Devoir surveillé 5

Samedi 11 mars 2023 - 4h00

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :

- ***la copie devra présenter une en-tête d'au moins une demi-page ainsi qu'une marge suffisante,***
- ***toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,***
- ***les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),***
- ***les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.***

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.

"*Il faut boire jusqu'à livresse sa jeunesse, car tous les instants de nos vingt ans nous sont comptés ; et jamais plus le temps perdu ne nous fait face.*"
Charles Aznavour

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Pour tout $(i,j) \in [\![1;3]\!]^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient situé en i-ième ligne et j-ième colonne, qui vaut 1.

1. **Question de cours.**
   Soient E un espace vectoriel de dimension finie ainsi que F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
   - **1.a.** Démontrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.
   - **1.b.** Établir : $\dim(F \cap G) \leq \min\big(\dim(F), \dim(G)\big)$.
2. - **2.a.** Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}_1(A) = \left\{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ AX = X\right\}$ est un espace vectoriel et en donner une base ainsi que la dimension.
   - **2.b.** Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}_2(A) = \left\{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ AX = 2X\right\}$ est un espace vectoriel et en donner une base ainsi que la dimension.
   - **2.c.** Établir : $\mathcal{E}_1(A) \cap \mathcal{E}_2(A) = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.
   - **2.d.** Démontrer que la famille obtenue en concaténant les bases de $\mathcal{E}_1(A)$ et $\mathcal{E}_2(A)$ (obtenues en questions 2.a et 2.b.) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
3. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   - **3.a.** Justifier que la matrice P est inversible et déterminer son inverse, notée P^{-1}.
   - **3.b.** Calculer la matrice $P^{-1}AP$, notée D.
4. On considère les ensembles $\mathcal{C}_A = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ AM = MA\}$ et $\mathcal{C}_D = \{N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ DN = ND\}$.
   - **4.a.** Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}_A$ est un espace vectoriel.
   - **4.b.** Soient $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $N = P^{-1}MP$. Montrer l'équivalence :
   $$M \in \mathcal{C}_A \iff N \in \mathcal{C}_D$$
   - **4.c.** Démontrer que $\mathcal{C}_D = \mathrm{Vect}\big(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,2}, E_{3,3}\big)$, puis justifier que la famille $\big(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,2}, E_{3,3}\big)$ est libre.
   - **4.d.** Montrer que la famille $\big(PE_{1,1}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{2,3}P^{-1}, PE_{3,2}P^{-1}, PE_{3,3}P^{-1}\big)$ est une base de $\mathcal{C}_A$.
5. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on note $M(a,b)$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :
   $$M(a,b) = \begin{pmatrix} a+2b & -b & -2b \\ 2b & a-b & -4b \\ -b & b & a+3b \end{pmatrix}$$
   On considère également : $\mathcal{E} = \{M(a,b) \ / \ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.
   - **5.a.** Justifier que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel et en déterminer une base.
   - **5.b.** Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Prouver que la matrice $P^{-1}M(a,b)P$ est diagonale. On note $D(a,b)$ cette matrice.
   - **5.c.**
     - **5.c.i.** L'ensemble $\{M \in \mathcal{E} \ / \ M^2 = I_3\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$?
     - **5.c.ii.** Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Démontrer : $M(a,b)^2 = I_3 \iff D(a,b)^2 = I_3$.
       En déduire les matrices $M(a,b)$ telles que $M(a,b)^2 = I_3$.

★★★★★★★

Exercice 2

Partie A.

Définition 1

Soient (a_n) et (b_n) deux suites de réels telles qu'à partir d'un certain rang, aucun de leurs termes n'est nul.
On dit que **a_n est équivalent à b_n en $+\infty$** lorsque : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$. On notera alors : $a_n \underset{n \to +\infty}{\sim} b_n$, ou, s'il n'y a aucune ambiguïté $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$.

Soient (a_n), (b_n), (c_n) et (d_n) quatre suites de réels telles qu'à partir d'un certain rang, aucun de leurs termes n'est nul.

1. Démontrer les quatre propriétés suivantes :
   - **1.a.** $a_n \underset{+\infty}{\sim} a_n$.
   - **1.b.** $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n \iff b_n \underset{+\infty}{\sim} a_n$.
   - **1.c.** $\left(a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n \text{ ET } b_n \underset{+\infty}{\sim} c_n\right) \Longrightarrow a_n \underset{+\infty}{\sim} c_n$.
   - **1.d.** $\left(a_n \underset{+\infty}{\sim} c_n \text{ ET } b_n \underset{+\infty}{\sim} d_n\right) \Longrightarrow a_n b_n \underset{+\infty}{\sim} c_n d_n$.

Partie B.

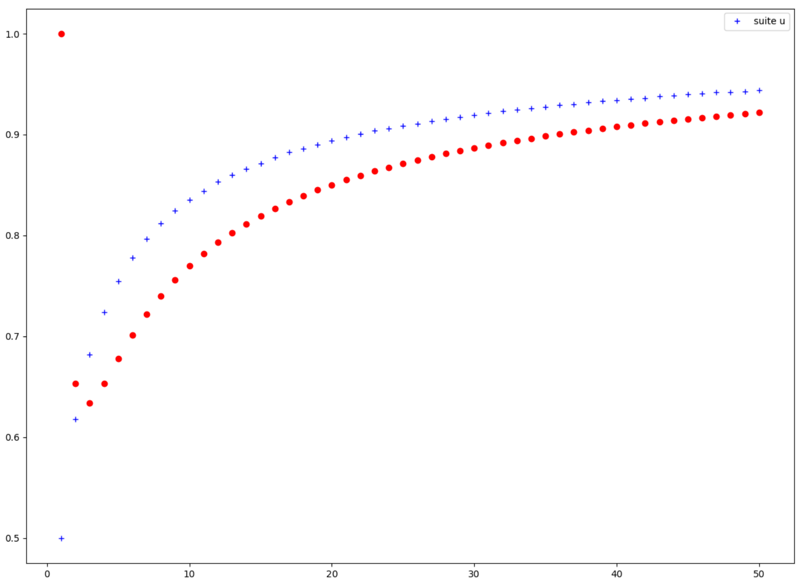
Pour tout entier naturel non nul n, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_n(x) = 1 - x - x^n$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}^+$, admet une unique solution, notée u_n.
3. Déterminer u_1 et u_2.
4. **4.a.** Soit $x \in]0;1[$. Démontrer : $f_{n+1}(x) > f_n(x)$.
   4.b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que $u_n \in]0;1[$.
   4.c. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.
   4.d. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ, puis démontrer que $\ell \in \left[\frac{1}{2};1\right]$.
   4.e. Démontrer que $\ell = 1$.
5. **5.a.** Recopier et compléter le programme ci-dessous de sorte que l'exécution de la commande `suite_u(n)` renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près obtenue par la méthode de dichotomie.

```
def f(n,x):
    y=......
    return y

def suite_u(n):
    a=...
    b=...
    while ...
        m=...
        if ...
            a,b=...
        elif ...
            b=...
        elif ...
            a=...
    return ...
```

   5.b. Écrire alors un programme permettant de représenter les termes $u_1, u_2, \ldots, u_{50}$.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = 1 - u_n$; et on remarque donc que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \in]0;1[$.
   6.a. Démontrer : $\ln(1 - v_n) \underset{+\infty}{\sim} -v_n$.
   6.b. Établir : $\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} -nv_n$.
   6.c. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right)}{-\ln(v_n)} = 0$, puis en déduire : $\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} -\ln(n)$.
   6.d. Montrer enfin : $v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}$.
7. Au graphique obtenu à partir de la question **5.b.**, on a ajouté l'affichage des 50 premiers termes (représentés par des •) de la suite $\left(1 - \dfrac{\ln(n)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour obtenir le graphique suivant :



En quoi ce graphique valide-t-il le résultat établi à la question **6.d.** ?

★★★★★★★

Exercice 3

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_*^+ \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{n+1} \end{cases}$$

1. Écrire une fonction `Python` telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'exécution de la commande `suite_u(a,n)` renvoie la valeur de u_n lorsque $u_0 = a$.
2. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$. *On définit alors, pour la suite de l'exercice, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :* $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{\ln(u_n)}{2^n}$.
3. **3.a.** Justifier l'existence d'un entier $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall k \in [\![n_0 ; +\infty [\![,\ \frac{\ln(k)}{2^k} \leq \frac{1}{(\sqrt{2})^k}$$

   3.b. En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{\ln(k)}{2^k}$. *Dans la suite, on note :* $\sigma = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$.

   3.c. Exprimer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $v_k - v_{k-1}$ en fonction de k.

   3.d. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = v_0 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k}$.

   3.e. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite finie ℓ et que $\ell = v_0 - \sigma$.

   3.f. Établir :

$$\ell > 0 \iff u_0 > e^{\sigma} \quad ; \quad \ell = 0 \iff u_0 = e^{\sigma}$$

4. On suppose dans cette question que $u_0 \neq e^{\sigma}$.
   Déduire de la question 3.f. la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   On distinguera les cas $u_0 > e^{\sigma}$ et $u_0 < e^{\sigma}$.
5. On suppose dans cette question que $u_0 = e^{\sigma}$.

   5.a. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$.

   5.b. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ln(u_n) \geq \dfrac{\ln(n+1)}{2}$.

   5.c. Déterminer alors la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
6. **Approximation de σ.**

   6.a. Établir : $\forall x \in \mathbb{R}_*^+,\ \ln(x) \leq x - 1$. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \leq \frac{n+1}{2^n}$$

   6.b. Démontrer alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left| \sigma - \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k} \right| \leq \frac{n+1}{2^n}$$

   6.c. Écrire alors une fonction `Python` d'entête `def sigma(eps):` qui, prenant en argument d'entrée un réel strictement positif `eps`, renvoie une valeur approchée de σ à `eps`-près.