Devoir surveillé 5

Samedi 11 mars 2023 - 4h00

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :

- ***la copie devra présenter une en-tête d'au moins une demi-page ainsi qu'une marge suffisante,***
- ***toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,***
- ***les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),***
- ***les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.***

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.

"*Il faut boire jusqu'à l'ivresse sa jeunesse, car tous les instants de nos vingt ans nous sont comptés ; et jamais plus le temps perdu ne nous fait face.*"
Charles Aznavour

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Pour tout $(i,j) \in [\![1;3]\!]^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient situé en i-ième ligne et j-ième colonne, qui vaut 1.

1. **Question de cours.**
Soient E un espace vectoriel de dimension finie ainsi que F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1.a. Démontrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

- Puisque F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, on a $F \cap G \subset E$, et E est un espace vectoriel.
- F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, donc $0_{\vec{E}} \in F$ et $0_{\vec{E}} \in G$. Ainsi : $0_{\vec{E}} \in F \cap G$, et $F \cap G$ est donc non vide.
- Montrons que $F \cap G$ est stable par combinaison linéaire.
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $\vec{u}, \vec{v} \in F \cap G$. Montrons que $a\vec{u} + b\vec{v} \in F \cap G$.
  - Puisque $\vec{u}, \vec{v} \in F \cap G$, en particulier : $\vec{u}, \vec{v} \in F$.
  Mais F est un espace vectoriel, il est donc stable par combinaison linéaire.
  D'où :
  $$a\vec{u} + b\vec{v} \in F$$
  - De même :
  $$a\vec{u} + b\vec{v} \in G$$

  Par conséquent :
  $$a\vec{u} + b\vec{v} \in F \cap G$$
  $F \cap G$ est donc stable par combinaison linéaire.

Conclusion : $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

1.b. Établir : $\dim(F \cap G) \leq \min\big(\dim(F), \dim(G)\big)$.

- On sait que $F \cap G \subset F$. Et comme $F \cap G$ et F sont des espaces vectoriels, on a alors :
$$\dim(F \cap G) \leq \dim(F)$$
- De même :
$$\dim(F \cap G) \leq \dim(G)$$

Conclusion : $\dim(F \cap G) \leq \min\big(\dim(F), \dim(G)\big)$.

2. **2.a.** Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}_1(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ AX = X\}$ est un espace vectoriel et en donner une base ainsi que la dimension.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} AX = X \quad & \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & - & 2z & = & x \\ 2x & - & y & - & 4z & = & y \\ -x & + & y & + & 3z & = & z \end{array} \right. \\ & \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & - & 2z & = & 0 \\ 2x & - & 2y & - & 4z & = & 0 \\ -x & + & y & + & 2z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\iff} \left\{ x - y - 2z = 0 \right. \\ & \iff \left\{ x = y + 2z \right. \\ & \iff X = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1(A) & = \left\{ y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ / \ (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ & = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

- Par conséquent, $\mathcal{E}_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et donc un espace vectoriel.
- De plus, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est :
  - génératrice de $\mathcal{E}_1(A)$ d'après ce qui précède,
  - libre, car constituée de deux vecteurs non colinéaires.

  Par conséquent, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{E}_1(A)$ et ainsi $\dim\big(\mathcal{E}_1(A)\big) = 2$.

✓ Rigueur !
Pour davantage de rigueur, on peut quantifier ainsi : "Soit $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Il existe alors $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$."

Petite remarque
On pense bien à terminer les équivalences par "X = ...", puisque X est l'inconnue ici.

Petite remarque
On peut rajouter l'argument "Puisque $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $\mathcal{E}_1(A)$ est ainsi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
Mais il n'est souvent pas exigé.

2.b. Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}_2(A) = \left\{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \;/\; AX = 2X\right\}$ est un espace vectoriel et en donner une base ainsi que la dimension.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$
\begin{aligned}
AX = 2X \quad & \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & - & 2z & = & 2x \\ 2x & - & y & - & 4z & = & 2y \\ -x & + & y & + & 3z & = & 2z \end{array}\right. \\
& \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} & - & y & - & 2z & = & 0 \\ 2x & - & 3y & - & 4z & = & 0 \\ -x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \\
& \underset{L_2 \leftrightarrow L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 3y & - & 4z & = & 0 \\ & - & y & - & 2z & = & 0 \\ -x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \\
& \underset{L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 3y & - & 4z & = & 0 \\ & - & y & - & 2z & = & 0 \\ & - & y & - & 2z & = & 0 \end{array}\right. \\
& \iff \left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & - & 3y & = & 4z \\ & & y & = & -2z \end{array}\right. \\
& \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -z \\ y & = & -2z \end{array}\right. \\
& \iff X = z \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Ainsi :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_2(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \;/\; z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}
$$

Petite remarque
On peut rajouter l'argument "Puisque $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $\mathcal{E}_2(A)$ est ainsi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
Mais il n'est souvent pas exigé.

- Par conséquent, $\mathcal{E}_2(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et donc un espace vectoriel.
- De plus, la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est :
  - génératrice de $\mathcal{E}_2(A)$ d'après ce qui précède,
  - libre, car constituée d'un unique vecteur non nul.

  Par conséquent, la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{E}_2(A)$ et ainsi $\dim\left(\mathcal{E}_2(A)\right) = 1$.

2.c. Établir : $\mathcal{E}_1(A) \cap \mathcal{E}_2(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Raisonnons pas double-inclusion...

Petite remarque
L'avantage de cette méthode : elle ne dépend pas des résultats des deux questions précédentes...

$\boxed{\supset}$ Puisque $\mathcal{E}_1(A)$ et $\mathcal{E}_2(A)$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a déjà :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathcal{E}_1(A) \cap \mathcal{E}_2(A)$$

$\boxed{\subset}$ Soit $X \in \mathcal{E}_1(A) \cap \mathcal{E}_2(A)$. Ainsi :

$$AX = X \quad \text{ET} \quad AX = 2X$$

D'où :

$$2X = X$$

Et donc :

$$X = 0_{3,1}$$

Ainsi :

$$\mathcal{E}_1(A) \cap \mathcal{E}_2(A) \subset \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Conclusion : $\mathcal{E}_1(A) \cap \mathcal{E}_2(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

2.d. Démontrer que la famille obtenue en concaténant les bases de $\mathcal{E}_1(A)$ et $\mathcal{E}_2(A)$ (obtenues en questions 2.a et 2.b.) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Montrons donc que la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- Montrons que cette famille est libre.

  Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Supposons $a \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On a :

$$a\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -a & + & b & + & 2c & = & 0\\ -2a & + & b & & & = & 0\\ a & & & + & c & = & 0\end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_1\\ L_3\leftarrow L_3+L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -a & + & b & + & 2c & = & 0\\ & - & b & - & 4c & = & 0\\ & + & b & + & 3c & = & 0\end{array}\right.$$

$$\underset{L_3\leftarrow L_3+L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -a & + & b & + & 2c & = & 0\\ & - & b & - & 4c & = & 0\\ & & & - & c & = & 0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 0\\ b & = & 0\\ c & = & 0\end{array}\right.$$

Par conséquent, la famille $\left(\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est libre.

- Or, $\mathrm{Card}\left(\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right)=3=\dim\left(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\right)$.

Conclusion : la famille $\left(\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

3. On considère la matrice $P=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ -2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

3.a. Justifier que la matrice P est inversible et déterminer son inverse, notée P^{-1}.

Méthode habituelle...

Conclusion : P est inversible et $P^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ -2 & 3 & 4\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$.

3.b. Calculer la matrice $P^{-1}AP$, notée D.

...

Conclusion : $P^{-1}AP=D$, avec $D=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

4. On considère les ensembles $\mathcal{C}_A=\{M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})\ /\ AM=MA\}$ et $\mathcal{C}_D=\{N\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})\ /\ DN=ND\}$.

4.a. Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}_A$ est un espace vectoriel.

- Par définition, $\mathcal{C}_A\subset\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel ;
- La matrice nulle appartient à $\mathcal{C}_A$ (car $A\times 0_3=0_3\times A$), donc $\mathcal{C}_A$ est non vide.
- Montrons que $\mathcal{C}_A$ est stable par combinaison linéaire.
  Soient $a,b\in\mathbb{R}$ et $M,N\in\mathcal{C}_A$. Montrons que $aM+bN\in\mathcal{C}_A$.
  - $aM+bN\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, car $M,N\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et que $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel ;
  - $$\begin{array}{rcll} A(aM+bN) & = & aAM+bAN & \\ & = & aMA+bNA & M,N\in\mathcal{C}_A\\ & = & (aM+bN)A & \end{array}$$

  Par conséquent : $aM+bN\in\mathcal{C}_A$.
  $\mathcal{C}_A$ est donc stable par combinaison linéaire.

Conclusion : $\mathcal{C}_A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, donc un espace vectoriel.

Petite remarque

On structure bien cette question... 3 points, puis 2 sous-points dans le troisième ! En effet, 2 critères pour appartenir à $\mathcal{C}_A$: être dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et commuter avec A.

☞ Pour info...

L'ensemble $\mathcal{C}_A$ (qui est un EV) est appelé **commutant de A.**

4.b. Soient $M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $N=P^{-1}MP$. Montrer l'équivalence :

$$M\in\mathcal{C}_A \iff N\in\mathcal{C}_D$$

On a :

$$\begin{array}{rcll} M\in\mathcal{C}_A & \iff & AM=MA & \\ & \iff & PDP^{-1}PNP^{-1}=PNP^{-1}PDP^{-1} & A=PDP^{-1} \text{ et } M=PNP^{-1}\\ & \iff & PDNP^{-1}=PNDP^{-1} & PP^{-1}=P^{-1}P=I_3\\ & \iff & DN=ND & \\ & \iff & N\in\mathcal{C}_D & \end{array}$$

Conclusion : $M\in\mathcal{C}_A \iff P^{-1}MP\in\mathcal{C}_D$.

4.c. Démontrer que $\mathcal{C}_D=\mathrm{Vect}\left(E_{1,1},E_{2,2},E_{2,3},E_{3,2},E_{3,3}\right)$, puis justifier que la famille $\left(E_{1,1},E_{2,2},E_{2,3},E_{3,2},E\right.$ est libre.

- Soit $N=\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

✓ Rigueur !

Pour davantage de rigueur, on peut quantifier ainsi : "Soit $N\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Il existe alors $(a,b,c,d,e,f,g,h,i)\in\mathbb{R}^9$ tel que $N=\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}$."

On a :

$$\mathrm{DN}=\mathrm{ND} \iff \begin{pmatrix}2a & 2b & 2c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a & b & c\\ 2d & e & f\\ 2g & h & i\end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{cases} 2a = 2a\\ 2b = b\\ 2c = c\\ d = 2d\\ e = e\\ f = f\\ g = 2g\\ h = h\\ i = i\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} b = 0\\ c = 0\\ d = 0\\ g = 0\end{cases}$$
$$\iff \mathrm{N}=\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & e & f\\ 0 & h & i\end{pmatrix}$$

Rédaction : La rédaction de cette question est analogue à celle des questions 2.a. et 2.b....

Petite remarque : On pense bien à terminer les équivalences par "N = ...", puisque N est l'inconnue ici.

Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_\mathrm{D} &= \left\{\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & e & f\\ 0 & h & i\end{pmatrix} / (a,e,f,h,i)\in\mathbb{R}^5\right\}\\ &= \left\{a\mathrm{E}_{1,1}+e\mathrm{E}_{2,2}+f\mathrm{E}_{2,3}+h\mathrm{E}_{3,2}+i\mathrm{E}_{3,3} / (a,e,f,h,i)\in\mathbb{R}^5\right\}\\ &= \mathrm{Vect}\left(\mathrm{E}_{1,1},\mathrm{E}_{2,2},\mathrm{E}_{2,3},\mathrm{E}_{3,2},\mathrm{E}_{3,3}\right)\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathcal{C}_\mathrm{D}=\mathrm{Vect}\left(\mathrm{E}_{1,1},\mathrm{E}_{2,2},\mathrm{E}_{2,3},\mathrm{E}_{3,2},\mathrm{E}_{3,3}\right)$.

- La famille $\left(\mathrm{E}_{1,1},\mathrm{E}_{2,2},\mathrm{E}_{2,3},\mathrm{E}_{3,2},\mathrm{E}_{3,3}\right)$ est une sous-famille de la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$; elle est donc une sous-famille d'une famille libre.

Conclusion : la famille $\left(\mathrm{E}_{1,1},\mathrm{E}_{2,2},\mathrm{E}_{2,3},\mathrm{E}_{3,2},\mathrm{E}_{3,3}\right)$ est libre.

4.d. Montrer que la famille $\left(\mathrm{PE}_{1,1}\mathrm{P}^{-1},\mathrm{PE}_{2,2}\mathrm{P}^{-1},\mathrm{PE}_{2,3}\mathrm{P}^{-1},\mathrm{PE}_{3,2}\mathrm{P}^{-1},\mathrm{PE}_{3,3}\mathrm{P}^{-1}\right)$ est une base de $\mathcal{C}_\mathrm{A}$.

D'après la question précédente, la famille $\left(\mathrm{E}_{1,1},\mathrm{E}_{2,2},\mathrm{E}_{2,3},\mathrm{E}_{3,2},\mathrm{E}_{3,3}\right)$ est libre et génératrice de $\mathcal{C}_\mathrm{D}$; elle en est donc une base.
Déduisons-en que la famille $\left(\mathrm{PE}_{1,1}\mathrm{P}^{-1},\mathrm{PE}_{2,2}\mathrm{P}^{-1},\mathrm{PE}_{2,3}\mathrm{P}^{-1},\mathrm{PE}_{3,2}\mathrm{P}^{-1},\mathrm{PE}_{3,3}\mathrm{P}^{-1}\right)$ est une base de $\mathcal{C}_\mathrm{A}$.
Soit $\mathrm{M}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}\mathrm{M}\in\mathcal{C}_\mathrm{A} &\iff \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}\in\mathcal{C}_\mathrm{D} && \text{d'après la question 4.b.}\\ &\iff \exists!(a,b,c,d,e)\in\mathbb{R}^5 / \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}=a\mathrm{E}_{1,1}+b\mathrm{E}_{2,2}+c\mathrm{E}_{2,3}+d\mathrm{E}_{3,2}+e\mathrm{E}_{3,3} && \text{car } \left(\mathrm{E}_{1,1},\mathrm{E}_{2,2},\mathrm{E}_{2,3},\mathrm{E}_{3,2},\mathrm{E}_{3,3}\right) \text{ est une base de } \mathcal{C}_\mathrm{D}\\ &\iff \exists!(a,b,c,d,e)\in\mathbb{R}^5 / \mathrm{M}=\mathrm{P}\left(a\mathrm{E}_{1,1}+b\mathrm{E}_{2,2}+c\mathrm{E}_{2,3}+d\mathrm{E}_{3,2}+e\mathrm{E}_{3,3}\right)\mathrm{P}^{-1}\\ &\iff \exists!(a,b,c,d,e)\in\mathbb{R}^5 / \mathrm{M}=a\mathrm{PE}_{1,1}\mathrm{P}^{-1}+b\mathrm{PE}_{2,2}\mathrm{P}^{-1}+c\mathrm{PE}_{2,3}\mathrm{P}^{-1}+d\mathrm{PE}_{3,2}\mathrm{P}^{-1}+e\mathrm{PE}_{3,3}\mathrm{P}^{-1}\end{aligned}$$

Rappel... La famille $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n)$ est une base de E ssi : $\forall\vec{u}\in\mathrm{E},\ \exists!(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n / \vec{u}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\vec{e}_i$.

Conclusion : la famille $\left(\mathrm{PE}_{1,1}\mathrm{P}^{-1},\mathrm{PE}_{2,2}\mathrm{P}^{-1},\mathrm{PE}_{2,3}\mathrm{P}^{-1},\mathrm{PE}_{3,2}\mathrm{P}^{-1},\mathrm{PE}_{3,3}\mathrm{P}^{-1}\right)$ est une base de $\mathcal{C}_\mathrm{A}$.

5. Pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, on note $\mathrm{M}(a,b)$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$\mathrm{M}(a,b)=\begin{pmatrix}a+2b & -b & -2b\\ 2b & a-b & -4b\\ -b & b & a+3b\end{pmatrix}$$

On considère également : $\mathcal{E}=\{\mathrm{M}(a,b) / (a,b)\in\mathbb{R}^2\}$.

5.a. Justifier que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel et en déterminer une base.

On a :

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \left\{\begin{pmatrix}a+2b & -b & -2b\\ 2b & a-b & -4b\\ -b & b & a+3b\end{pmatrix} / (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}\\ &= \left\{a\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}2 & -1 & -2\\ 2 & -1 & -4\\ -1 & 1 & 3\end{pmatrix} / (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}\\ &= \{a\mathrm{I}_3+b\mathrm{A} / (a,b)\in\mathbb{R}^2\}\end{aligned}$$

L'ensemble $\mathcal{E}$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et la famille $(\mathrm{I}_3,\mathrm{A})$ est :

- génératrice de $\mathcal{E}$ par définition,
- libre car constituée seulement de deux vecteurs non colinéaires.

Conclusion : $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel et la famille $(\mathrm{I}_3,\mathrm{A})$ en est une base.

5.b. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Prouver que la matrice $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{M}(a,b)\mathrm{P}$ est diagonale. On note $\mathrm{D}(a,b)$ cette matrice.

On a : $\mathrm{M}(a,b)=a\mathrm{I}_3+b\mathrm{A}$.
D'où :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}^1\mathrm{M}(a,b)\mathrm{P} &= a\mathrm{P}^{-1}\mathrm{P}+b\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}\\ &= a\mathrm{I}_3+b\mathrm{D} && \mathrm{D}=\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}\end{aligned}$$

Or I_3 et D sont des matrices diagonales, donc $a\mathrm{I}_3+b\mathrm{D}$ également.

Conclusion : la matrice $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{M}(a,b)\mathrm{P}$ est diagonale, notée $\mathrm{D}(a,b)$.

5.c. **5.c.i.** L'ensemble $\{\mathrm{M} \in \mathcal{E} \ / \ \mathrm{M}^2 = \mathrm{I}_3\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$?

La matrice nulle n'appartient clairement pas à $\{\mathrm{M} \in \mathcal{E} \ / \ \mathrm{M}^2 = \mathrm{I}_3\}$..

Conclusion : l'ensemble $\{\mathrm{M} \in \mathcal{E} \ / \ \mathrm{M}^2 = \mathrm{I}_3\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$.

Petite remarque
Ce n'est même pas un espace vectoriel !

5.c.ii. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Démontrer : $\mathrm{M}(a,b)^2 = \mathrm{I}_3 \iff \mathrm{D}(a,b)^2 = \mathrm{I}_3$.
En déduire les matrices $\mathrm{M}(a,b)$ telles que $\mathrm{M}(a,b)^2 = \mathrm{I}_3$.

- On sait que $\mathrm{D}(a,b) = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{M}(a,b)\mathrm{P}$, donc $\mathrm{M}(a,b) = \mathrm{P}\mathrm{D}(a,b)\mathrm{P}^{-1}$ et ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}(a,b)^2 = \mathrm{I}_3 &\iff \left(\mathrm{P}\mathrm{D}(a,b)\mathrm{P}^{-1}\right) = \mathrm{I}_3 \\
&\iff \mathrm{P}\mathrm{D}(a,b)\mathrm{P}^{-1}\mathrm{P}\mathrm{D}(a,b)\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{I}_3 \\
&\iff \mathrm{P}\mathrm{D}(a,b)^2\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{I}_3 \\
&\iff \mathrm{D}(a,b)^2 = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{P} \\
&\iff \mathrm{D}(a,b)^2 = \mathrm{I}_3
\end{aligned}$$

- Or :

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}(a,b) &= a\mathrm{I}_3 + b\mathrm{D} \\
&= \begin{pmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & a+b & 0 \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

D'où :

$$\mathrm{D}(a,b) = \begin{pmatrix} (a+2b)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (a+b)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (a+b)^2 \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}(a,b)^2 = \mathrm{I}_3 &\iff \begin{pmatrix} (a+2b)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (a+b)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (a+b)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} (a+2b)^2 = 1 \\ (a+b)^2 = 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a+2b = 1 \text{ ou } a+2b = -1 \\ a+b = 1 \text{ ou } a+b = -1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a+2b = 1 \\ a+b = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a+2b = -1 \\ a+b = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a+2b = 1 \\ a+b = -1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a+2b = -1 \\ a+b = -1 \end{cases} \\
&\iff (a,b) = (1,0) \text{ ou } (a,b) = (3,-2) \text{ ou } (a,b) = (-3,2) \text{ ou } (a,b) = (-1,0)
\end{aligned}$$

Petite remarque
Je ne détaille pas la résolution de ces systèmes dont on peut, à ce stade de la copie, donner les solutions directement !

Conclusion : des deux points précédents, on déduit que les matrices $\mathrm{M}(a,b)$ telles que $\mathrm{M}(a,b)^2 = \mathrm{I}_3$ sont : $\mathrm{M}(1,0)$, $\mathrm{M}(-1,0)$, $\mathrm{M}(3,-2)$ et $\mathrm{M}(-3,2)$.

Ce qu'il faut retenir des copies : Exercice qui a été bien traité. Les méthodes et rédactions classiques sont correctement assimilées, c'est positif et encourageant.
Quelques questions, laissées un peu de côté, peuvent être travaillées pour pousser un peu les raisonnements.

★★★★★★★

Exercice 2

Partie A.

Définition 1

Soient (a_n) et (b_n) deux suites de réels telles qu'à partir d'un certain rang, aucun de leurs termes n'est nul.
On dit que **a_n est équivalent à b_n en $+\infty$** lorsque : $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$. On notera alors : $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, ou, s'il n'y a aucune ambiguïté $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$.

Petite remarque
Notion qui sera vue l'an prochain, alors autant commencer à la rencontrer...

Soient (a_n), (b_n), (c_n) et (d_n) quatre suites de réels telles qu'à partir d'un certain rang, aucun de leurs termes n'est nul.

1. Démontrer les quatre propriétés suivantes :

1.a. $a_n \underset{+\infty}{\sim} a_n$.

Soit n suffisamment proche de $+\infty$. On sait que $a_n \neq 0$, d'où :

$$\frac{a_n}{a_n} = 1$$

et ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_n} = 1$$

Conclusion : $a_n \underset{+\infty}{\sim} a_n$.

Pour info...
On dit que la relation $\underset{+\infty}{\sim}$ est réflexive.

1.b. $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n \iff b_n \underset{+\infty}{\sim} a_n$.

Par double-implication (même si on peut le faire par équivalence, c'est assez immédiat...).

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$.

Soit n suffisamment grand. Puisque $a_n, b_n \neq 0$, on a :

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{\frac{a_n}{b_n}}$$

Or $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$, donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$. D'où, par opération :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{a_n}{b_n}} = 1$$

Autrement dit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$$

Par conséquent :

$$b_n \underset{+\infty}{\sim} a_n$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Identique...

Attention !
$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \cancel{\Longrightarrow} \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n$.
En effet, il se peut que $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ possède une limite, mais que ni (a_n) ni (b_n) n'en possède !! Il suffit, par exemple, de considérer : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = b_n = (-1)^n$...

Pour info...
On dit que la relation $\underset{+\infty}{\sim}$ est symétrique.

1.c. $\left(a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n \text{ ET } b_n \underset{+\infty}{\sim} c_n\right) \Longrightarrow a_n \underset{+\infty}{\sim} c_n$.

Supposons $\left(a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n \text{ ET } b_n \underset{+\infty}{\sim} c_n\right)$.

Soit n suffisamment proche de $+\infty$. On sait que $b_n, c_n \neq 0$, d'où :

$$\frac{a_n}{c_n} = \frac{a_n}{b_n}\,\frac{b_n}{c_n}$$

Or $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$ et $b_n \underset{+\infty}{\sim} c_n$, ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{c_n} = 1$$

Par produit, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{c_n} = 1$$

Conclusion : $\left(a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n \text{ ET } b_n \underset{+\infty}{\sim} c_n\right) \Longrightarrow a_n \underset{+\infty}{\sim} c_n$.

Pour info...
On dit que la relation $\underset{+\infty}{\sim}$ est transitive.

1.d. $\left(a_n \underset{+\infty}{\sim} c_n \text{ ET } b_n \underset{+\infty}{\sim} d_n\right) \Longrightarrow a_n b_n \underset{+\infty}{\sim} c_n d_n$.

Supposons $\left(a_n \underset{+\infty}{\sim} c_n \text{ ET } b_n \underset{+\infty}{\sim} d_n\right)$.

Soit n suffisamment proche de $+\infty$. On sait que $c_n, d_n \neq 0$, d'où :

$$\frac{a_n b_n}{c_n d_n} = \frac{a_n}{c_n}\,\frac{b_n}{d_n}$$

Or $a_n \underset{+\infty}{\sim} c_n$ et $b_n \underset{+\infty}{\sim} d_n$, ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{c_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{d_n} = 1$$

Par produit, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n b_n}{c_n d_n} = 1$$

Conclusion : $\left(a_n \underset{+\infty}{\sim} c_n \text{ ET } b_n \underset{+\infty}{\sim} d_n\right) \Longrightarrow a_n b_n \underset{+\infty}{\sim} c_n d_n$.

Partie B.

Pour tout entier naturel non nul n, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_n(x) = 1 - x - x^n$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}^+$, admet une unique solution, notée u_n.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est une fonction polynomiale sur $\mathbb{R}^+$, elle y est donc dérivable.
Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On a :

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= -1 - nx^{n-1} \\ &= -(1 + nx^{n-1}) \end{aligned}$$

Or $n > 0$ et $x \geq 0$, donc $f_n'(x) < 0$. D'où :

x	0	$+\infty$
$f_n'(x)$	$-$	
f_n	1 ↘	$-\infty$

Petite remarque
On pourrait aussi dire que f_n est la somme de $x \longmapsto 1 - x$ et $x \longmapsto -x$., toutes deux strictement décroissantes sur $\mathbb{R}^+$...

On a alors :
- f_n est continue sur l'intervalle $[0;+\infty[$, car elle y est dérivable,
- f_n est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.

Ainsi, par théorème de bijection, f_n est bijective de $[0;+\infty[$ dans $f_n([0;+\infty[) =]-\infty;1]$.
Or $0 \in]-\infty;1]$, donc l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution sur $[0;+\infty[$.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution positive, notée u_n.

3. Déterminer u_1 et u_2.

- u_1 est l'unique solution positive de $f_1(x) = 0$, donc $\boxed{u_1 = \dfrac{1}{2}}$.
- u_2 est l'unique solution positive de $f_2(x) = 0$, donc $\boxed{u_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{-2} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

4. **4.a.** Soit $x \in]0;1[$. Démontrer : $f_{n+1}(x) > f_n(x)$.
On a :

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) - f_n(x) &= 1 - x - x^{n+1} - (1 - x - x^n) \\ &= x^n - x^{n+1} \\ &\underset{\text{Réflexe !}}{=} x^n(1-x) \end{aligned}$$

Réflexe !
Pourquoi ça n'est toujours pas un réflexe de factoriser $x^n - x^{n+1}$ alors qu'on en cherche le signe ?!
Vous choisissez de vous compliquer la vie et prenez le risque de vous tromper !

Mais $x \in]0;1[$, donc $x^n > 0$ et $1 - x > 0$. D'où :

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) > 0$$

Conclusion : $\forall x \in]0;1[,\ f_{n+1}(x) > f_n(x)$.

4.b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que $u_n \in]0;1[$.
On a : $f_n(0) = 1$, $f_n(1) = -1$ et $f_n(u_n) = 0$.
D'où :

$$f_n(0) > f_n(u_n) > f_n(1)$$

Et par stricte décroissance de f_n^{-1} sur $]-\infty;1]$, on obtient :

$$0 < u_n < 1$$

Conclusion : $u_n \in]0;1[$.

Rappel...
Théorème de bijection :
Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors :
- f est bijective sur I,
- $f(\mathrm{I})$ est un intervalle (c'est la continuité de f qui le garantit),
- f^{-1} a même stricte monotonie sur $f(\mathrm{I})$

4.c. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question **4.a.**, appliquée à u_n, licite car $u_n \in]0;1[$ d'après la question précédente :

$$f_{n+1}(u_n) > f_n(u_n)$$

Mais $f_n(u_n) = 0$. D'où :

$$f_{n+1}(u_n) > 0$$

Or $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$. Ainsi :

$$f_{n+1}(u_n) > f_{n+1}(u_{n+1})$$

Et par stricte décroissance de f_{n+1}^{-1} sur $]-\infty;1]$, on obtient :

$$u_n < u_{n+1}$$

Petite remarque
$f_{n+1}(u_n)$ et $f_{n+1}(u_{n+1})$ sont nécessairement dans $]-1;+\infty[$, car $]-1;+\infty[$ est l'image de $\mathbb{R}^+$ par f_{n+1}...

Conclusion : la suite (u_n) est strictement décroissante.

4.d. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ, puis démontrer que $\ell \in \left[\dfrac{1}{2};1\right]$.

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée (par 1), donc, d'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers un réel ℓ.
- Ensuite :
  - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par 1 (d'après la question **4.b.**), donc $\ell \leq 1$.
  - Et comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, elle est minorée par son premier terme... or $u_1 = \dfrac{1}{2}$ (question **3.**) ; d'où : $\ell \geq \dfrac{1}{2}$.

  Par conséquent :

$$\ell \in \left[\frac{1}{2};1\right]$$

Attention !
Les inégalité strictes deviennent larges en passant à la limite !

Conclusion : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel $\ell \in \left[\frac{1}{2}\right]$.

4.e. Démontrer que $\ell = 1$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que $\ell \neq 1$. Puisque l'on sait que $\ell \in \left[\frac{1}{2}\right]$, on a ainsi $\ell \in \left[\frac{1}{2};1\right[$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que $f_n(u_n) = 0$, donc :

$$\begin{aligned} u_n &= 1 - u_n^n \\ &= 1 - \exp\left(n\ln(u_n)\right) \quad \text{car } u_n > 0 \end{aligned}$$

Par continuité de ln en ℓ, car $\ell > 0$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = \ln(\ell)$. Et comme $\ell < 1$, on a $\ln(\ell) < 0$.

Par conséquent, par produit et composition de limites :

$$\lim_{n\to+\infty} \exp\left(n\ln(u_n)\right) = 0$$

D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1 \quad : \quad \text{absurde}$$

Conclusion : $\ell = 1$; la suite (u_n) converge vers 1.

Petite remarque

On peut aussi raisonner ainsi :

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et CV vers ℓ, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq u_n \leq \ell$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par croissance de $x \longmapsto x^n$, on a alors :

$$0 \leq u_n^n \leq \ell^n$$

Mais $\ell \in]-1;1[$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ell^n = 0$. Puis, par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n = 0$...

★Subtile...★

(u_n) converge vers 1, et pourtant $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n = 0$! Comme quoi, tout est bien possible avec la FI "1^∞"...

5. **5.a.** Recopier et compléter le programme ci-dessous de sorte que l'exécution de la commande `suite_u(n)` renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près obtenue par la méthode de dichotomie.

```python
def f(n,x):
    y=......
    return y

def suite_u(n):
    a=...
    b=...
    while ...
        m=...
        if ...
            a,b=...
        elif ...
            b=...
        elif ...
            a=...
    return ...
```

```python
def f(n,x):
    y=1-x-x**n
    return y

def suite_u(n):
    a=0
    b=1 #car (u_n) est bornée par 0 et 1
    while b-a>10**(-3):
        m=(a+b)/2
        if f(n,m)*f(n,a)==0:
            a,b=m,m
        elif f(n,m)*f(n,a)<0:
            b=m
        elif f(n,m)*f(n,a)>0:
            a=m
    return (a+b)/2
```

5.b. Écrire alors un programme permettant de représenter les termes $u_1, u_2, ..., u_{50}$.

```python
import matplotlib.pyplot as plt

U=[suite_u(n) for n in range(1,51)]
plt.plot(range(1,51),U,"b+",label="suite u")
plt.legend()
plt.show()
```

Petite remarque

Il n'était pas nécessaire de mettre une légende...

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = 1 - u_n$; et on remarque donc que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \in]0;1[$.

6.a. Démontrer : $\ln(1 - v_n) \underset{+\infty}{\sim} -v_n$.

Il faut donc établir : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(1-v_n)}{-v_n} = 1$.

On sait que :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$$

et :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Donc, par composition de limites :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1-v_n)}{-v_n} = 1$$

Conclusion : $\ln(1-v_n) \underset{+\infty}{\sim} -v_n$.

6.b. Établir : $\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} -nv_n$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que $f_n(u_n) = 0$, donc :
$$u_n^n = 1 - u_n$$
et ainsi :
$$(1-v_n)^n = v_n$$
Puis, puisque $v_n > 0$ et $1 - v_n > 0$:
$$n\ln(1-v_n) = \ln(v_n)$$
- Or, d'après la question précédente, on a :
$$\ln(1-v_n) \underset{+\infty}{\sim} -v_n$$
D'où, d'après la question **1.d.** (et **1.a.** en fait aussi pour dire que $n \underset{+\infty}{\sim} n$) :
$$n\ln(1-v_n) \underset{+\infty}{\sim} -nv_n$$

Par conséquent :
$$\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} -nv_n$$

Conclusion : $\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} -nv_n$.

> **✘ Attention !**
> Il faut bien avoir une expression de la forme $\frac{\ln(1+x)}{x}$, et pas $\frac{\ln(1-x)}{x}$, sinon, c'est différent...

6.c. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right)}{-\ln(v_n)} = 0$, puis en déduire : $\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} -\ln(n)$.

- D'après la question précédente : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(v_n)}{-nv_n} = 1$.
Ainsi, par composition :
$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right) = 0$$
Et comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 :
$$\lim_{n\to+\infty} -\ln(v_n) = +\infty$$
Par quotient, on obtient :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right)}{-\ln(v_n)} = 0$$
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :
$$\begin{aligned} \frac{\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right)}{-\ln(v_n)} &= \frac{\ln(-\ln(v_n)) - \ln(n) - \ln(v_n)}{-\ln(v_n)} && \text{car } -\ln(v_n > 0,\ n > 0 \text{ et } v_n > 0 \\ &= \frac{\ln(-\ln(v_n))}{-\ln(v_n)} + \frac{\ln(n)}{\ln(v_n)} + 1 \end{aligned}$$
D'où :
$$\frac{-\ln(n)}{\ln(v_n)} = -\frac{\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right)}{-\ln(v_n)} + \frac{\ln(-\ln(v_n))}{-\ln(v_n)} + 1$$
  - Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} -\ln(v_n) = +\infty$;
  et, par croissance comparée : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$;
  d'où, par composition de limites :
  $$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(-\ln(v_n))}{-\ln(v_n)} = 0$$
  - Et on vient d'établir $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right)}{-\ln(v_n)} = 0$.

Par conséquent :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-\ln(n)}{\ln(v_n)} = 1$$

Conclusion : $\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} -\ln(n)$.

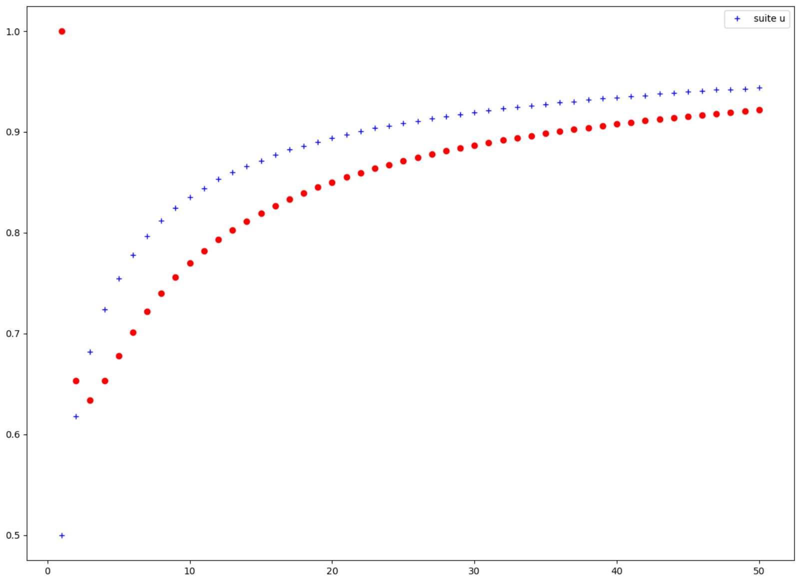
6.d. Montrer enfin : $v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}$.

D'après les résultats des questions **6.b.** et **6.c.** et par transitivité (question **1.c.**), on obtient :
$$-nv_n \underset{+\infty}{\sim} -\ln(n)$$
Et grâce à la question **1.d.** :
$$v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$$

Conclusion : $v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}$.

> **☞ Pour info...**
> On pourrait alors écrire que, quand n est très grand :
> $v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$ et donc
> $u_n \underset{+\infty}{\sim} 1 - \frac{\ln(n)}{n}$... Cela nous donne une précision sur la vitesse de convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers 1.

7. Au graphique obtenu à partir de la question **5.b.**, on a ajouté l'affichage des 50 premiers termes (représentés par des •) de la suite $\left(1 - \dfrac{\ln(n)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour obtenir le graphique suivant :



En quoi ce graphique valide-t-il le résultat établi à la question **6.d.** ?

D'après la question **6.d.** :

$$v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$$

D'où :

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} 1 - \frac{\ln(n)}{n}$$

Ce graphique traduit bien ce résultat, puisqu'il permet d'observer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(1 - \dfrac{\ln(n)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tendent à se comporter de la même façon.

CQFR

Ce qu'il faut retenir des copies : Exercice classique, dont le milieu a été dans l'ensemble correctement traité.

1. La question 1. doit être revue. Il est important, face à une nouvelle notion, de revenir à la définition !
Attention : le calcul de limite se fait toujours de la même façon : on travaille sur l'expression, pour faire apparaître les opérations nécessaires PUIS on passe à la limite, en détaillant les limites et en concluant par opération.
2. Comment est-il possible qu'il y ait tant d'erreurs à la questions 3. ? Mystère...
3. La question 4.e. est classique et mérite d'être retravaillée. J'ai présenté deux méthodes, fréquemment rencontrées sur les suites implicites.
J'en profite pour dire qu'une limite obtenue en faisant tendre $n \to +\infty$ NE PEUT PAS ENCORE DÉPENDRE de n... Je dis ça comme ça, au cas où quelqu'un se sentirait concerné...
4. La question 6. est plus difficile (même si la 6.a. était simple) : à travailler dans un second temps peut-être...

★★★★★★★

Exercice 3

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_*^+ \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{n+1} \end{cases}$$

1. Écrire une fonction Python telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'exécution de la commande `suite_u(a,n)` renvoie la valeur de u_n lorsque $u_0 = a$.

```python
def suite_u(a,n):
    u=a
    for k in range(1,n+1):
        u=u**2/k
    return u
```

> ✘ **Attention !**
> k désigne le rang du terme calculé… Et : $u_k = \dfrac{u_{k-1}^2}{k}$!!

2. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$. *On définit alors, pour la suite de l'exercice, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{\ln(u_n)}{2^n}$.*

Par récurrence…

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
  $u_0 \in \mathbb{R}_*^+$ d'après l'énoncé, donc $u_0 > 0$: l'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $u_n > 0$ et montrons $u_{n+1} > 0$.
  Par hypothèse de récurrence :
  $$u_n > 0$$
  D'où (éventuellement par stricte croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$) :
  $$u_n^2 > 0$$
  Et comme $n+1 > 0$, on a :
  $$\frac{u_n^2}{n+1} > 0$$
  Autrement dit :
  $$u_{n+1} > 0$$
  L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.

3. **3.a.** Justifier l'existence d'un entier $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall k \in [\![n_0;+\infty[\![,\ \frac{\ln(k)}{2^k} \leq \frac{1}{(\sqrt{2})^k}$$

Remarquons déjà :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{\ln(k)}{2^k} = \frac{\ln(k)}{(\sqrt{2})^k}\,\frac{1}{(\sqrt{2})^k}$$

Or, puisque $\sqrt{2} > 1$, par croissance comparée, on a :

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\ln(k)}{(\sqrt{2})^k} = 0$$

Ainsi :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^* \ /\ \forall k \in [\![n_0;+\infty[\![,\ \frac{\ln(k)}{(\sqrt{2})^k} \leq 1$$

> ☞ **Pour info…**
> Par définition de la limite, en prenant $\varepsilon = 1$…

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{(\sqrt{2})^k} \geq 0$, d'où :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^* \ /\ \forall k \in [\![n_0;+\infty[\![,\ \frac{\ln(k)}{(\sqrt{2})^k}\,\frac{1}{(\sqrt{2})^k} \leq \frac{1}{(\sqrt{2})^k}$$

Conclusion : il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall k \in [\![n_0;+\infty[\![,\ \dfrac{\ln(k)}{2^k} \leq \dfrac{1}{(\sqrt{2})^k}$.

> **Drôle…**
> En fait, $n_0 = 1$ convient… Le résultat est valable sur $\mathbb{N}^*$!

3.b. En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{\ln(k)}{2^k}$. *Dans la suite, on note : $\sigma = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$.*

- D'après la question précédente, nous pouvons considérer un $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que :
  $$\forall k \in [\![n_0;+\infty[\![,\ \frac{\ln(k)}{2^k} \leq \frac{1}{(\sqrt{2})^k}$$
  Or :
  $$\forall k \in [\![n_0;+\infty[\![,\ \frac{\ln(k)}{2^k} \geq 0$$
  D'où :
  $$\forall k \in [\![n_0;+\infty[\![,\ 0 \leq \frac{\ln(k)}{2^k} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k$$

- Or, $\sqrt{2} > 1$, donc $\frac{1}{\sqrt{2}} \in]-1;1[$. Ainsi, la série $\sum_{k \geq n_0} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k$ est une troncature d'une série géométrique convergente, elle est donc également convergente.

Par critère de comparaison sur les séries à terme général positif, on en déduit que la série $\sum_{k \geq n_0} \frac{\ln(k)}{2^k}$ est convergente.

Conclusion : la série $\sum_{k \geq 1} \frac{\ln(k)}{2^k}$ est convergente.

3.c. Exprimer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $v_k - v_{k-1}$ en fonction de k.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} v_k - v_{k-1} &= \frac{\ln(u_k)}{2^k} - \frac{\ln(u_{k-1})}{2^{k-1}} \\ &= \frac{\ln(u_k) - 2\ln(u_{k-1})}{2^k} \\ &= \frac{\ln\left(\frac{u_{k-1}^2}{k}\right) - 2\ln(u_{k-1})}{2^k} && u_{k-1}^2 > 0 \text{ et } k > 0 \\ &= \frac{\ln(u_{k-1}^2) - \ln(k) - 2\ln(u_{k-1})}{2^k} && u_{k-1} > 0 \\ &= \frac{2\ln(u_{k-1}) - \ln(k) - 2\ln(u_{k-1})}{2^k} \\ &= \frac{-\ln(k)}{2^k} \end{aligned}$$

✓ Rigueur !
$\ln(a^2) = 2\ln(a)$ seulement si $a > 0$... Sinon, de façon générale : $\ln(a^2) = 2\ln(|a|)$.

Conclusion : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ v_k - v_{k-1} = -\frac{\ln(k)}{2^k}$.

3.d. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = v_0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} v_0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k} &= v_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{-\ln(k)}{2^k} && \text{question précédente} \\ &= v_0 + \sum_{k=1}^{n} (v_k - v_{k-1}) && \text{télescopage} \\ &= v_0 + v_n - v_0 \\ &= v_n \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = v_0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k}$.

3.e. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite finie ℓ et que $\ell = v_0 - \sigma$.

D'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = v_0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k}$$

Or, la série $\sum_{k \geq 1} \frac{\ln(k)}{2^k}$ est convergente et sa somme vaut σ ; donc (v_n) possède une limite finie et :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = v_0 - \sigma$$

Conclusion : la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ et $\ell = v_0 - \sigma$.

3.f. Établir :

$$\ell > 0 \iff u_0 > e^{\sigma} \quad ; \quad \ell = 0 \iff u_0 = e^{\sigma}$$

- On a :

$$\begin{aligned} \ell > 0 &\iff v_0 - \sigma > 0 \\ &\iff \ln(u_0) > \sigma && \text{par stricte croissance de exp sur } \mathbb{R} \\ &\iff u_0 > e^{\sigma} \end{aligned}$$

- De la même façon :

$$\ell = 0 \iff u_0 = e^{\sigma}$$

4. On suppose dans cette question que $u_0 \neq e^{\sigma}$.
Déduire de la question 3.f. la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On distinguera les cas $u_0 > e^{\sigma}$ et $u_0 < e^{\sigma}$.

On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \exp(2^n v_n)$$

- Si $u_0 > e^{\sigma}$.
  D'après la question **3.f.**, on a alors :

$$\ell > 0$$

  Ainsi, par produit :

$$\lim_{n\to+\infty} 2^n v_n = +\infty$$

Et par composition :

$$\lim_{n\to+\infty} \exp(2^n v_n) = +\infty$$

Autrement dit :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

- Si $u_0 < e^\sigma$.
  D'après la question **3.f.**, on a alors :

  $$\ell < 0$$

  Ainsi, par produit :

  $$\lim_{n\to+\infty} 2^n v_n = -\infty$$

  Et par composition :

  $$\lim_{n\to+\infty} \exp(2^n v_n) = 0$$

  Autrement dit :

  $$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

Conclusion : si $u_0 > e^\sigma$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$;
si $u_0 < e^\sigma$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

5. On suppose dans cette question que $u_0 = e^\sigma$.

5.a. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$.

Puisque $u_0 = e^\sigma$, on a $v_0 = \sigma = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Si $n \geq 1$:
  D'après la question **3.e.** :

$$\begin{aligned} v_n &= v_0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k} \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \end{aligned}$$

- Si $n = 0$:
  On sait que $v_0 = \sigma = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$.

5.b. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ln(u_n) \geq \dfrac{\ln(n+1)}{2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On a :

$$\begin{aligned} \ln(u_n) &= 2^n v_n && \text{question précédente} \\ &= 2^n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \\ &= 2^n \left(\frac{\ln(n+1)}{2^{n+1}} + \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \right) && \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \geq 0, \text{ comme somme de termes positifs} \\ &\geq \frac{\ln(n+1)}{2} \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ln(u_n) \geq \dfrac{\ln(n+1)}{2}$.

5.c. Déterminer alors la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

D'après la question précédente, et par croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$, on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq \exp\left(\frac{1}{2}\ln(n+1)\right) = \sqrt{n+1}$$

Or :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} = +\infty$$

Ainsi, par théorème de comparaison :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

6. Approximation de σ.

6.a. Établir : $\forall x \in \mathbb{R}_*^+,\ \ln(x) \leq x - 1$. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \leq \frac{n+1}{2^n}$$

- Posons $f : x \longmapsto \ln(x) - x + 1$, définie sur $\mathbb{R}_*^+$.
La fonction f est une somme de fonctions usuelles dérivables sur $\mathbb{R}_*^+$, elle est donc également dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 \underset{\text{Réflexe !}}{=} \frac{1-x}{x}$$

D'où :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖	$\nearrow$	0	$\searrow$	

Ainsi, f possède un maximum sur $\mathbb{R}_*^+$, égal à 0, atteint en 1.
D'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+,\ f(x) \leq 0$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}_*^+,\ \ln(x) \leq x - 1$.

Petite remarque
Les limites ne sont pas demandées, et ne sont pas nécessaires...

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $[\![n+1;+\infty[\![\subset \mathbb{R}_*^+$, on a, d'après le point précédent :

$$\forall k \in [\![n+1;+\infty[\![,\ \ln(k) \leq k-1$$

D'où :

$$\forall k \in [\![n+1;+\infty[\![,\ \frac{\ln(k)}{2^k} \leq \frac{k-1}{2^k}$$

Soit $N \in [\![n+1;+\infty[\![$. En sommant l'inégalité précédente de $n+1$ à N, on obtient :

$$\sum_{k=n+1}^{N} \frac{\ln(k)}{k} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{k-1}{2^k} \qquad (\star)$$

◇ La somme de gauche est la somme partielle de la série $\sum\limits_{k \geq n+1} \frac{\ln(k)}{k}$, qui est convergente (troncature d'une série convergente, établie à la question **3.b.**), le passage à la limite quand $N \to +\infty$ est donc licite dans cette somme.

◇ Travaillons sur la somme de droite...

⇝ Par changement d'indice $i = k-(n+1)$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{N} \frac{k-1}{2^k} &= \sum_{i=0}^{N-(n+1)} \frac{i+n}{2^{i+n+1}} \\ &= \frac{1}{2^{n+2}} \sum_{i=0}^{N-(n+1)} i\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} + \frac{n}{2^{n+1}} \sum_{i=0}^{N-(n+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{i}\end{aligned}$$

par linéarité de la somme

⇝ Or, puisque $\frac{1}{2} \in]-1;1[$, les séries $\sum\limits_{i \geq 0} i\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$ et $\sum\limits_{i \geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^{i}$ sont des séries géométriques convergentes et :

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{i=0}^{N-(n+1)} i\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 4$$

et :

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{i=0}^{N-(n+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{i} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

D'où :

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{k=n+1}^{N} \frac{k-1}{2^k} = \frac{4}{2^{n+2}} + \frac{2n}{2^{n+1}} = \frac{n+1}{2^n}$$

Par conséquent, en faisant tendre $N \to +\infty$ dans l'inégalité $(\star)$ (enfin licite, avec ce qui précède), on obtient :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \leq \frac{n+1}{2^n}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \leq \frac{n+1}{2^n}$.

✘ Attention !
Impossible de sommer de $n+1$ à $+\infty$ avant d'avoir établi la convergence des séries $\sum\limits_{k \geq n+1} \frac{\ln(k)}{2^k}$ et $\sum\limits_{k \geq n+1} \frac{k-1}{2^k}$...
Deux méthodes s'offrent à nous :
- on justifie les convergences, puis on somme de $n+1$ à $+\infty$;
- ou on somme partiellement puis passage à la limite.

Mettons en place la deuxième méthode.. La première serait plus laborieuse ici !

6.b. Démontrer alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\sigma - \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k}\right| \leq \frac{n+1}{2^n}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On a :

$$\begin{aligned}
\left|\sigma - \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k}\right| &= \left|\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k}\right| \\
&= \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}\right| && \text{car } \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \geq 0\text{, comme somme de termes positifs} \\
&= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} && \text{d'après la question précédente} \\
&\leq \frac{n+1}{2^n}
\end{aligned}$$

6.c. Écrire alors une fonction `Python` d'entête `def sigma(eps):` qui, prenant en argument d'entrée un réel strictement positif `eps`, renvoie une valeur approchée de σ à `eps`-près.

D'après la question précédente, il suffit que $\frac{n+1}{2^n}$ soit inférieur à eps pour que $\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k}$ soit une valeur approchée de σ à eps-près.
D'où le programme :

```python
import numpy as np

def sigma(eps):
    n=1
    S=0
    while (n+1)/2**n>eps:
        n=n+1
        S=S+np.log(n)/2**n
    return S
```

Ce qu'il faut retenir des copies : Pauvre exercice...
Certaines questions étaient toutefois très abordables : 1., 2., 3.b., 3.c., 3.d., 3.e., 3.f., 5.c.. Le début de la question 6.a. était à faire !
La question 4. est également accessible, mais dans une moindre mesure tout de même. D'autres questions 3.a., 5.b., 6.a. sont plus compliquées...