# Devoir surveillé 6
Samedi 29 avril 2023 - 4h00

*La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.*

*Quelques précisions :*

- ***la copie devra présenter une en-tête d'au moins une demi-page ainsi qu'une marge suffisante,***
- ***toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,***
- ***les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),***
- ***les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.***

*L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.*

"*Prenez tout très au sérieux, à l'exception de vous-même.*"
Rudyard Kipling

# EXERCICE 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{x}{n(x+n)} dx$.

1. Calculer $u_1$.
   On a :

$$\begin{aligned} u_1 &= \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1} dx \\ &= \int_0^1 1 - \frac{1}{x+1} dx \\ &= \left[x - \ln(|x+1|)\right]_0^1 \\ &= 1 - \ln(2) \end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la fonction $f_n$ sur $[0;1]$ par : $\forall x \in [0;1],\ f_n(x) = \frac{x}{x+n}$. Dresser le tableau de variations de $f_n$ sur $[0;1]$.
   La fonction $f_n$ est un quotient de deux fonctions dérivables sur $[0;1]$, dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0;1]$ (car $n > 0$). Par conséquent, $f_n$ est dérivable sur $[0;1]$ et, pour tout $x \in [0;1]$ :

$$f_n'(x) = \frac{n}{(x+n)^2}$$

D'où :

| $x$ | $0$ | | $1$ |
|---|---|---|---|
| $f_n'(x)$ | | $+$ | |
| $f_n$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{n+1}$ |

3. **3.a.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   - D'après le tableau de la question précédente, on a :

$$\forall x \in [0;1],\ 0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n+1}$$

   D'où, puisque $n > 0$ :

$$\forall x \in [0;1],\ 0 \leq \frac{x}{n(x+n)} \leq \frac{1}{n(n+1)}$$

   D'où, par croissance de l'intégrale, licite car $1 \geq 0$ :

$$0 \leq u_n \leq \int_0^1 \frac{1}{n(n+1)} dx$$

   Autrement dit :

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n(n+1)}$$

   - Or $n(n+1) = n^2 + n$, et comme $n > 0$, on a :

$$n(n+1) \geq n^2$$

   Ainsi, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_*^+$ :

$$\frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2}$$

   Par transitivité :

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}$$

   **Conclusion :** pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}$.

   **RÉFLEXE !**
   L'encadrement d'une intégrale vient toujours d'un encadrement de l'intégrande... Et avant de se lancer dans l'inconnu, on regarde sur les questions précédentes peuvent nous aider !

   **3.b.** En déduire la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$. *On note* $\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.
   On sait que :
   - $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}$,
   - la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente (exposant $\alpha = 2 > 1$).

   **Conclusion :** par critère de comparaison sur les séries à terme général positif, la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente.

   **RÉDACTION**
   ON NE SOMME PAS ! Le critère consiste à comparer les termes généraux.

4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

**4.a.** Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n \leq \gamma$.

- D'après la question précédente, la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente de somme égale à $\gamma$ ; autrement dit, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\gamma$.
- De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\begin{array}{rcll} S_{n+1} - S_n & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} u_k - \sum_{k=1}^{n} u_k & \\ & = & u_{n+1} & \text{question } \mathbf{3.a.} \\ & \geq & 0 & \end{array}$$

Ainsi, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

Par conséquent, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et converge vers $\gamma$.

> **Conclusion :** la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par $\gamma$.
> Autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n \leq \gamma$.

**4.b.** Déterminer les deux réels $a, b$ tels que pour tout $x \in [0;1]$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$ : $\dfrac{x}{k(x+k)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{x+k}$.

On remarque que :

$$\forall x \in [0;1],\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{x}{k(x+k)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{x+k}$$

> **Conclusion :** $a = 1$ et $b = -1$
> $\forall x \in [0;1],\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{x}{k(x+k)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{x+k}$

**4.c.** Établir alors : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_k = \dfrac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k)$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{array}{rcll} u_k & = & \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{k(x+k)}\,dx & \text{question précédente} \\ & = & \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{k} - \frac{1}{x+k}\,dx & \text{par linéarité de l'intégrale} \\ & = & \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{k}\,dx - \int_0^1 \frac{1}{x+k}\,dx & \\ & = & \displaystyle\frac{1}{k} - \Big[\ln(|x+k|)\Big]_0^1 & \\ & = & \displaystyle\frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k) & \end{array}$$

> **Conclusion :** $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_k = \dfrac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k)$.

**4.d.** Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{array}{rcll} S_n & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k & \text{question précédente} \\ & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k)\right) & \text{linéarité de la somme} \\ & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) + \sum_{k=1}^{n} \ln(k) & \text{télescopage} \\ & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) + \ln(1) & \end{array}$$

> **Conclusion :** pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$.

**5.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

**5.a.** Justifier que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et préciser sa limite.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\begin{array}{rcl} T_n & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \\ & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) + \ln(n+1) - \ln(n+1) \\ & = & S_n + \ln(n+1) - \ln(n) \\ & = & S_n + \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) \\ & = & S_n + \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \end{array}$$

Or :

- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \gamma$,

**Pourquoi ?**
On pense à procéder ainsi, puisque $\gamma$ est la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$...

**☞ Rappel...**
Une suite croissante qui converge vers $\ell$ est majorée par $\ell$.
Une suite décroissante qui converge vers $\ell$ est minorée par $\ell$ (chapitre 10, exercice 1).

**♡ Astuce du chef ! ♡**
En fait, on l'a fait dans le cas où $k = 1$ à la question 1.... Et comme les réels $a$ et $b$ sont indépendants de $k$ (d'après la formulation de la question)... Vous voyez où je veux en venir...

- $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{1}{n} = 1$ et ln est continue en 1, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 0$.

**Conclusion :** $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\gamma$.

**5.b.** Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n+1} \leq \ln(n+1)-\ln(n) \leq \dfrac{1}{n}$. En déduire que $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  Par décroissance de la fonction inverse sur $[n;n+1]$ (car $[n;n+1] \subset \mathbb{R}_*^+$), on a :
  $$\forall x \in [n;n+1],\ \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$$
  Puis, par croissance de l'intégrale, licite car $n+1 \geq n$ :
  $$\int_n^{n+1} \frac{1}{n+1}\,dx \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{n}\,dx$$
  Autrement dit :
  $$\frac{n+1-1}{n+1} \leq \Big[\ln(|x|)\Big]_n^{n+1} \leq \frac{n+1-1}{n}$$
  D'où :
  $$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1)-\ln(n) \leq \frac{1}{n}$$

  **Conclusion :** $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n+1} \leq \ln(n+1)-\ln(n) \leq \dfrac{1}{n}$.

  **Petite remarque**
  Il est également possible de démontrer ce résultat en utilisant l'IAF appliquée à la fonction ln sur le segment $[n;n+1]$...

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :
  $$\begin{aligned}\mathrm{T}_{n+1}-\mathrm{T}_n &= \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \ln(n) && \text{télescopage}\\ &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) && \text{résultat précédent}\\ &\leq 0\end{aligned}$$

  **Conclusion :** la suite $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

**6.** Donner finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, un encadrement de $\gamma$ à l'aide de $\mathrm{T}_n$ et $\mathrm{S}_n$.
Puisque $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge vers $\gamma$, elle est minorée par $\gamma$. Puis, en utilisant le résultat de la question **4.a.**, on obtient :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{S}_n \leq \gamma \leq \mathrm{T}_n$$

**Conclusion :** $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{S}_n \leq \gamma \leq \mathrm{T}_n$.

**7.** On considère la fonction `Python` définie ci-dessous :

```python
import numpy as np
def gamma(p):
    n=1
    while np.log(1+1/n)>p:
        n=n+1
    L=[1/k for k in range(1,n+1)]
    S=sum(L)-np.log(n+1)
    T=sum(L)-np.log(n)
    return S,T
```

L'exécution de la commande `gamma(10**(-3))` renvoie : `(0.5767160812351229, 0.5777155815682065)`.
Interpréter ce résultat en justifiant soigneusement la réponse.
Le résultat de la question **4.d.** et la définition de la suite $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nous permettent d'affirmer que la fonction renvoie, pour un certain $n$, les valeurs $\mathrm{S}_n$ et $\mathrm{T}_n$.
Par conséquent, d'après le résultat de la question **6.**, la fonction renvoie un encadrement de $\gamma$.
Ensuite, on remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :
$$\begin{aligned}\mathrm{T}_n-\mathrm{S}_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \ln(n+1)\\ &= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\\ &= \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$
La fonction renvoie donc les valeurs de $\mathrm{S}_n$ et $\mathrm{T}_n$ dès que $\mathrm{T}_n - \mathrm{S}_n$ devient inférieur ou égal à $p$.
Par conséquent : la fonction renvoie un encadrement de $\gamma$ d'amplitude inférieure ou égale à $p$.

**Conclusion :** `(0.5767160812351229, 0.5777155815682065)` est un encadrement de $\gamma$ d'amplitude inférieure ou égale à $10^{-3}$.

**Petite remarque**
On pourrait aussi dire que 0,5767160812351229 est une valeur approchée par défaut à $10^{-3}$ près de $\gamma$ et 0,5777155815682065 en est une valeur approchée par excès.

★★★★★★★

# Exercice 2

Un mobile se déplace aléatoirement sur un axe dont l'origine est le point O d'abscisse 0.
Au départ (instant 0), le mobile est situé sur le point O. Le mobile se déplace selon la règle suivante : à l'instant $n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), il se place de façon équiprobable, sur l'un des points d'abscisse $0, 1, \ldots, n$.
Pour tout entier naturel $n$, on note $X_n$ l'abscisse de ce point à l'instant $n$ (on a donc $X_0 = 0$).
On admet que, pour tout entier naturel $n$, $X_n$ est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à déterminer. On admet aussi que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

1. **1.a.** Déterminer, pour tout entier naturel $n$ non nul, la loi de $X_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- On a déjà, d'après l'énoncé : $X_n(\Omega) = [\![0;n]\!]$.
- Et, puisqu'à l'instant $n$, le mobile se place de façon équiprobable sur l'un des points d'abscisse $0,1,\ldots,n$, on a :

$$\forall k \in [\![0;n]\!],\ \mathbb{P}([X_n = k]) = \frac{1}{\mathrm{Card}\big([\![0;n]\!]\big)}$$

**Conclusion :** pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $X_n(\Omega) = [\![0;n]\!]$ et pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $\mathbb{P}([X_n = k]) = \dfrac{1}{n+1}$.

☞ **Pour info...**
On dit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n$ suit la loi uniforme sur $[\![0;n]\!]$. Voir chapitre 21...

**1.b.** Justifier que, pour tout entier naturel $n$ non nul, $X_n$ possède une espérance et une variance, puis les déterminer.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Puisque $X_n(\Omega)$ est fini, la variable aléatoire $X_n$ possède un moment à tout ordre. Par conséquent, $X_n$ admet une espérance et une variance.
- **Espérance.**

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n) &= \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}([X_n = k]) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n+1} && \text{linéarité de la somme} \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} k \\
&= \frac{n(n+1)}{2(n+1)} \\
&= \frac{n}{2}
\end{aligned}$$

- **Variance.**
  - Par théorème de transfert :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n^2) &= \sum_{k=0}^{n} k^2\mathbb{P}([X_n = k]) && \text{linéarité de la somme} \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} k^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n+1)} \\
&= \frac{n(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

  - Puis, d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X_n) &= \mathbb{E}(X_n^2) - \big(\mathbb{E}(X_n)\big)^2 \\
&= \frac{n(2n+1)}{6} - \frac{n^2}{4} \\
&= \frac{2n(2n+1) - 3n^2}{12} \\
&= \frac{n^2 + 2n}{12}
\end{aligned}$$

**Conclusion :** pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(X_n) = \dfrac{n}{2}$ et $\mathbb{V}(X_n) = \dfrac{n^2+2n}{12}$.

2. On note Y l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement initial), et on attribue à Y la valeur 0 si le mobile ne revient jamais à l'origine. On admet que Y est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

**2.a.** Justifier que $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

Raisonnons pas double-inclusion...

$\boxed{\subset}$ Y désigne l'instant auquel le mobile revient à l'origine, donc on a $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

$\boxed{\supset}$
- D'après l'énoncé, $0 \in Y(\Omega)$.
- Ensuite, on remarque que l'issue consistant à rester sur l'origine à l'instant 1 réalise l'évènement $[Y = 1]$, donc $[Y = 1] \neq \varnothing$.
  Par conséquent, $1 \in Y(\Omega)$.
- Soit $j \in [\![2;+\infty[\![$.
  L'issue consistant à être au point d'abscisse 1 des instants 1 à $j-1$, puis à l'origine à l'instant $j$ réalise l'évènement $[Y = j]$. Ainsi, $[Y = j] \neq \varnothing$.
  Par conséquent : $j \in Y(\Omega)$.

On a ainsi établi : $\mathbb{N} \subset Y(\Omega)$.

**Important !**
J'ai envie de dire que l'on raisonne toujours pas double-inclusion pour ce type de question. Il faut au moins en être conscient et le rédiger dans ce sens.

**Conclusion :** $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

**2.b.** Pour tout entier naturel $i$ non nul, exprimer l'événement $[Y = i]$ à l'aide des variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_i$.

Soit $i \in \mathbb{N}^*$.

- Si $i = 1$ :
  L'évènement $[Y = 1]$ est réalisé si, et seulement si, le mobile reste à l'origine à l'instant 1. D'où :

$$\boxed{[Y = 1] = [X_1 = 0]}$$

- Si $i \geq 2$ :

$[Y = i]$ est réalisé si, et seulement si, le mobile revient pour la première fois à l'origine à l'instant $n$
si, et seulement si, des instants 1 à $i-1$ le mobile ne va jamais à l'origine, puis il y retourne à l'instant $i$

✓ **Rigueur !**
Pour que cette phrase ait bien du sens, il faut que $i - 1 \geq 1$, donc que $i \geq 2$ : cas dans lequel nous nous sommes bien placés et ça en est même la raison.

Par conséquent :

$$\boxed{[Y = i] = \left( \bigcap_{k=1}^{i-1} [X_k \neq 0] \right) \cap [X_i = 0]}$$

**Petite remarque**
Avec la convention $\bigcap_{k \in \varnothing} \dots = \Omega$, on pourrait regrouper les deux cas.

**2.c.** En déduire : $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([Y = i]) = \dfrac{1}{i(i+1)}$.

Soit $i \in \mathbb{N}^*$.

- Si $i = 1$ :
  D'après la question précédente, on a alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Y = 1]) &= \mathbb{P}([X_1 = 0]) && \text{question 1.a.} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- Si $i \geq 2$ :
  D'après la question précédente, on a alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Y = i]) &= \mathbb{P}\left( \left( \bigcap_{k=1}^{i-1} [X_k \neq 0] \right) \cap [X_i = 0] \right) && \text{indépendance mutuelle des variables aléatoires } X_1, X_2, \dots, X_i \\ &= \left( \prod_{k=1}^{i-1} \mathbb{P}([X_k \neq 0]) \right) \mathbb{P}([X_i = 0]) \\ &= \left( \prod_{k=1}^{i-1} (1 - \mathbb{P}([X_k = 0])) \right) \mathbb{P}([X_i = 0]) && \text{question 1.a.} \\ &= \left( \prod_{k=1}^{i-1} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) \right) \frac{1}{i+1} \\ &= \left( \prod_{k=1}^{i-1} \frac{k}{k+1} \right) \frac{1}{i+1} && \text{télescopage} \\ &= \frac{1}{i} \frac{1}{i+1} \end{aligned}$$

Les deux cas peuvent se regrouper...

**Conclusion :** $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([Y = i]) = \dfrac{1}{i(i+1)}$.

**2.d.** Vérifier par le calcul que l'on a : $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Y = i]) = 1$.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}([Y = i]) &= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i(i+1)} \\ &= \sum_{i=1}^{N} \left( \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) && \text{linéarité de la somme} \\ &= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i+1} && \text{télescopage} \\ &= 1 - \frac{1}{N+1} \end{aligned}$$

Or :

$$\lim_{N \to +\infty} \left( 1 - \frac{1}{N+1} \right) = 1$$

**Conclusion :** la série $\displaystyle\sum_{i \geq 1} \mathbb{P}([Y = i])$ est convergente et $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Y = i]) = 1$.

**Petite remarque**
Il n'est pas nécessaire de mentionner la convergence de la série $\sum_{i \geq 1} \mathbb{P}([Y = i])$, pour deux raisons :
- ce n'est pas demandé,
- elle est une conséquence directe du fait que $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et de la convergence de la série $\sum_{i \geq 0} \mathbb{P}([Y = i])$.

**2.e.** Déterminer alors $\mathbb{P}([Y=0])$ et interpréter le résultat.

On sait que $Y(\Omega)=\mathbb{N}$, donc la série $\sum\limits_{i\geq 0}\mathbb{P}([Y=i])$ est convergente et $\sum\limits_{i=0}^{+\infty}\mathbb{P}([Y=i])=1$. Mais, d'après la question précédente, $\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\mathbb{P}([Y=i])=1$. Par conséquent :

$$\mathbb{P}([Y=0])=0$$

> **Conclusion :** $\mathbb{P}([Y=0])=0$. Le mobile reviendra presque-sûrement au moins une fois à l'origine.

**2.f.** Démontrer que la variable aléatoire Y n'admet pas d'espérance.

- On sait que :

| | | |
|---|---|---|
| Y admet une espérance | si, et seulement si, | la série $\sum\limits_{i\in Y(\Omega)} i\mathbb{P}([Y=i])$ est absolument convergente |
| | si, et seulement si, | la série $\sum\limits_{i\geq 0} i\mathbb{P}([Y=i])$ est convergente, car il s'agit d'une série à terme général positif |

- Soit $N\in\mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{N} i\mathbb{P}([Y=i]) &= \sum_{i=1}^{N} i\mathbb{P}([Y=i]) \\ &= \sum_{i=1}^{N}\frac{i}{i(i+1)} \\ &= \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{i+1} && \text{changement d'indice } k=i+1 \\ &= \sum_{k=2}^{N+1}\frac{1}{k}\end{aligned}$$

Or, la série $\sum\limits_{k\geq 2}\frac{1}{k}$ est une troncature d'une série de Riemann divergente (exposant $\alpha=1$).

Par conséquent, la série $\sum\limits_{i\geq 0} i\mathbb{P}([Y=i])$ est divergente.

> **Petite remarque**
> L'argument "la série $\sum\limits_{k\geq 2}\frac{1}{k}$ est une troncature de la série harmonique, qui est divergente" convient parfaitement également.

> **Conclusion :** la variable aléatoire Y n'admet pas d'espérance.

**3.** On note Z l'instant auquel le mobile se trouve pour la deuxième fois à l'origine (sans compter son positionnement initial), et on attribue à Z la valeur 0 si le mobile revient au plus une fois à l'origine. On admet que Z est une variable aléatoire, définie, elle aussi, sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ et que $\mathbb{P}([Z=0])=0$.

**3.a.** Sans justifier, donner $Z(\Omega)$.

$Z(\Omega)=\mathbb{N}\setminus\{1\}$.

**3.b.** Soient $(i,j)\in\mathbb{N}^*\times[\![2;+\infty[\![$ tel que $i\geq j$. Déterminer la probabilité $\mathbb{P}_{[Y=i]}([Z=j])$.

Le second retour à l'origine devant avoir lieu à un instant strictement supérieur à celui du premier retour à l'origine, on a :

$$\mathbb{P}_{[Y=i]}([Z=j])=0$$

> **Conclusion :** pour tout $(i,j)\in\mathbb{N}^*\times[\![2;+\infty[\![$ tel que $i\geq j$, $\mathbb{P}_{[Y=i]}([Z=j])=0$.

**3.c.** Soient $(i,j)\in\mathbb{N}^*\times[\![2;+\infty[\![$ tel que $i\leq j-1$. Établir : $\mathbb{P}_{[Y=i]}([Z=j])=\dfrac{i+1}{j(j+1)}$.

Supposons l'évènement $[Y=i]$ réalisé.

- Si $j=i+1$ :
  Dans ce cas (sachant $[Y=i]$ réalisé) l'évènement $[Z=j]$ est réalisé si, et seulement si, le mobile reste à l'origine à l'instant $i+1$.
  Par conséquent :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{[Y=i]}([Z=j]) &= \mathbb{P}([X_{i+1}=0]) \\ &= \mathbb{P}([X_j=0]) \\ &= \frac{1}{j+1}\end{aligned}$$

- Si $j\geq i+2$ :
  Dans ce cas (sachant $[Y=i]$ réalisé) :

| | | |
|---|---|---|
| $[Z=j]$ est réalisé | si, et seulement si, | le mobile revient pour la seconde fois à l'origine à l'instant $j$ |
| | si, et seulement si, | des instants $i+1$ à $j-1$ le mobile ne va jamais à l'origine, puis il y retourne à l'instant $j$ |

> **✓ Rigueur !**
> Pour que cette phrase ait bien du sens, il faut que $j-1\geq i+1$, donc que $j\geq i+2$ : cas dans lequel nous nous sommes bien placés et ça en est même la raison.

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{[Y=i]}([Z=j]) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{k=i+1}^{j-1}[X_k \neq 0]\right)\cap[X_j=0]\right) && \text{indépendance mutuelle des variables aléatoires } X_{i+1},\dots,X_j\\
&= \left(\prod_{k=i+1}^{j-1}\mathbb{P}([X_k\neq 0])\right)\mathbb{P}([X_j=0])\\
&= \left(\prod_{k=i+1}^{j-1}(1-\mathbb{P}([X_k=0])\right)\mathbb{P}([X_j=0]) && \text{question 1.a.}\\
&= \left(\prod_{k=i+1}^{j-1}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)\right)\frac{1}{j+1}\\
&= \left(\prod_{k=i+1}^{j-1}\frac{k}{k+1}\right)\frac{1}{j+1} && \text{télescopage}\\
&= \frac{i+1}{j}\,\frac{1}{j+1}
\end{aligned}$$

Les deux cas se regroupent...

**Conclusion :** pour tout $(i,j)\in\mathbb{N}^*\times[\![2;+\infty[\![$ tel que $i\leq j-1$, $\mathbb{P}_{[Y=i]}([Z=j])=\dfrac{i+1}{j(j+1)}$.

**3.d.** Écrire, pour tout entier naturel $j$ supérieur ou égal à 2, la probabilité $\mathbb{P}([Z=j])$ comme une somme finie.

Soit $j\in[\![2;+\infty[\![$. D'après la formule des probabilités totales, avec $\big([Y=i]\big)_{i\in\mathbb{N}}$ comme système complet d'évènements, la série $\sum_{i\geq 0}\mathbb{P}\big([Y=i]\cap[Z=j]\big)$ est convergente et :

➠ **Réflexe !**
On connaît la loi de Y et les valeurs de $\mathbb{P}_{[Y=i]}([Z=j])$...
On pense donc à utiliser la FPT pour calculer $\mathbb{P}([Z=j])$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Z=j]) &= \sum_{i=0}^{+\infty}\mathbb{P}\big([Y=i]\cap[Z=j]\big) && \text{relation de Chasles}\\
&= \mathbb{P}([Y=0]\cap[Z=0])+\sum_{i=1}^{j-1}\mathbb{P}\big([Y=i]\cap[Z=j]\big)+\sum_{i=j}^{+\infty}\mathbb{P}\big([Y=i]\cap[Z=j]\big) && \mathbb{P}([Y=0])=0 \text{ et } [Y=0]\cap[Z=0]\subset[Y=0]\\
&= \sum_{i=1}^{j-1}\mathbb{P}\big([Y=i]\cap[Z=j]\big)+\sum_{i=j}^{+\infty}\mathbb{P}\big([Y=i]\cap[Z=j]\big) && \forall i\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([Y=i])\neq 0\\
&= \sum_{i=1}^{j-1}\mathbb{P}([Y=i])\mathbb{P}_{[Y=i]}([Z=j])+\sum_{i=j}^{+\infty}\mathbb{P}([Y=i])\mathbb{P}_{[Y=i]}([Z=j]) && \text{questions 2.b., 3.a. et 3.b.}\\
&= \sum_{i=1}^{j-1}\frac{1}{i(i+1)}\,\frac{i+1}{j(j+1)}\\
&= \sum_{i=1}^{j-1}\frac{1}{ij(j+1)}
\end{aligned}$$

**Conclusion :** pour tout $j\in[\![2;+\infty[\![$, $\mathbb{P}([Z=j])=\displaystyle\sum_{i=1}^{j-1}\frac{1}{ij(j+1)}$.

**3.e.** La variable aléatoire Z admet-elle une espérance ?

- On sait que :

Z admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum_{j\in Z(\Omega)} j\mathbb{P}([Z=j])$ est absolument convergente

si, et seulement si, la série $\sum_{j\in\mathbb{N}\setminus\{1\}} j\mathbb{P}([Z=j])$ est convergente, car il s'agit d'une série à terme général positif

- Soit $N\in\mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0,j\neq 1}^{N} j\mathbb{P}([Z=j]) &= \sum_{j=2}^{N} j\mathbb{P}([Z=j]) && \text{question précédente}\\
&= \sum_{j=2}^{N} j\sum_{i=1}^{j-1}\frac{1}{ij(j+1)} && \text{linéarité de la somme}\\
&= \sum_{j=2}^{N}\frac{1}{j+1}\sum_{i=1}^{j-1}\frac{1}{i}
\end{aligned}$$

Or :

◇ pour tout $j\in[\![2;+\infty[\![$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{j-1}\frac{1}{i}\geq 1$, d'où :

$$\forall j\in[\![2;+\infty[\![,\ \frac{1}{j+1}\sum_{i=1}^{j-1}\frac{1}{i}\geq\frac{1}{j+1}>0$$

◇ et,la série $\sum_{j\geq 2}\frac{1}{j+1}$ est (à décalage d'indice près) une troncature de la série harmonique. Par conséquent, la série $\sum_{j\geq 2}\frac{1}{j+1}$ est divergente.

Ainsi, par critère de comparaison sur les séries à terme général positif, la série $\sum_{j\geq 2}\frac{1}{j+1}\sum_{i=1}^{j-1}\frac{1}{i}$ est divergente.
Par conséquent, la série $\sum_{j\in\mathbb{N}\setminus\{1\}} j\mathbb{P}([Z=j])$ est divergente.

**Conclusion :** la variable aléatoire Z n'admet pas d'espérance.

4. **4.a.** Recopier et compléter le programme suivant de sorte que l'exécution de `simulYZ()` renvoie une réalisation de Y et Z.

```
import numpy.random as rd
def simulYZ():
    n=1
    while ............... :
        n = ......
    Y = ......
    n=n+1
    while ............... :
        n = ......
    Z = ......
    return Y,Z
```

```
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt

def simulYZ():
    n=1
    while rd.randint(0,n+1)!=0:
        n=n+1
    Y=n
    n=n+1
    while rd.randint(0,n+1)!=0:
        n=n+1
    Z=n
    return Y,Z
```

**4.b.** En utilisant la fonction de la question précédente, écrire un programme Python dont l'exécution permettrait d'obtenir l'histogramme des fréquences sur 10000 réalisations de la variable aléatoire Y.

```
import matplotlib.pyplot as plt

Labs=[-0.5+k for k in range(0,20)]
LY=[simulYZ()[0] for k in range(10000)]
plt.hist(LY,Labs,density=True,edgecolor='k')
plt.show()
```

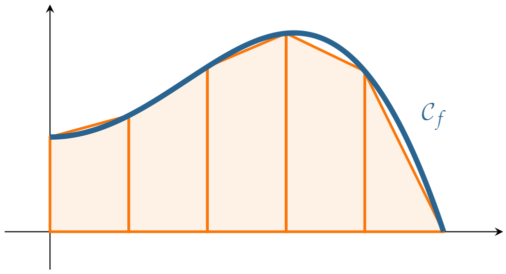
☞ **Rappel...**
En Python, les éléments des listes sont indexés à partir de 0. Ici, pour extraire la valeur de Y suite à l'exécution de `simulYZ()`, il faut extraire le terme indexé 0 de la liste... Autrement dit : `simulYZ()[0]`

★★★★★★★

# Exercice 3

Dans tout l'exercice, $a$ et $b$ désignent deux réels tels que $a \leq b$ et $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a;b]$. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthogonal du plan.

*L'objectif de l'exercice est d'étudier une méthode de calcul approché d'intégrales : la méthode des trapèzes. Le principe est résumé grâce au schéma ci-contre, dans le cas d'une approximation de l'intégrale par l'aire algébrique (positive ou négative selon la position par rapport à l'axe des abscisses) de cinq trapèzes rectangles.*




Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$ le nombre de trapèzes. On pose, pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $a_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$.

1. Soit $k \in [\![0;n-1]\!]$. Exprimer en fonction de $a_k$, $a_{k+1}$ et $f$ l'aire algébrique du trapèze dont les sommets sont les points de coordonnées $(a_k,0)$, $(a_k,f(a_k))$, $(a_{k+1},f(a_{k+1}))$ et $(a_{k+1},0)$. On notera $\mathcal{A}_k$ cette aire algébrique.
   On sait que :
   $$\boxed{\mathcal{A}_k = (a_{k+1}-a_k)\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}}$$

**☞ Rappel...**
On apprend à calculer l'aire d'un trapèze-rectangle en 5ème ! Et on l'avait revu en début de chapitre sur les intégrales...

2. Justifier que $|f''|$ admet un maximum sur $[a;b]$. On notera $\mathrm{M} = \max\limits_{x\in[a;b]}\big(|f''(x)|\big)$.
   La fonction $f$ est $\mathcal{C}^2$ sur $[a;b]$, par conséquent, la fonction $f''$ est continue sur $[a;b]$.
   Ainsi, par composition, la fonction $|f''|$ est continue sur le segment $[a;b]$.
   **Conclusion :** d'après le théorème des bornes, la fonction $|f''|$ admet un maximum sur $[a;b]$.

**✓ Rigueur !**
Quand un théorème nécessite une hypothèse bien précise, on pense à la mentionner. Ici, on doit voir **$f''$ est continue sur le segment....**

3. Soient $\alpha,\beta \in [a;b]$ tels que $\alpha \leq \beta$.
   **3.a.** A l'aide d'intégrations par parties, démontrer :
   $$\int_\alpha^\beta \frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{2}f''(x)dx = -(\beta-\alpha)\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} + \int_\alpha^\beta f(x)dx$$
   Pour s'affranchir des fractions, démontrons :
   $$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)f''(x)dx = -(\beta-\alpha)\big(f(\alpha)+f(\beta)\big) + 2\int_\alpha^\beta f(x)dx$$
   - Posons : $\left|\begin{array}{l} u : x \longmapsto (x-\alpha)(x-\beta) \\ v : x \longmapsto f'(x)\end{array}\right.$. Les fonctions $u$ et $v$ sont $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0;1]$ (fonction polynomiale et car $f$ est $\mathcal{C}^2$ sur $[0;1]$) et pour tout $x \in [0;1]$ : $\left|\begin{array}{l} u'(x) = 2x-(\alpha+\beta) \\ v'(x) = f''(x)\end{array}\right.$.
     Par intégration par parties, on a alors :
     $$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)f''(x)dx &= \Big[(x-\alpha)(x-\beta)f'(x)\Big]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \big(2x-(\alpha+\beta)\big)f'(x)dx \\ &= -\int_\alpha^\beta \big(2x-(\alpha+\beta)\big)f'(x)dx\end{aligned}$$
     Pour calculer cette dernière intégrale, procédons à nouveau par intégration par parties...
   - Posons maintenant : $\left|\begin{array}{l} u : x \longmapsto 2x-(\alpha)+\beta \\ v : x \longmapsto f(x)\end{array}\right.$. Les fonctions $u$ et $v$ sont $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0;1]$ et pour tout $x \in [0;1]$ : $\left|\begin{array}{l} u'(x) = 2 \\ v'(x) = f'(x)\end{array}\right.$.
     Par intégration par parties, on a alors :
     $$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta \big(2x-(\alpha+\beta)\big)f'(x)dx &= \Big[\big(2x-(\alpha+\beta)\big)f(x)\Big]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta 2f(x)dx \\ &= (\beta-\alpha)f(\beta)-(\alpha-\beta)f(\alpha) - 2\int_\alpha^\beta f(x)dx \\ &= (\beta-\alpha)\big(f(\alpha)+f(\beta)\big) - 2\int_\alpha^\beta f(x)dx\end{aligned}$$

   En combinant les deux résultats ainsi obtenus, on a :
   $$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)f''(x)dx = -(\beta-\alpha)\big(f(\alpha)+f(\beta)\big) + 2\int_\alpha^\beta f(x)dx$$
   **Conclusion :** $\displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{2}f''(x)dx = -(\beta-\alpha)\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} + \int_\alpha^\beta f(x)dx.$

**✓ Rigueur !**
Quand un théorème nécessite une hypothèse bien précise, on pense à la mentionner. L'IPP n'étant licite que sur des segments, on doit voir ***u* et *v* sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment ....**

**3.b.** Établir : $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx = \frac{(\alpha-\beta)^3}{6}$.

On a :

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx &= \int_\alpha^\beta x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta dx \\
&= \left[\frac{x^3}{3}-\frac{\alpha+\beta}{2}x^2+\alpha\beta x\right]_\alpha^\beta \\
&= \frac{\beta^3}{3}-\frac{\alpha+\beta}{2}\beta^2+\alpha\beta^2-\frac{\alpha^3}{3}+\frac{\alpha+\beta}{2}\alpha^2-\alpha^2\beta \\
&= \frac{2\beta^3-3\alpha\beta^2-3\beta^3+6\alpha\beta^2-2\alpha^3+3\alpha^3+3\alpha^2\beta-6\alpha^2\beta}{6} \\
&= \frac{-\beta^3+3\alpha\beta^2-3\alpha^2\beta+\alpha^3}{6} && \text{formule du binôme de Newton} \\
&= \frac{(\alpha-\beta)^3}{6}
\end{aligned}$$

> **Conclusion :** $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(\beta-x)dx = \frac{(\alpha-\beta)^3}{6}$.

**4.** Déduire de la question **3.b.** que pour tout $k \in [\![0;n-1]\!]$ : $\displaystyle\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} (x-a_k)(x-a_{k+1})f''(x)dx\right| \leq \frac{M(b-a)^3}{6n^3}$.

Soit $k \in [\![0;n-1]\!]$.

- D'après l'inégalité triangulaire sur les intégrales, licite car $a_{k+1} \geq a_k$ :

$$\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} (x-a_k)(x-a_{k+1})f''(x)\right| \leq \int_{a_k}^{a_{k+1}} \left|(x-a_k)(x-a_{k+1})f''(x)\right| dx$$

- Or, $[a_k, a_{k+1}] \subset [a;b]$ et $\mathrm{M} = \max\limits_{x\in[a;b]}\left(|f''(x)|\right)$. Ainsi :

$$\forall x \in [a_k, a_{k+1}],\ |f''(x)| \leq \mathrm{M}$$

  Et, comme pour tout $x \in [a_k, a_{k+1}]$, $|(x-a_k)(x-a_{k+1})| \geq 0$, on a :

$$\forall x \in [a_k, a_{k+1}],\ \left|(x-a_k)(x-a_{k+1})f''(x)\right| \leq \mathrm{M}|(x-a_k)(x-a_{k+1})|$$

  Par croissance de l'intégrale, licite car $a_{k+1} \geq a_k$, on obtient :

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} \left|(x-a_k)(x-a_{k+1})f''(x)\right| dx \leq \int_{a_k}^{a_{k+1}} \mathrm{M}\,|(x-a_k)(x-a_{k+1})|\,dx$$

> **➠Réflexe !**
> Pour encadrer une intégrale, on encadre l'intégrande.

- Or, pour tout $x \in [a_k, a_{k+1}]$, $(x-a_k)(x-a_{k+1}) \leq 0$, d'où :

$$\begin{aligned}
\int_{a_k}^{a_{k+1}} \mathrm{M}\,|(x-a_k)(x-a_{k+1})|\,dx &= -\int_{a_k}^{a_{k+1}} \mathrm{M}(x-a_k)(x-a_{k+1})dx && \text{linéarité de l'intégrale} \\
&= -\mathrm{M}\int_{a_k}^{a_{k+1}} (x-a_k)(x-a_{k+1})dx && \text{question précédente, avec } \alpha = a_k \text{ et } \beta = a_{k+1}\text{, licite car } a_k, a_{k+1} \in [a;b] \text{ et } a_k \leq a_{k+1} \\
&= -\mathrm{M}\frac{(a_k-a_{k+1})^3}{6} && a_{k+1}-a_k = \frac{b-a}{n} \\
&= -\mathrm{M}\frac{-(b-a)^3}{6n^3} \\
&= \mathrm{M}\frac{(b-a)^3}{6n^3}
\end{aligned}$$

Le résultat découle des trois points, par transitivité...

> **Conclusion :** pour tout $k \in [\![0;n-1]\!]$ : $\displaystyle\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} (x-a_k)(x-a_{k+1})f''(x)dx\right| \leq \frac{M(b-a)^3}{6n^3}$.

**5.** On pose $\mathrm{I} = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$ et $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{A}_k$. Déduire des questions précédentes :

$$|\mathrm{I}-\mathrm{S}_n| \leq \frac{\mathrm{M}(b-a)^3}{12n^2}$$

On a :

$$\begin{aligned}
|\mathrm{I}-\mathrm{S}_n| &= \left|\int_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{A}_k\right| && \text{relation de Chasles, car } a_0=a \text{ et } a_n=b\\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)dx - \sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{A}_k\right| && \text{linéarité de la somme}\\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)dx - \mathcal{A}_k\right)\right| && \text{question 1.}\\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)dx - (a_{k+1}-a_k)\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}\right)\right| && \text{question 3.a. avec } \alpha=a_k,\ \beta=a_{k+1}\text{, licite car } a_k,a_{k+1}\in[a,b] \text{ et } a_k\leq a_{k+1}\\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\frac{(x-a_k)(x-a_{k+1})}{2}f''(x)dx\right| && \text{inégalité triangulaire sur la somme}\\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}}\frac{(x-a_k)(x-a_{k+1})}{2}f''(x)dx\right| && \text{inégalité triangulaire sur l'intégrale, licite car } a_k\leq a_{k+1}\\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\left|\frac{(x-a_k)(x-a_{k+1})}{2}f''(x)\right|dx && \text{linéarité de l'intégrale et question précédente}\\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{M}(b-a)^3}{6n^3}
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\mathrm{M}(b-a)^3}{6n^3} &= n\frac{\mathrm{M}(b-a)^3}{6n^3}\\
&= \frac{\mathrm{M}(b-a)^3}{12n^2}
\end{aligned}$$

**Conclusion :** $|\mathrm{I}-\mathrm{S}_n| \leq \dfrac{\mathrm{M}(b-a)^3}{12n^2}$.

**6.** Conclure sur la convergence de la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in[\![2;+\infty[\![}$.

D'après la question précédente : $\forall n\in[\![2;+\infty[\![,\ 0\leq|\mathrm{I}-\mathrm{S}_n|\leq\dfrac{\mathrm{M}(b-a)^3}{12n^2}$.

Or : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\mathrm{M}(b-a)^3}{12n^2}=0$.
D'où, par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty}|\mathrm{I}-\mathrm{S}_n|=0$$

**Conclusion :** la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in[\![2;+\infty[\![}$ converge vers I.

**Petite remarque**
Et en comparant avec ce qui avait été obtenu sur la méthode des rectangles (chapitre 19 - exercice 20), on remarque que la convergence est plus rapide pour la méthode des trapèzes que pour celle des rectangles.

**7.** Écrire un programme Python qui permet d'obtenir une valeur approchée à $10^{-3}$ près de $\displaystyle\int_0^1 e^{x^2}dx$.

Appliquons ce qui précède avec :

- $a=0$, $b=1$
- $f: x\longmapsto e^{x^2}$

Dans ce cas, pour tout $n\in[\![2;+\infty[\![$ et tout $k\in[\![0;n]\!]$, $a_k=\dfrac{k}{n}$ ; et ainsi, pour tout $n\in[\![2;+\infty[\![$, $\mathrm{S}_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f\left(\frac{k}{n}\right)+f\left(\frac{k+1}{n}\right)}{2n}$

Ensuite, nous devons déterminer M... La fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0;1]$ et, pour tout $x\in[0;1]$ :

$$f'(x)=2xe^{x^2}\quad;\quad f''(x)=2e^{x^2}(1+2x^2)\quad;\quad f'''(x)=4xe^{x^2}(3+2x^2)$$

Par conséquent, $f''$ est positive croissante sur $[0;1]$, et ainsi :

$$\begin{aligned}
\max_{x\in[0;1]}|f''(x)| &= f''(1)\\
&= 6e
\end{aligned}$$

En utilisant le résultat de la question **5.**, il suffit alors de fournir un programme qui détermine le plus petit $n$ vérifiant $\dfrac{e}{2n^2}\leq 10^{-3}$, et ainsi, par transitivité, $\mathrm{S}_n$ fournira une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^1 e^{x^2}dx$ à $10^{-3}$ près.

```python
import numpy as np

def approx_int(p):
    n=1
    while np.exp(1)/(2*n**2)>p:
        n=n+1
    L=[(np.exp((k/n)**2)+np.exp(((k+1)/n)**2))/(2*n) for k in range(0,n)]
    return sum(L)
```

**☞ Pour info...**
Ici, $n=37$ suffit.
Dans l'exercice 20 du chapitre 19, il fallait aller chercher $n=5437$ pour avoir la même précision. Autrement dit, 37 trapèzes suffisent, alors qu'on avait besoin de 5437 rectangles...

★★★★★★★

# Exercice 4

Dans tout cet exercice, $f$ désigne la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$\forall x \in ]0;+\infty[,\ f(x) = x - \ln(x)$$

## Partie I : Étude de la fonction $f$.

1. Dresser le tableau de variations de $f$ en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.
   - Par opération :
   $$\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty}$$
   - Pour tout $x$ suffisamment proche de $+\infty$ :
   $$f(x) = x\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right)$$
   Or, par croissance comparée : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.
   D'où, par opération :
   $$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$
   - $f$ est une somme de deux fonctions usuelles dérivables sur $\mathbb{R}_*^+$, elle l'est donc également et, pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$ :
   $$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} \underset{\text{Réflexe !}}{=} \frac{x-1}{x}$$
   - On obtient ainsi :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | \|\| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | \|\| $+\infty$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in ]0;+\infty[$, admet exactement deux solutions, notées $a$ et $b$, telles que $0 < a < 1 < b$.
   - **Sur $]0;1[$ :**
     - $f$ est continue sur $]0;1[$ (car dérivable)
     - $f$ est strictement décroissante sur $]0;1[$

     Par théorème de bijection, $f$ est bijective de $]0;1[$ dans $f(]0;1[) = ]1;+\infty[$.
     Or $2 \in ]1;+\infty[$.
     Par conséquent, l'équation $f(x) = 2$ possède une unique solution sur $]0;1[$, notée $a$.
   - **Sur $]1;+\infty[$ :**
     De même, l'équation $f(x) = 2$ possède une unique solution sur $]1;+\infty[$, notée $b$.

   **Conclusion :** l'équation $f(x) = 2$ admet exactement deux solutions, notées $a$ et $b$, telles que $0 < a < 1 < b$.

   ✘ **Attention !**
   Si le théorème de bijection a été appliqué sur $]0;1]$ et $[1;+\infty[$, il ne faut pas oublier d'écrire que $f(1) \neq 2$ pour conclure sur "$a < 1 < b$"...

3. Établir : $b \in [3;4]$.
   On a :
   - $f(3) = 3 - \ln(3)$. Or $3 \geq e$, donc, par croissance de ln sur $\mathbb{R}_*^+$ : $\ln(3) \geq 1$. D'où : $3 - \ln(3) \leq 2$. Ainsi :
   $$f(3) \leq 2$$
   - $f(4) = 4 - \ln(4) = 2(2 - \ln(2))$. Or $2 \leq e$, donc $\ln(2) \leq 1$. D'où : $2 - \ln(2) \geq 1$, et ainsi :
   $$f(4) \geq 2$$

   Puisque $f(b) = 2$, on obtient :
   $$f(3) \leq f(b) \leq f(4)$$
   Et $f$ étant strictement croissante sur $[3;4]$ :
   $$3 \leq b \leq 4$$

   **Conclusion :** $b \in [3;4]$.

   ✓ **Rigueur !**
   Attention aux bijections réciproques de $f$ ici... Il y en a 2 : une sur $]0;1]$ et une autre sur $[1;+\infty[$. On préfère donc l'argument de stricte croissance portant sur $f$ sur l'intervalle $[3;4]$ plutôt que sur la bijection réciproque de la restriction de $f$ à $[1;+\infty[$...

4. Recopier et compléter les lignes manquantes du programme suivant afin que l'exécution de `approx_b(p)` : renvoie une valeur approchée de $b$ à $p$ près, où $p$ est un réel strictement positif, obtenue par la méthode de dichotomie.

```python
import numpy as np

def f(x):
    return ......

def approx_b(p):
    x1,x2=3,4
    while ......:
        m=......
        if f(m)==2:
            ......
        elif f(m)<2:
            ......
        else:
            ......
    return ......
```

Le voici, complet :

```python
import numpy as np

def f(x):
    return x-np.log(x)

def approx_b(p):
    x1,x2=3,4
    while x2-x1>p:
        m=(x1+x2)/2
        if f(m)==2:
            x1,x2=m,m
        elif f(m)<2:
            x1=m
        else:
            x2=m
    return (x1+x2)/2
```

## Partie II : Étude d'une suite

On définit maintenant la suite $(u_n)$ par $u_0 = 4$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ existe et $u_n \geq b$.

Par récurrence...

- **Initialisation.** Pour $n = 0$ :
  $u_0$ existe et $u_0 = 4 \geq b$ d'après la question **3.**. L'initialisation est ainsi vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons "$u_n$ existe et $u_n \geq b$", et montrons "$u_{n+1}$ existe et $u_{n+1} \geq b$".
  - Par hypothèse de récurrence, $u_n$ existe et $u_n \geq b$. Or, d'après la question **3.**, $b \geq 3$.
    Par conséquent $u_n > 0$ et ainsi, $\ln(u_n)$ existe. Autrement dit, $u_{n+1}$ existe.
  - De plus, par hypothèse de récurrence :
    $$u_n \geq b$$
    D'où, par croissance de $\ln$ sur $\mathbb{R}_*^+$ ($b > 0$) :
    $$\ln(u_n) \geq \ln(b)$$
    Et ainsi :
    $$u_{n+1} \geq \ln(b) + 2$$
    Or on sait que $f(b) = 2$, donc :
    $$b - \ln(b) = 2$$
    D'où :
    $$\ln(b) + 2 = b$$
    On obtient finalement :
    $$u_{n+1} \geq b$$
    L'hérédité est ainsi établie.

**Conclusion :** pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ existe et $u_n \geq b$.

6. Déterminer alors la monotonie de la suite $(u_n)$. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :
  $$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \ln(u_n) + 2 - u_n \\ &= 2 - f(u_n) \end{aligned}$$
  Or on sait que $u_n \geq b$ et que $f$ est croissante sur $[b;+\infty[$. D'où :
  $$f(u_n) \geq f(b) = 2$$
  Par conséquent :
  $$u_{n+1} - u_n \leq 0$$
  **Conclusion :** $(u_n)$ est décroissante.
- On sait que $(u_n)$ est décroissante et minorée (par $b$). Par conséquent, d'après le théorème de convergence monotone, $(u_n)$ converge vers un réel $\ell \geq b$.
- On a ensuite : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.
  Ainsi, par unicité de la limite et continuité de $\ln$ en $\ell$ (car $\ell > 0$) :
  $$\ell = \ln(\ell) + 2$$
  Or :
  $$\begin{aligned} \ell = \ln(\ell) + 2 &\iff \ell - \ln(\ell) = 2 \\ &\iff f(\ell) = 2 \\ &\iff \ell = b \end{aligned}$$
  $\ell > 1$ et $b$ est l'unique solution de $f(x) = 2$ sur $]1;+\infty[$

**Petite remarque**
On a même $\ell \in [2;4]$, car $(u_n)$ est décroissante, elle est donc majorée par son premier terme.

**Conclusion :** la suite $(u_n)$ converge vers $b$.

7. **7.a.** Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - b \leq \dfrac{1}{3}(u_n - b)$.

**➠Réflexe !**
Ça empeste l'IAF !! Pour cela, définir la fonction $g$ de sorte que $u_{n+1} = g(u_n)$ et établir : $\forall x \geq b,\ |g'(x)| \leq \frac{1}{3}$...

- Posons $g : x \longmapsto \ln(x) + 2$, définie sur $[b;+\infty[$, de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$.
  D'après ce qui précède, on a également $g(b) = b$.

- La fonction $g$ est dérivable sur $[b;+\infty[$ et :

$$\forall x \in [b;+\infty[,\ g'(x) = \frac{1}{x}$$

D'où :

$$\forall x \in [b;+\infty[,\ 0 < g'(x) \leq \frac{1}{b}$$

Et comme $b \geq 3$, on a, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_*^+$ : $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{3}$.
Ainsi, par transitivité :

$$\forall x \in [b;+\infty[,\ -\frac{1}{3} \leq g'(x) \leq \frac{1}{3}$$

**Conclusion :** $\forall x \in [b;+\infty[,\ |g'(x)| \leq \frac{1}{3}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :
  - $g$ est dérivable sur $[b;+\infty[$
  - $\forall x \in [b;+\infty[,\ |g'(x)| \leq \frac{1}{3}$
  - $b \in [b;+\infty[$ et $u_n \in [b;+\infty[$ (question **3.**)

D'après l'inégalité des accroissements finis, on a alors :

$$|g(u_n) - g(b)| \leq \frac{1}{3}|u_n - b|$$

Or, $g(u_n) = u_{n+1}$ et $g(b) = b$, d'où :

$$|u_{n+1} - b| \leq \frac{1}{2}|u_n - b|$$

Et comme on a vu que $(u_n)$ est minorée par $b$, on a : $u_{n+1} - b \geq 0$ et $u_n - b \geq 0$.

**Conclusion :** $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - b \leq \frac{1}{3}(u_n - b)$.

> **Petite remarque**
> On pourrait également tout faire sur l'intervalle $[3;4]$, puisque l'on sait que $(b_n)$ est minorée par 3 et, comme elle est décroissante, elle est majorée par son premier terme, égal à 4.

**7.b.** En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n - b \leq \frac{1}{3^n}$.

Par récurrence...

- **Initialisation.** Pour $n = 0$ :
On sait que $u_0 = 4$ et $b \in [3;4]$, donc :

$$0 \leq u_0 - b \leq 1$$

Ainsi :

$$0 \leq u_0 - b \leq \frac{1}{3^0}$$

L'initialisation est vérifiée.

- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $0 \leq u_n - b \leq \frac{1}{3^n}$ et montrons $0 \leq u_{n+1} - b \leq \frac{1}{3^{n+1}}$.
Par hypothèse de récurrence :

$$0 \leq u_n - b \leq \frac{1}{3^n}$$

D'où, en multipliant par $\frac{1}{3}$ (positif) :

$$0 \leq \frac{1}{3}(u_n - b) \leq \frac{1}{3^{n+1}}$$

Or, d'après la question précédente :

$$u_{n+1} - b \leq \frac{1}{3}(u_n - b)$$

D'où, par transitivité :

$$0 \leq u_{n+1} - b \leq \frac{1}{3^{n+1}}$$

L'hérédité est ainsi établie.

**Conclusion :** $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n - b \leq \frac{1}{3^n}$.

**7.c.** Retrouver alors le résultat obtenu à la question 6, puis déterminer un entier à partir duquel $u_n$ est proche de $b$ à $10^{-3}$ près.

- On a :
  - $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n - b \leq \frac{1}{2^{n-1}}$
  - $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{3^n} = 0$

**Conclusion :** par théorème d'encadrement, on retrouve : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = b$.

- Pour déterminer un entier à partir duquel $u_n$ est proche de $b$ à $10^{-3}$ près, il suffit de déterminer un entier $n_0$ tel que $\frac{1}{3^{n_0}} \leq 10^{-3}$.
Or : $3^6 = 729$ et $3^7 = 2187$. On a ainsi :

$$\forall n \in [\![7;+\infty[\![,\ \frac{1}{3^n} \leq 10^{-3}$$

D'où, en utilisant le résultat de la question précédente et par transitivité :

$$\forall n \in [\![7;+\infty[\![,\ 0 \leq u_n - b \leq 10^{-3}$$

**Conclusion :** à partir du terme d'indice 7, nous sommes certains que $u_n$ est une valeur approchée de $b$ à $10^{-3}$ près.

> **★Subtile...★**
> La question **7.b.** fournit une majoration de l'écart entre $u_n$ et $b$. Par conséquent, il est tout à fait possible que $u_n$ sot une valeur approchée de $b$ à $10^{-3}$ près avant le terme d'indice 7...

## Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

Considérons la fonction :

$$\varphi : x \longmapsto \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\,dt$$

8. Montrer que $\varphi$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$, et que l'on a :

$$\forall x \in ]0;+\infty[,\ \varphi'(x) = \frac{\ln(2)-\ln(x)}{(x-\ln(x))(2x-\ln(2x))}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$.
  Puisque $f$ est continue et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_*^+$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{f(t)}$ est continue sur $\mathbb{R}_*^+$.
  De plus, puisque $x \in \mathbb{R}_*^+$, on a $[x;2x] \subset \mathbb{R}_*^+$. Ainsi, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{f(t)}$ est continue sur le segment $[x;2x]$.
  Par conséquent : $\varphi(x)$ existe.

  **Conclusion :** $\varphi$ est définie sur $\mathbb{R}_*^+$.

**♣ Méthode !**
Pour montrer que $\varphi$ est définie sur $\mathbb{R}_*^+$, on doit montrer : pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, $\varphi(x)$ existe.
Ensuite, pour montrer que $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{f}$ existe, on justifie que l'intégrande est continue sur le segment d'intégration.

- Puisque la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{f(t)}$ est continue sur $\mathbb{R}_*^+$, elle admet des primitives de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$. Notons F l'une d'elles.
  On a alors :
  $$\forall x \in \mathbb{R}_*^+,\ \varphi(x) = F(2x) - F(x)$$
- Or :
  - les fonctions $x \longmapsto 2x$ et id sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$, et à valeurs dans $\mathbb{R}_*^+$,
  - la fonction F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$.

  D'où, par composition, $\varphi$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$ :

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= 2F'(2x) - F'(x) \\
&= \frac{2}{f(2x)} - \frac{1}{f(x)} \\
&= \frac{2}{2x-\ln(2x)} - \frac{1}{x-\ln(x)} \\
&= \frac{2(x-\ln(x)-(2x-\ln(2x))}{(2x-\ln(2x))(x-\ln(x))} \\
&= \frac{-2\ln(x)+\ln(2x)}{(2x-\ln(2x))(x-\ln(x))} \\
&= \frac{-2\ln(x)+\ln(2)+\ln(x)}{(2x-\ln(2x))(x-\ln(x))} \\
&= \frac{\ln(2)-\ln(x)}{(2x-\ln(2x))(x-\ln(x))}
\end{aligned}$$

**☞ Rappel...**
Si $u$ est dérivable sur I à valeurs dans J et que F est dérivable sur J, alors $F \circ u$ est dérivable sur I et $\left(F \circ u\right)' = u' \times F' \circ u$.

**Conclusion :** $\forall x \in ]0;+\infty[,\ \varphi'(x) = \dfrac{\ln(2)-\ln(x)}{(x-\ln(x))(2x-\ln(2x))}$.

9. En déduire les variations de $\varphi$ sur $]0;+\infty[$.

Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$.

- On a :
$$\begin{aligned}
\ln(2)-\ln(x) \geq 0 &\iff \ln(x) \leq \ln(2) \\
&\iff x \leq 2 \quad \text{stricte croissance de ln sur } \mathbb{R}_*^+
\end{aligned}$$
- On sait, d'après la question **1.**, que pour tout $t \in \mathbb{R}_*^+$, $f(t) \geq 1$, donc pour tout $t \in \mathbb{R}_*^+$, $t > \ln(t)$.
  Par conséquent, puisque $x \in \mathbb{R}_*^+$ et $2x \in \mathbb{R}_*^+$ :
  $$x - \ln(x) > 0 \ ;\ 2x - \ln(2x) > 0$$

On en déduit :

| $x$ | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi'(x)$ | \|\| | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $\varphi$ | \|\| | ↗ | $2$ | ↘ | |

10. Montrer que : $\forall x \in ]0;+\infty[,\ 0 \leq \varphi(x) \leq x$.

Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$.
On a :
$$\forall t \in [x;2x],\ f(t) \geq 1$$
D'où, par décroissance de la fonction inverse sur $[1;+\infty[$ :
$$\forall t \in [x;2x],\ \frac{1}{f(t)} \leq 1$$
Et comme $f$ est positive sur $\mathbb{R}_*^+$, on a même :
$$\forall t \in [x;2x],\ 0 \leq \frac{1}{f(t)} \leq 1$$
Puis, par croissance de l'intégrale ($2x \geq x$, car $x > 0$) :
$$0 \leq \varphi(x) \leq \int_x^{2x} 1\,dt$$

**Conclusion :** $\forall x \in ]0;+\infty[,\ 0 \leq \varphi(x) \leq x$.

**➠ Réflexe !**
On veut encadrer une intégrale : on encadre l'intégrande !!

**11.** **11.a.** Montrer que $\varphi$ est prolongeable par continuité en 0. On note encore $\varphi$ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\varphi(0)$.

On a :

- $\forall x \in \mathbb{R}_*^+,\ 0 \leq \varphi(x) \leq x$
- $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$

D'où, par théorème d'encadrement :

$$\lim_{x\to 0} \varphi(x) = 0$$

**Conclusion :** $\varphi$ est prolongeable par continuité en posant $\varphi(0) = 0$.

➠**Réflexe !** Cela revient à montrer que $\lim\limits_0 \varphi$ existe et est un réel. A-t-on une expression explicite de $\varphi(x)$ ? NON, alors a-t-on autre chose ? Genre, un encadrement de $\varphi(x)$... ?

**11.b.** Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0} \varphi'(x) = 0$. On admet que la fonction $\varphi$ est alors dérivable en 0 et que $\varphi'(0) = 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$ :

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{\ln(x)}{\ln(x)\ln(2x)} \times \frac{\frac{\ln(2)}{\ln(x)} - 1}{\left(\frac{x}{\ln(x)} - 1\right)\left(\frac{2x}{\ln(2x)} - 1\right)} \\ &= \frac{1}{\ln(2x)} \times \frac{\frac{\ln(2)}{\ln(x)} - 1}{\left(\frac{x}{\ln(x)} - 1\right)\left(\frac{2x}{\ln(2x)} - 1\right)}\end{aligned}$$

On conclut par opérations...

**Conclusion :** $\lim\limits_{x\to 0} \varphi'(x) = 0$.

✘ **Attention !** La limite est en 0... et il y a une FI, due aux ln(...). D'où la factorisation choisie ! **On factorise par ce qui domine.**

✘ **Attention !** Pas de CC !!

**12.** **12.a.** Démontrer que pour tout $t \in [4;+\infty[$ : $\dfrac{1}{t} \leq \dfrac{1}{f(t)} \leq \dfrac{1}{t-\sqrt{t}}$.

- Soit $t \in [4;+\infty[$. Puisque $\ln(t) \geq 0$, on a $t - \ln(t) \geq t$, c'est à dire $f(t) \geq t$. Puis, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_*^+$, on obtient :
$$\frac{1}{t} \leq \frac{1}{f(t)}$$
- Pour tout $t \in [4;+\infty[$, on a :
$$f(t) \geq t - \sqrt{t} \iff \ln(t) \leq \sqrt{t}$$
Posons alors $g : t \longmapsto \ln(t) - \sqrt{t}$.
  - La fonction $g$ est dérivable sur $[4;+\infty[$ et, pour tout $t \in [4;+\infty[$ :
  $$g'(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{2-\sqrt{t}}{2t\sqrt{t}}$$
  D'où :

| $t$ | $4$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $g'(t)$ | $0$ $\quad -$ | |
| $g$ | $-2+\ln(4)$ $\searrow$ | $-\infty$ |

  - Or $2 < e$, donc $4 < e^2$, et ainsi $-2 + \ln(4) < 0$.

D'où :
$$\forall t \in [4;+\infty[,\ g(t) \leq 0$$
Autrement dit :
$$\forall t \in [4;+\infty[,\ \ln(t) \leq \sqrt{t}$$
Par conséquent :
$$\forall t \in [4;+\infty[,\ f(t) \geq t - \sqrt{t}$$
Or, on sait que :
$$\forall t > 1,\ t - \sqrt{t} > 0$$
D'où :
$$\forall t \in [4;+\infty[,\ f(t) \geq t - \sqrt{t} > 0$$
Et ainsi, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_*^+$ :
$$\forall t \in [4;+\infty[,\ \frac{1}{f(t)} \leq \frac{1}{t-\sqrt{t}}$$

**Conclusion :** pour tout $t \in [4;+\infty[$, $\dfrac{1}{t} \leq \dfrac{1}{f(t)} \leq \dfrac{1}{t-\sqrt{t}}$.

**12.b.** Considérons la fonction $h : t \longmapsto 2\ln\left(\sqrt{t} - 1\right)$ définie sur $[4;+\infty[$. Dériver $h$.

$h$ est dérivable sur $[4;+\infty[$ comme composée de fonctions dérivables sur les intervalles adéquats et, pour tout $t \in [4;+\infty[$ :

$$\begin{aligned}h'(t) &= 2\frac{\frac{1}{2\sqrt{t}}}{\sqrt{t}-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{t}} \times \frac{1}{\sqrt{t}-1} \\ &= \frac{1}{t-\sqrt{t}}\end{aligned}$$

**Conclusion :** $\forall t \in [4;+\infty[,\ h'(t) = \dfrac{1}{t-\sqrt{t}}$.

**12.c.** En déduire que pour tout $x \in [4;+\infty[$ : $\ln(2) \leq \varphi(x) \leq 2\ln\left(\dfrac{\sqrt{2x}-1}{\sqrt{x}-1}\right)$.

Soit $x \in [4;+\infty[$. Puisque $[x;2x] \subset [4;+\infty[$, on a, d'après la question **13.a.** :

$$\forall t \in [x;2x],\ \frac{1}{t} \leq \frac{1}{f(t)} \leq \frac{1}{t-\sqrt{t}}$$

Puis, par croissance de l'intégrale ($2x \geq x$, car $x > 0$) :

$$\int_x^{2x} \frac{1}{t}\,dt \leq \varphi(x) \leq \int_x^{2x} \frac{1}{t-\sqrt{t}}\,dt$$

Or :

- $$\begin{aligned}\int_x^{2x} \frac{1}{t}\,dt &= \Big[\ln(|t|)\Big]_x^{2x} \\ &= \ln(2x) - \ln(x) \\ &= \ln(2)\end{aligned}$$

- D'après la question **13.b.** :

$$\begin{aligned}\int_x^{2x} \frac{1}{t-\sqrt{t}}\,dt &= \Big[h(t)\Big]_x^{2x} \\ &= h(2x) - h(x) \\ &= 2\Big(\ln(\sqrt{2x}-1) - \ln(\sqrt{x}-1)\Big) \\ &= 2\ln\left(\frac{\sqrt{2x}-1}{\sqrt{x}-1}\right)\end{aligned}$$

**Conclusion :** pour tout $x \geq 4$, $\ln(2) \leq \varphi(x) \leq 2\ln\left(\dfrac{\sqrt{2x}-1}{\sqrt{x}-1}\right)$.

**12.d.** Déterminer la limite de $\varphi$ en $+\infty$.

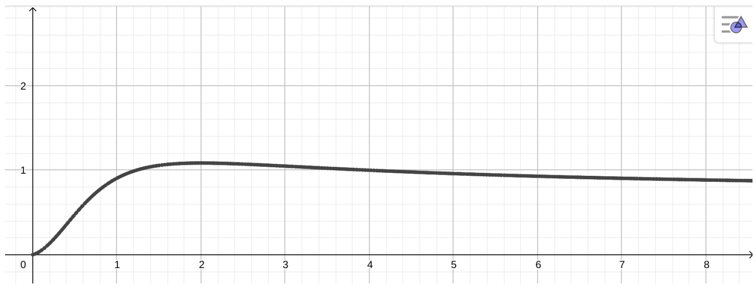
Voir chapitre 6 - exemple 8 !!

**Conclusion :** par théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = \ln(2)$.

**13.** Tracer l'allure de la courbe représentative de $\varphi$ dans un repère orthonormé du plan. On veillera à faire apparaître les différentes tangentes ou asymptotes connues.
*Donnée* : $\varphi(2) \simeq 1,1$.

Récapitulons quelques informations à faire apparaître :

- $\varphi$ est strictement croissante sur $]0;2]$, strictement décroissante sur $[2;+\infty[$
- $\varphi'(0) = 0$, donc $\mathcal{C}_\varphi$ admet une demi-tangente horizontale au point de coordonnées $(0,0)$ (car $\varphi(0) = 0$)
- $\varphi'(2) = 0$, donc $\mathcal{C}_\varphi$ admet une tangente horizontale au point de coordonnées $(2, \varphi(2))$
- $\lim\limits_{+\infty} \varphi = \ln(2)$, donc $\mathcal{C}_\varphi$ admet une asymptote "horizontale" d'équation $y = \ln(2)$ au voisinage de $+\infty$




Petite remarque

Impossible de primitiver $\frac{1}{f}$ avec des fonctions usuelles. Dans ce cas, la seule façon de calculer des valeurs de $\varphi(x)$ est d'obtenir une valeur approchée de $\int_x^{2x} \frac{1}{f}$ par une méthode d'approximation d'intégrale... Typiquement la méthode des rectangles (chapitre 19 - exercice 20) ou des trapèzes (voir exercice précédent...).

★★★★★★★