Concours blanc 1

Samedi 10 décembre 2022 - 4h00

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :

- ***la copie devra présenter une en-tête d'au moins une demi-page ainsi qu'une marge suffisante,***
- ***toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,***
- ***les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),***
- ***les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.***

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.

"*L'âge mûr devient sot et négligent lorsqu'il sous-estime la jeunesse.*"
Albus Dumbledore [Harry Potter et le Prince de Sang Mêlé]

Exercice 1

Considérons la fonction $f : x \longmapsto \ln(1+x) + \dfrac{1}{1+x} - 1$, définie sur $]-1;+\infty[$.

1. 1.a. Déterminer $\displaystyle\lim_{\substack{X\to 0\\ X>0}} \left(\ln(X) + \frac{1}{X}\right)$.

   1.b. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition, et préciser les éventuelles asymptotes de sa courbe représentative.
2. Dresser le tableau de variations complet de f sur $]-1;+\infty[$.
3. Établir :
$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) \leq x^2$$

On considère à présent la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$; $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

4. Démontrer que la suite (u_n) est bien définie et minorée par 0.
5. Établir :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq u_n^2$$
6. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leq \left(\ln(2) - \frac{1}{2}\right)^{2^{n-1}}$$
7. Démontrer finalement la convergence de la suite (u_n) et préciser sa limite.

★★★★★★★

Exercice 2

Considérons la fonction $f : x \longmapsto (x-1)^2$, définie sur $\mathbb{R}$, ainsi que la suite (u_n) définie par :
$$u_0 = \frac{1}{2}\ ;\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Écrire un programme permettant d'afficher la liste des termes u_0 à u_{10}. L'exécution de ce programme doit afficher :

```
[0.5, 0.25, 0.562, 0.191, 0.654, 0.12, 0.775, 0.051, 0.901, 0.01, 0.981]
```

   Si $a \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$, la commande `round(a,p)` *renvoie l'arrondi de a à 10^{-p} près.*
2. Donner les variations de f sur $\mathbb{R}$ puis établir : $\forall x \in [0;1],\ f(x) \in [0;1]$.
3. Démontrer que f possède un unique point fixe sur $[0;1]$ et le déterminer. *On notera α ce point fixe.* Établir : $\dfrac{1}{4} < \alpha < \dfrac{1}{2}$.
4. Représenter l'allure de la courbe de f sur $[0;1]$, ainsi que les premiers termes de la suite (u_n). Que peut-on conjecturer ?
5. Résoudre l'équation $f \circ f(x) = x$, d'inconnue $x \in [0;1]$.
6. 6.a. Démontrer :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_{2n+3} \leq u_{2n+1} \leq \alpha \leq u_{2n} \leq u_{2n+2} \leq 1$$

   6.b. Justifier que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes. On notera ℓ et ℓ' leurs limites respectives.

   6.c. Démontrer que $\ell = 1$. Établir : $\ell' = f(\ell)$. En déduire la valeur de ℓ'.
7. Que peut-on déduire des questions précédentes quant à la suite (u_n) ?

★★★★★★★

Exercice 3

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. L'exécution du programme suivant

```
import numpy as np

A=np.array([[-1,-2,3],[1,2,-1],[-1,-1,3]])
A2=np.dot(A,A)
A3=np.dot(A2,A)
print(A3-4*A2+5*A)
```

affiche le résultat :

```
[[2 0 0]
 [0 2 0]
 [0 0 2]]
```

Interpréter ce résultat.

2. Déduire de la question précédente que A est inversible et exprimer son inverse en fonction de I_3, A et A^2.

Partie A. Puissances par trigonalisation.

3. Justifier que la matrice $A - 2I_3$ n'est pas inversible puis résoudre l'équation $AX = 2X$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
4. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Démontrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
5. Vérifier que la matrice $P^{-1}AP$ est triangulaire supérieur. On notera T cette matrice. Démontrer ensuite :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PT^nP^{-1}$$

6. 6.a. 6.a.i. Posons $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer N^2 puis en déduire, pour tout $k \in [\![2;+\infty[\![$, N^k.

   6.a.ii. Déterminer alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de T^n.

   6.b. Proposer une autre méthode pour déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de T^n (sans la mettre en œuvre).
7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déduire des questions précédentes l'expression de A^n en fonction de n.

Partie B. Puissances par division euclidienne.

8. **Question préliminaire.**
Soient P une fonction polynomiale de degré supérieur ou égal à 2 et α un réel. Démontrer le résultat :

$$\Big(\exists Q \in \mathbb{R}[x] \,/\, \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x-\alpha)^2 Q(x)\Big) \iff \Big(P(\alpha) = 0 \ \text{ ET } \ P'(\alpha) = 0\Big)$$

9. On considère la fonction polynomiale $P : x \longmapsto x^3 - 4x^2 + 5x - 2$.

   9.a. Déterminer les racines de P.

   9.b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On admet qu'il existe deux fonctions polynomiales Q_n et R_n telles que : $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ x^n = P(x)Q_n(x) + R_n(x) \\ \deg(R_n) < \deg(P) \end{cases}$.

   Établir :

$$R_n(1) = 1 \ ;\ R_n(2) = 2^n \ ;\ R_n'(1) = n$$

   En déduire l'expression de R_n.
10. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déduire des questions précédentes l'expression de A^n en combinaison linéaire de I_3, A et A^2. Cette expression est-elle encore valable pour $n = -1$?

★★★★★★★

Exercice 4

Dans tout l'exercice, on prend comme convention : $\forall x \in \mathbb{R},\ x^0 = 1$.
L'objectif de l'exercice est d'établir :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

Partie A. Programme Python.

1. Recopier et compléter le script Python suivant de sorte que, si $k \in \mathbb{N}$, alors l'exécution de `factorielle(k)` renvoie la valeur de $k!$.

```
def factorielle(k):
    res =......
    for i in range(......):
        res =......
    return res
```

2. 2.a. Écrire une fonction Python prenant en arguments d'entrée un réel x et un entier naturel n, puis renvoyant en sortie la liste composée des réels : $\frac{x^0}{0!}, \frac{x^1}{1!}, \ldots, \frac{x^n}{n!}$.

2.b. En déduire une fonction Python prenant en arguments d'entrée un réel x et un entier naturel n, puis renvoyant en sortie la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

3. Compléter le programme suivant de sorte que, si $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, alors l'exécution de `CB_somme(x,n)` renvoie la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

```python
def CB_somme(x,n):
    facto =......
    S =......
    for k in range(1,n+1):
        facto=k*facto
        S =......
    return S
```

4. Entre les programmes des questions 2.b. et 3., lequel préférer ? Justifier la réponse.

Partie B. Une croissance comparée.

L'objectif de cette partie est d'établir le résultat suivant, qui sera utile dans la partie C :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n \to +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Considérons la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{|x|^n}{n!}$. Posons $n_0 = \lfloor 2|x| \rfloor$.

5. Rappeler l'encadrement reliant x et $\lfloor x \rfloor$.
6. Démontrer : $\forall n \in [\![n_0 ; +\infty [\![,\ u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2} u_n$. En déduire :

$$\forall n \in [\![n_0 ; +\infty [\![,\ u_n \leq \frac{1}{2^{n-n_0}} u_{n_0}$$

7. Conclure.

Partie C. Démonstration.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n et g_n les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R},\ g_n(x) = f_n(x) + \frac{x^n}{n!} e^{-x}$$

8. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(0)$ et $g_n(0)$.
9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que les fonctions f_n et g_n sont dérivables sur $\mathbb{R}$ puis établir :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n'(x) = -\frac{x^n}{n!} e^{-x} \ ; \ g_n'(x) = \frac{n-2x}{n!} x^{n-1} e^{-x}$$

10. **Premier cas : si $x \in [0 ; +\infty[$.**
    - 10.a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déduire de la question précédente les tableaux de variations des fonctions f_n et g_n sur $[0 ; +\infty[$.
    - 10.b. Soient $x \in [0 ; +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq 2x$. Démontrer alors :

$$f_n(x) \leq 1 \leq g_n(x)$$

En déduire :

$$0 \leq e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leq \frac{x^n}{n!}$$

    - 10.c. Conclure.
11. **Second cas : si $x \in]-\infty ; 0[$.**
    - 11.a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner les tableaux de variations des fonctions f_{2n} et f_{2n+1} sur $]-\infty ; 0]$.
    - 11.b. Soient $x \in]-\infty ; 0[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer alors :

$$f_{2n+1}(x) \leq 1 \leq f_{2n}(x)$$

En déduire :

$$0 \leq e^x - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{x^k}{k!} \leq -\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad ; \quad \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \leq e^x - \sum_{k=0}^{2n} \frac{x^k}{k!} \leq 0$$

    - 11.c. En déduire que, pour tout $x \in]-\infty ; 0[$, les suites $\left(f_{2n}(x)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $\left(f_{2n+1}(x)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent toutes deux vers e^x.
    - 11.d. Conclure.