    return res
```

```
def factorielle(k):
    res=1
    for i in range(1,k+1):
        res=i*res
    return res
```

2. **2.a.** Écrire une fonction Python prenant en arguments d'entrée un réel x et un entier naturel n, puis renvoyant en sortie la liste composée des réels : $\frac{x^0}{0!}, \frac{x^1}{1!}, \ldots, \frac{x^n}{n!}$.

```
def liste(x,n):
    L=[x**k/factorielle(k) for k in range(0,n+1)]
    return L
```

   2.b. En déduire une fonction Python prenant en arguments d'entrée un réel x et un entier naturel n, puis renvoyant en sortie la valeur de $\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

```
def somme(x,n):
    return sum(liste(x,n))
```

3. Compléter le programme suivant de sorte que, si $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, alors l'exécution de `CB_somme(x,n)` renvoie la valeur de $\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

```
def CB_somme(x,n):
    facto=......
    S=......
    for k in range(1,n+1):
        facto=k*facto
        S=......
    return S
```

```
def CB_somme(x,n):
    facto=1
    S=1
    for k in range(1,n+1):
        facto=k*facto
        S=S+x**k/facto
    return S
```

4. Entre les programmes des questions 2.b. et 3., lequel préférer ? Justifier la réponse.
On préfère le programme de la question 3. puisqu'il nécessite moins de calculs que celui que de la question 2.b..
En effet, dans celui de la question 2.b., le calcul de $k!$ se refait complètement à chaque fois, au lieu de simplement utiliser le $(k-1)!$ déjà utilisé dans $\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$ comme c'est le cas du programme de la question 3..

Partie B. Une croissance comparée.

L'objectif de cette partie est d'établir le résultat suivant, qui sera utile dans la partie C :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n \to +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Considérons la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{|x|^n}{n!}$. Posons $n_0 = \lfloor 2|x| \rfloor$.

5. Rappeler l'encadrement reliant x et $\lfloor x \rfloor$.

On a :

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

> **Pourquoi ?** Cet encadrement découle de la définition de $\lfloor x \rfloor$: le plus grand entier inférieur ou égal à x.

6. Démontrer : $\forall n \in [\![n_0 ; +\infty [\![,\ u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2} u_n$. En déduire :

$$\forall n \in [\![n_0 ; +\infty [\![,\ u_n \leq \frac{1}{2^{n-n_0}} u_{n_0}$$

- Soit $n \in [\![n_0 ; +\infty [\![$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n &= \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{|x|^n}{2n!} \\ &= \frac{2|x|^{n+1} - (n+1)|x|^n}{2(n+1)!} \\ &= \frac{|x|^n \big(2|x| - (n+1)\big)}{2(n+1)!} \end{aligned}$$

Or :

$$|x| \geq 0 \ ; \ 2(n+1)! > 0$$

Et, on sait que $n \geq n_0 = \lfloor 2|x| \rfloor$. Ainsi :

$$n+1 \geq \lfloor 2|x| \rfloor + 1$$

Puis, d'après la question précédente :

$$n+1 > 2|x|$$

Par conséquent :

$$|2x| - (n+1) < 0$$

D'où :

$$\frac{|x|^n \big(2|x| - (n+1)\big)}{2(n+1)!} \leq 0$$

> **Conclusion :** $\forall n \in [\![n_0 ; +\infty [\![,\ u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2} u_n$.

- Par récurrence...
  - **Initialisation.** Pour $n = n_0$:
    $\dfrac{1}{2^{n_0 - n_0}} u_{n_0} = u_{n_0} \geq u_{n_0}$: l'initialisation est vérifiée.
  - **Hérédité.** Soit $n \in [\![n_0 ; +\infty [\![$. Supposons "$u_n \leq \dfrac{1}{2^{n-n_0}} u_{n_0}$" et montrons "$u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2^{n+1-n_0}} u_{n_0}$".
    Par hypothèse de récurrence :
    $$u_n \leq \frac{1}{2^{n-n_0}} u_{n_0}$$
    D'où :
    $$\frac{1}{2} u_n \leq \frac{1}{2^{n+1-n_0}} u_{n_0}$$
    Mais, d'après le point précédent :
    $$u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$$
    Par transitivité, on obtient finalement :
    $$u_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1-n_0}} u_{n_0}$$
    L'hérédité est ainsi établie.

> **Conclusion :** $\forall n \in [\![n_0 ; +\infty [\![,\ u_n \leq \dfrac{1}{2^{n-n_0}} u_{n_0}$.

7. Conclure.

Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq \frac{1}{2^{n-n_0}} u_{n_0}$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$, donc, par opération :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^{n-n_0}} u_{n_0} = 0$$

Par théorème d'encadrement, on a ainsi :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

> **Conclusion :** on a finalement établi : $\forall x \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0$.

> **Petite remarque** Cette partie B était très proche de l'exercice 8 du chapitre 10...

Partie C. Démonstration.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n et g_n les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R},\ g_n(x) = f_n(x) + \frac{x^n}{n!} e^{-x}$$

8. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(0)$ et $g_n(0)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} f_n(0) &= e^0 \sum_{k=0}^{n} \frac{0^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{0^k}{k!} \\ &= \frac{0^0}{0!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{0^k}{k!} && \forall k \geq 1,\ 0^k = 0 \text{ et } 0^0 = 1 \text{ (énoncé)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} g_n(0) &= f_n(0) + \frac{0^n}{n!} e^0 && \text{car } n \geq 1, \text{ donc } 0^n = 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(0) = g_n(0) = 1$.

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que les fonctions f_n et g_n sont dérivables sur $\mathbb{R}$ puis établir :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n'(x) = -\frac{x^n}{n!} e^{-x} \quad ; \quad g_n'(x) = \frac{n-2x}{n!} x^{n-1} e^{-x}$$

- Posons $h_n : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. La fonction f_n est le produit de la fonction $x \longmapsto e^{-x}$ et de h_n, qui est polynomiale, toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$. Ainsi f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$.
  Par conséquent, g_n est également dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$h_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

D'où :

$$\begin{aligned} h_n'(x) &= 0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{k x^{k-1}}{k!} && k \neq 0 \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} && \text{changement d'indice } j = k-1 \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^j}{j!} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= -e^{-x} h_n(x) + e^{-x} h_n'(x) \\ &= e^{-x}\big(h_n'(x) - h_n(x)\big) \\ &= e^{-x}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right) \\ &= e^{-x} \frac{-x^n}{n!} \\ &= -\frac{x^n}{n!} e^{-x} \end{aligned}$$

Puis :

$$\begin{aligned} g_n'(x) &= f_n'(x) + \frac{n x^{n-1}}{n!} e^{-x} - \frac{x^n}{n!} e^{-x} \\ &= -\frac{x^n}{n!} e^{-x} + \frac{n x^{n-1}}{n!} e^{-x} - \frac{x^n}{n!} e^{-x} \\ &= \frac{e^{-x} x^{n-1}}{n!}\big(-x + n - x\big) \\ &= \frac{n-2x}{n!} x^{n-1} e^{-x} \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall x \in [0;+\infty[,\ f_n'(x) = -\frac{x^n}{n!} e^{-x}$; $g_n'(x) = \frac{n-2x}{n!} x^{n-1} e^{-x}$.

10. Premier cas : si $x \in [0;+\infty[$.

10.a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déduire de la question précédente les tableaux de variations des fonctions f_n et g_n sur $[0;+\infty[$.

Puisque $x \geq 0$, on a immédiatement :

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$f_n'(x)$	$-$
f_n	1 $\searrow$

x	0		$\frac{n}{2}$		$+\infty$
$g_n'(x)$		$+$	0	$-$	
g_n	1	$\nearrow$	$g_n\left(\frac{n}{2}\right)$	$\searrow$	

10.b. Soient $x \in [0;+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq 2x$. Démontrer alors :

$$f_n(x) \leq 1 \leq g_n(x)$$

En déduire :

$$0 \leq e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leq \frac{x^n}{n!}$$

- Puisque $n \geq 2x$, on a :

$$0 \leq x \leq \frac{n}{2}$$

Ainsi :

◇ en appliquant f_n, décroissante sur $\mathbb{R}^+$, on obtient :

$$f_n(0) \geq f_n(x) \geq f_n\left(\frac{n}{2}\right)$$

En particulier, puisque $f_n(0) = 1$:

$$1 \geq f_n(x)$$

◇ en appliquant g_n, croissante sur $\left[0; \frac{n}{2}\right]$, on obtient :

$$g_n(0) \leq g_n(x) \leq g_n\left(\frac{n}{2}\right)$$

En particulier, puisque $g_n(0) = 1$:

$$1 \leq g_n(x)$$

Par conséquent :

$$f_n(x) \leq 1 \leq g_n(x)$$

- On a ainsi obtenu :

$$e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leq 1 \leq e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^n}{n!} e^{-x}$$

En multipliant par $e^x > 0$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leq e^x \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^n}{n!}$$

D'où :

$$0 \leq e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leq \frac{x^n}{n!}$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \forall n \geq \lfloor 2x \rfloor + 1,\ 0 \leq e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leq \frac{x^n}{n!}$.

10.c. Conclure.

Soit $x \in [0;+\infty[$. D'après la question précédente :

$$\forall n \geq \lfloor 2x \rfloor + 1,\ 0 \leq e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leq \frac{x^n}{n!}$$

Mais, d'après la question **7.** :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

D'où, par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right) = 0$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x$.

11. Second cas : si $x \in]-\infty;0[$.

11.a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner les tableaux de variations des fonctions f_{2n} et f_{2n+1} sur $]-\infty;0]$.

Soit $x \in]-\infty;0]$. On a, d'après la question **9.** :

$$f_{2n}'(x) = -\frac{x^{2n}}{(2n)!} e^{-x} \quad ; \quad f_{2n+1} = -\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} e^{-x}$$

Or $2n$ est pair, donc $x^{2n} \geq 0$ et, puisque $2n+1$ est impair et x négatif, $x^{2n+1} \leq 0$. D'où :

x	0		$+\infty$
$f_{2n}'(x)$		$-$	
f_{2n}	1	$\searrow$	

x	0 $\quad\quad +\infty$
$f'_{2n+1}(x)$	$-$
f_{2n+1}	1 ↗

11.b. Soient $x \in]-\infty; 0[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer alors :

$$f_{2n+1}(x) \leq 1 \leq f_{2n}(x)$$

En déduire :

$$0 \leq e^x - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{x^k}{k!} \leq -\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad ; \quad \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \leq e^x - \sum_{k=0}^{2n} \frac{x^k}{k!} \leq 0$$

- On a :

$$x \leq 0$$

Ainsi :

  - en appliquant f_{2n}, décroissante sur $\mathbb{R}^-$:

$$f_{2n}(x) \geq f_{2n}(0)$$

Autrement dit, puisque $f_{2n}(0) = 1$:

$$f_{2n}(x) \geq 1$$

  - en appliquant f_{2n}, croissante sur $\mathbb{R}^-$:

$$f_{2n+1}(x) \leq f_{2n}(0)$$

Autrement dit, puisque $f_{2n+1}(0) = 1$:

$$f_{2n+1}(x) \leq 1$$

Par conséquent :

$$f_{2n+1}(x) \leq 1 \leq f_{2n}(x)$$

- On a ainsi :

$$e^{-x} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{x^k}{k!} \leq 1 \leq e^{-x} \sum_{k=0}^{2n} \frac{x^k}{k!}$$

Puis, en multipliant par $e^x > 0$:

$$\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{x^k}{k!} \leq e^x \leq \sum_{k=0}^{2n} \frac{x^k}{k!}$$

  - en soustrayant $\sum\limits_{k=0}^{2n+1} \frac{x^k}{k!}$, on obtient :

$$0 \leq e^x - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{x^k}{k!} \leq -\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

  - en soustrayant $\sum\limits_{k=0}^{2n} \frac{x^k}{k!}$, on obtient :

$$\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \leq e^x - \sum_{k=0}^{2n} \frac{x^k}{k!} \leq 0$$

Conclusion : $\forall x \in]-\infty; 0[, \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ 0 \leq e^x - \sum\limits_{k=0}^{2n+1} \frac{x^k}{k!} \leq -\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ET $\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \leq e^x - \sum\limits_{k=0}^{2n} \frac{x^k}{k!} \leq 0.$

11.c. En déduire que, pour tout $x \in]-\infty; 0[$, les suites $\big(f_{2n}(x)\big)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $\big(f_{2n+1}(x)\big)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent toutes deux vers e^x.

Soit $x \in]-\infty; 0[$.

- On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ 0 \leq e^x - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{x^k}{k!} \leq -\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

et, d'après la question **7.** :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0$$

D'où, par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(e^x - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{x^k}{k!} \right) = 0$$

Conclusion : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{2n+1} \frac{x^k}{k!} = e^x$

- On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \leq e^x - \sum_{k=0}^{2n} \frac{x^k}{k!}$$

et, d'après la question **7.** :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 0$$

D'où, par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(e^x - \sum_{k=0}^{2n} \frac{x^k}{k!} \right) = 0$$

Conclusion : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{2n} \frac{x^k}{k!} = e^x$

Conclusion : pour tout $x \in]-\infty; 0[$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{2n+1} \frac{x^k}{k!} = \lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{2n} \frac{x^k}{k!} = e^x$.

11.d. Conclure.

Soit $x \in]-\infty; 0[$. D'après la question précédente, les suites $\left(\sum\limits_{k=0}^{2n} \frac{x^k}{k!} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $\left(\sum\limits_{k=0}^{2n+1} \frac{x^k}{k!} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent toutes deux vers e^x.

Ainsi, par théorème de recouvrement, la suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers e^x.

Ce qu'il faut retenir des copies : Exercice peu traité en dehors des questions `Python`. A bien retravailler...