Devoir surveillé 6
Samedi 29 avril 2023 - 4h00

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :

- ***la copie devra présenter une en-tête d'au moins une demi-page ainsi qu'une marge suffisante,***
- ***toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,***
- ***les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),***
- ***les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.***

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.

"*Prenez tout très au sérieux, à l'exception de vous-même.*"
Rudyard Kipling

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{n(x+n)}\,dx$.

1. Calculer u_1.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la fonction f_n sur $[0;1]$ par : $\forall x \in [0;1],\ f_n(x) = \dfrac{x}{x+n}$. Dresser le tableau de variations de f_n sur $[0;1]$.
3. **3.a.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n^2}$.

   3.b. En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$. *On note* $\gamma = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.
4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

   4.a. Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{S}_n \leq \gamma$.

   4.b. Déterminer les deux réels a, b tels que pour tout $x \in [0;1]$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{x}{k(x+k)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{x+k}$.

   4.c. Établir alors : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_k = \dfrac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k)$.

   4.d. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{T}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

   5.a. Justifier que $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et préciser sa limite.

   5.b. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \dfrac{1}{n}$. En déduire que $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
6. Donner finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, un encadrement de γ à l'aide de T_n et S_n.
7. On considère la fonction `Python` définie ci-dessous :

```python
import numpy as np
def gamma(p):
    n=1
    while np.log(1+1/n)>p:
        n=n+1
    L=[1/k for k in range(1,n+1)]
    S=sum(L)-np.log(n+1)
    T=sum(L)-np.log(n)
    return S,T
```

   L'exécution de la commande `gamma(10**(-3))` renvoie : `(0.5767160812351229, 0.5777155815682065)`. Interpréter ce résultat en justifiant soigneusement la réponse.

★★★★★★★

Exercice 2

Un mobile se déplace aléatoirement sur un axe dont l'origine est le point O d'abscisse 0.
Au départ (instant 0), le mobile est situé sur le point O. Le mobile se déplace selon la règle suivante : à l'instant n ($n \in \mathbb{N}^*$), il se place de façon équiprobable, sur l'un des points d'abscisse $0, 1, \ldots, n$.
Pour tout entier naturel n, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n (on a donc $\mathrm{X}_0 = 0$).
On admet que, pour tout entier naturel n, X_n est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à déterminer. On admet aussi que $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

1. **1.a.** Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, la loi de X_n.

   1.b. Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, X_n possède une espérance et une variance, puis les déterminer.
2. On note Y l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement initial), et on attribue à Y la valeur 0 si le mobile ne revient jamais à l'origine. On admet que Y est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

   2.a. Justifier que $\mathrm{Y}(\Omega) = \mathbb{N}$.

   2.b. Pour tout entier naturel i non nul, exprimer l'événement $[\mathrm{Y} = i]$ à l'aide des variables aléatoires $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_i$.

   2.c. En déduire : $\forall i \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([\mathrm{Y} = i]) = \dfrac{1}{i(i+1)}$.

   2.d. Vérifier par le calcul que l'on a : $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([\mathrm{Y} = i]) = 1$.

2.e. Déterminer alors $\mathbb{P}([Y=0])$ et interpréter le résultat.

2.f. Démontrer que la variable aléatoire Y n'admet pas d'espérance.

3. On note Z l'instant auquel le mobile se trouve pour la deuxième fois à l'origine (sans compter son positionnement initial), et on attribue à Z la valeur 0 si le mobile revient au plus une fois à l'origine. On admet que Z est une variable aléatoire, définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et que $\mathbb{P}([Z=0])=0$.

   3.a. Sans justifier, donner $Z(\Omega)$.

   3.b. Soient $(i,j) \in \mathbb{N}^* \times [\![2;+\infty[\![$ tel que $i \geq j$. Déterminer la probabilité $\mathbb{P}_{[Y=i]}([Z=j])$.

   3.c. Soient $(i,j) \in \mathbb{N}^* \times [\![2;+\infty[\![$ tel que $i \leq j-1$. Établir : $\mathbb{P}_{[Y=i]}([Z=j]) = \dfrac{i+1}{j(j+1)}$.

   3.d. Écrire, pour tout entier naturel j supérieur ou égal à 2, la probabilité $\mathbb{P}([Z=j])$ comme une somme finie.

   3.e. La variable aléatoire Z admet-elle une espérance ?

4. 4.a. Recopier et compléter le programme suivant de sorte que l'exécution de `simulYZ()` renvoie une réalisation de Y et Z.

```
import numpy.random as rd
def simulYZ():
    n=1
    while ............... :
        n =......
    Y =......
    n=n+1
    while ............... :
        n =......
    Z =......
    return Y,Z
```

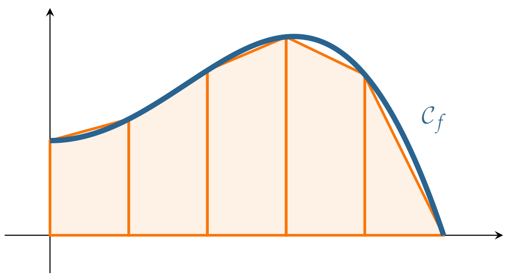
   4.b. En utilisant la fonction de la question précédente, écrire un programme `Python` dont l'exécution permettrait d'obtenir l'histogramme des fréquences sur 10000 réalisations de la variable aléatoire Y.

★★★★★★★

Exercice 3

Dans tout l'exercice, a et b désignent deux réels tels que $a \leq b$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a;b]$. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.

L'objectif de l'exercice est d'étudier une méthode de calcul approché d'intégrales : la méthode des trapèzes. Le principe est résumé grâce au schéma ci-contre, dans le cas d'une approximation de l'intégrale par l'aire algébrique (positive ou négative selon la position par rapport à l'axe des abscisses) de cinq trapèzes rectangles.



Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$ le nombre de trapèzes. On pose, pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $a_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$.

1. Soit $k \in [\![0;n-1]\!]$. Exprimer en fonction de a_k, a_{k+1} et f l'aire algébrique du trapèze dont les sommets sont les points de coordonnées $(a_k,0)$, $(a_k,f(a_k))$, $(a_{k+1},f(a_{k+1}))$ et $(a_{k+1},0)$. On notera $\mathcal{A}_k$ cette aire algébrique.

2. Justifier que $|f''|$ admet un maximum sur $[a;b]$. On notera $\mathrm{M} = \max\limits_{x\in[a;b]} \left(|f''(x)|\right)$.

3. Soient $\alpha, \beta \in [a;b]$ tels que $\alpha \leq \beta$.

   3.a. A l'aide d'intégrations par parties, démontrer :
$$\int_\alpha^\beta \frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{2} f''(x)dx = -(\beta-\alpha)\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} + \int_\alpha^\beta f(x)dx$$

   3.b. Établir : $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx = \frac{(\alpha-\beta)^3}{6}$.

4. Déduire de la question 3.b. que pour tout $k \in [\![0;n-1]\!]$: $\displaystyle\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} (x-a_k)(x-a_{k+1})f''(x)dx\right| \leq \frac{\mathrm{M}(b-a)^3}{6n^3}$.

5. On pose $\mathrm{I} = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$ et $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{A}_k$. Déduire des questions précédentes :
$$|\mathrm{I}-\mathrm{S}_n| \leq \frac{\mathrm{M}(b-a)^3}{12n^2}$$

6. Conclure sur la convergence de la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in[\![2;+\infty[\![}$.

7. Écrire un programme `Python` qui permet d'obtenir une valeur approchée à 10^{-3} près de $\displaystyle\int_0^1 e^{x^2}dx$.

★★★★★★★

Exercice 4

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \; f(x) = x - \ln(x)$$

Partie I : Étude de la fonction f.

1. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in]0;+\infty[$, admet exactement deux solutions, notées a et b, telles que $0 < a < 1 < b$.
3. Établir : $b \in [3;4]$.
4. Recopier et compléter les lignes manquantes du programme suivant afin que l'exécution de `approx_b(p):` renvoie une valeur approchée de b à p près, où p est un réel strictement positif, obtenue par la méthode de dichotomie.

```
import numpy as np

def f(x):
    return ......

def approx_b(p):
    x1,x_2=3,4
    while ......:
        m=......
        if f(m)==2:
            ......
        elif f(m)<2:
            ......
        else:
            ......
    return ......
```

Partie II : Étude d'une suite

On définit maintenant la suite (u_n) par $u_0 = 4$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq b$.
6. Déterminer alors la monotonie de la suite (u_n). En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.
7. 7.a. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} - b \leq \dfrac{1}{3}(u_n - b)$.

   7.b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \; 0 \leq u_n - b \leq \dfrac{1}{3^n}$.

   7.c. Retrouver alors le résultat obtenu à la question 6, puis déterminer un entier à partir duquel u_n est proche de b à 10^{-3} près.

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

Considérons la fonction :

$$\varphi : x \longmapsto \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)} \, dt$$

8. Montrer que φ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$, et que l'on a :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \; \varphi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}$$

9. En déduire les variations de φ sur $]0;+\infty[$.
10. Montrer que : $\forall x \in]0;+\infty[$, $0 \leq \varphi(x) \leq x$.
11. 11.a. Montrer que φ est prolongeable par continuité en 0. On note encore φ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\varphi(0)$.

    11.b. Montrer que : $\lim\limits_{x \to 0} \varphi'(x) = 0$. On admet que la fonction φ est alors dérivable en 0 et que $\varphi'(0) = 0$.
12. 12.a. Démontrer que pour tout $t \in [4;+\infty[$: $\dfrac{1}{t} \leq \dfrac{1}{f(t)} \leq \dfrac{1}{t - \sqrt{t}}$.

    12.b. Considérons la fonction $h : t \longmapsto 2\ln\left(\sqrt{t} - 1\right)$ définie sur $[4;+\infty[$. Dériver h.

    12.c. En déduire que pour tout $x \in [4;+\infty[$: $\ln(2) \leq \varphi(x) \leq 2\ln\left(\dfrac{\sqrt{2x} - 1}{\sqrt{x} - 1}\right)$.

    12.d. Déterminer la limite de φ en $+\infty$.
13. Tracer l'allure de la courbe représentative de φ dans un repère orthonormé du plan. On veillera à faire apparaître les différentes tangentes ou asymptotes connues.
    Donnée : $\varphi(2) \simeq 1,1$.

★★★★★★★