Concours blanc 2 - Épreuve 1

Lundi 22 mai 2023 — 8h00-12h00

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :

- ***la copie devra présenter une en-tête d'au moins une demi-page ainsi qu'une marge suffisante,***
- ***toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,***
- ***les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),***
- ***les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.***

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.

"*La motivation vous sert de départ. L'habitude vous fait continuer.*"
Jim Ryun

Exercice 1

On rappelle que si f désigne un endomorphisme d'un espace vectoriel E, alors $f \circ f$ est également un endomorphisme de E et on note : $f^2 = f \circ f$.

Partie I. Puissances d'une matrice.

1. Questions préliminaires.
Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice telle que $A^3 - 5A^2 + 8A - 4I_3 = 0_3$ et $A \neq I_3$.

1.a. Démontrer que la matrice A est inversible et exprimer A^{-1} comme une combinaison linéaire de I_3, A et A^2.

Puisque $A^3 - 5A^2 + 8A - 4I_3 = 0_3$, on a :

$$A \times \frac{1}{4}(A^2 - 5A + 8I_3) = I_3$$

Conclusion : A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - 5A + 8I_3)$.

1.b. Déterminer les racines du polynôme $X^3 - 5X^2 + 8X - 4$.

On a :

$$\begin{aligned} X^3 - 5X^2 + 8X - 4 &= (X-1)(X^2 - 4X + 4) \quad \text{car 1 est racine de } X^3 - 5X^2 + 8X - 4 \\ &= (X-1)(X-2)^2 \end{aligned}$$

Conclusion : les racines du polynôme $X^3 - 5X^2 + 8X - 4$ sont 1 et 2.

Petite remarque
2 est racine double

1.c. A l'aide de la question précédente, démontrer que la matrice $A - 2I_3$ n'est pas inversible.

D'après la question précédente, on a : $X^3 - 5X^2 + 8X - 4 = (X-1)(X-2)^2$; et ainsi :

$$(A - I_3)(A - I_3)^2 = 0_3$$

Raisonnons par l'absurde et supposons ainsi que $A - 2I_3$ est inversible.
En multipliant, par $(A - 2I_3)^{-1}$ (par la droite) l'égalité $(A - I_3)(A - 2I_3)^2 = 0_3$, on obtient :

$$(A - I_3)(A - 2I_3) = 0_3$$

En renouvelant, on a ainsi :

$$A - I_3 = 0_3$$

Ce qui contredit l'hypothèse que $A \neq I_3$.

Conclusion : la matrice $A - I_2$ n'est pas inversible.

☞ Pour info...
La matrice $A - I_3$, quant à elle, n'est pas nécessairement non inversible. En effet, en prenant $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, on aurait $(A - 2I_2)^2 = 0_2$, donc $X^3 - 5X^2 + 8X - 4$ serait annulateur de A ; et pourtant, $A - I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible.
Tout dépend donc de la matrice A initiale...

On considère à présent la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -8 & 5 \end{pmatrix}$ et note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

2. L'exécution du programme Python qui suit

```python
import numpy as np
import numpy.linalg as al

A=np.array([[0,1,0],[0,0,1],[4,-8,5]])
A2=al.matrix_power(A,2)
A3=al.matrix_power(A,3)

print(A3-5*A2+8*A)
```

affiche :

```
[[4 0 0]
 [0 4 0]
 [0 0 4]]
```

En déduire un polynôme annulateur de la matrice A.

Le programme permet de calculer $A^3 - 5A^2 + 8A$...

Conclusion : le polynôme $X^3 - 5X^2 + 8X - 4$ est annulateur de la matrice A.

3. Quel est le rang de f ?

D'après la question précédente, le polynôme $X^3 - 5X^2 + 8X - 4$ est annulateur de A. On se retrouve donc dans le contexte de la question **1.**.
Par conséquent,d 'après la question **1.a.**, la matrice A est inversible. Ainsi, f est bijectif. Son rang est donc maximal.

Conclusion : $\text{rg}(f) = 3$.

4. **4.a.** Soient λ une racine du polynôme $X^3 - 5X^2 + 8X - 4$ et $u = (1, \lambda, \lambda^2)$. Vérifier que $f(u) = \lambda u$.

Puisque f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A, on a :

$$\begin{aligned} f(u) &= f(1, \lambda, \lambda^2) \\ &= (\lambda, \lambda^2, 4 - 8\lambda + 5\lambda^2) \\ &= (\lambda, \lambda^2, \lambda^3) && \text{λ est racine de $X^3 - 5X^2 + 8X - 4$, donc $4 - 8\lambda + 5\lambda^2 = \lambda^3$} \\ &= \lambda u \end{aligned}$$

> **Petite remarque**
> On pourrait également travailler avec les matrices, en posant $U = \mathrm{Mat}_{bc}(u)$ et en calculant AU...

4.b. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Supposons qu'il existe $u \in \mathbb{R}^3$ non nul tel que $f(u) = \lambda u$.

4.b.i. Exprimer $f^2(u)$ en fonction de λ et u.

On a :

$$\begin{aligned} f^2(u) &= f\big(f(u)\big) && f(u) = \lambda u \\ &= f\big(\lambda u\big) && \text{linéarité de } f \\ &= \lambda f(u) && f(u) = \lambda u \\ &= \lambda^2 u \end{aligned}$$

4.b.ii. En déduire que λ est racine du polynôme $X^3 - 5X^2 + 8X - 4$.

- De la même façon qu'à la question précédente, on a :

$$f^3(u) = \lambda^3 u$$

- Or, le polynôme $X^3 - 5X^2 + 8X - 4$ est annulateur de A, donc il est également annulateur de f. Ainsi :

$$f^3 - 5f^2 + 8f - 4\mathrm{id} = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$$

Puis, en évaluant en u, on obtient :

$$f^3(u) - 5f^2(u) + 8f(u) - 4u = 0_{\mathbb{R}^3}$$

D'après les deux points ci-dessus, la question précédente et le fait que $f(u) = \lambda u$, on obtient :

$$(\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4)u = 0_{\mathbb{R}^3}$$

Et, puisque u est non nul, il reste :

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4$$

Conclusion : λ est racine du polynôme $X^3 - 5X^2 + 8X - 4$.

> **☞ Pour info...**
> En fait, ce qui a été fait est indépendant de l'endomorphisme f, du moment qu'on en connaît un polynôme annulateur P... On a ainsi établi que les valeurs propres de f sont parmi les racines de P. Résultat qui sera revu l'an prochain.

4.c. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déduire des questions précédentes que : $f - \lambda\mathrm{id}$ n'est pas bijectif si, et seulement si, $\lambda \in \{1; 2\}$.

Raisonnons pas double-implication...

$\Longleftarrow$ Supposons que $\lambda \in \{1; 2\}$. D'après la question **1.b.**, λ est donc racine du polynôme $X^3 - 5X^2 + 8X - 4$.
Ainsi, d'après la question **4.a.**, le vecteur $u = (1, \lambda, \lambda^2)$ vérifie $f(u) = \lambda u$.
Par conséquent, $u \in \ker(f - \lambda\mathrm{id})$. Mais, puisque la première composante de u est non nulle, le vecteur u est lui aussi non nul. D'où :

$$\ker(f - \lambda\mathrm{id}) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$$

Par conséquent : $f - \lambda\mathrm{id}$ n'est pas injectif, donc pas bijectif.

> **➠Réflexe !**
> $f(u) = \lambda u \iff (f - \lambda\mathrm{id})(u) = 0$
> $\iff u \in \ker(f - \lambda\mathrm{id})$

$\Longrightarrow$ Supposons que $f - \lambda\mathrm{id}$ n'est pas bijectif.
Puisque $f - \lambda\mathrm{id}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, il n'est donc pas injectif. Par conséquent :

$$\ker(f - \lambda\mathrm{id}) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$$

Et il existe donc un vecteur non nul u tel que $f(u) = \lambda u$.
En utilisant le résultat de la question **3.b.ii.**, λ est donc racine de $X^3 - 5X^2 + 8X - 4$, et donc $\lambda \in \{1; 2\}$.

> **Pourquoi ?**
> C'est le théorème sur l'équivalence injectif/surjectif/bijectif dans le cas des endomorphismes !

Conclusion : $f - \lambda\mathrm{id}$ n'est pas bijectif si, et seulement si, $\lambda \in \{1; 2\}$.

5. Déterminer le rang de la matrice $A - I_3$. Donner alors une base de $\ker(f - \mathrm{id})$ constituée d'un unique vecteur, noté u_1, dont la première composante est égale à 1.

On a : $A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & -8 & 4 \end{pmatrix}$ et on remarque que $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Et ainsi :

-

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(A - I_3) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right) && \text{car } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right) && \text{car } \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ sont non colinéaires donc linéairement indépendants} \\ &= 2 \end{aligned}$$

D'où, par théorème du rang :

$$\dim\big(\ker(A - I_3)\big) = 1$$

- $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker(A - I_3)$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est donc une famille de $\ker(A - I_3)$:

- libre car constituée d'un unique vecteur non nul,

- de cardinal 1 dans $\ker(A - I_3)$, qui est de dimension 1.

Par conséquent, la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\ker(A - I_3)$.

Conclusion : la famille $\big((1,1,1)\big)$ est une base de $\ker(f - \mathrm{id})$ et on pose $u_1 = (1,1,1)$.

6. Notons $u_2 = (1,2,4)$. Vérifier que $u_2 \in \ker(f - 2\mathrm{id})$.

On note $U_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ et on calcule $(A - 2I_3)U_2$... On trouve bien $0_{3,1}$.

Conclusion : $u_2 \in \ker(f - 2\mathrm{id})$.

7. Résoudre l'équation $f(v) = 2v + u_2$, d'inconnue $v \in \mathbb{R}^3$, puis en donner une solution, notée u_3, dont la première composante est nulle.

Notons $U_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$. Soit $V = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
AV = 2V + U_2 &\iff \begin{cases} y = 2x+1 \\ z = 2y+2 \\ 4x - 8y + 5z = 2z+4 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -2x + y = 1 \\ -2y + z = 2 \\ 4x - 8y + 3z = 4 \end{cases} \\
&\underset{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1}{\iff} \begin{cases} -2x + y = 1 \\ -2y + z = 2 \\ -6y + 3z = 6 \end{cases} \\
&\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2}{\iff} \begin{cases} -2x + y = 1 \\ -2y + z = 2 \\ 0 = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = \frac{1}{4}z - 1 \\ y = \frac{1}{2}z - 1 \\ z = z \end{cases} \\
&\iff V = z\begin{pmatrix}1/4\\1/2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Prenons alors $z = 4$ et posons $U_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}$: U_3 est ainsi solution de l'équation $AV = 2V + U_2$.

Conclusion : posons $u_3 = (0,1,4)$; u_3 est solution de l'équation $f(v) = 2v + u_2$, d'inconnue $v \in \mathbb{R}^3$ et la première composante de u_3 est bien nulle.

8. **8.a.** Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

- Montrons que (u_1, u_2, u_3) est libre.
  Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Supposons que $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$.
  Or :

$$\begin{aligned}
au_1 + bu_2 + cu_3 = 0 &\iff (a,a,a) + (b,2b,4b) + (0,c,4c) = (0,0,0) \\
&\iff \begin{cases} a + b = 0 \\ a + 2b + 4c = 0 \\ a + 4b + 4c = 0 \end{cases} \\
&\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \begin{cases} a + b = 0 \\ b + 4c = 0 \\ 3b + 4c = 0 \end{cases} \\
&\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2}{\iff} \begin{cases} a + b = 0 \\ b + 4c = 0 \\ -8c = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

  La famille (u_1, u_2, u_3) est donc libre.
- De surcroît (*dédicace à AS*) : $\mathrm{Card}(u_1, u_2, u_3) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

Conclusion : la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

8.b. Sans effectuer de calcul matriciel, déterminer, en justifiant, la matrice de f dans la base (u_1, u_2, u_3). On notera T la matrice obtenue.

- Puisque $u_1 \in \ker(f - \mathrm{id})$, on a : $(f - \mathrm{id})(u_1) = 0$, d'où : $f(u_1) - u_1 = 0$. Autrement dit :
$$f(u_1) = u_1$$
- De la même façon :
$$f(u_2) = 2u_2$$
- Et par définition de u_3 :
$$f(u_3) = 2u_3 + u_2$$

Ainsi :

$$\mathrm{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}(f) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 1\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

Conclusion : $\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

9. Posons maintenant $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

9.a. Montrer que la matrice P est inversible et calculer son inverse. *On admet que l'on a alors :* $\mathrm{A} = \mathrm{PTP}^{-1}$.

> **Petite remarque**
> On peut remarquer le lien entre P et les vecteurs u_1, u_2 et u_3...

Sans difficulté, par la méthode habituelle, on trouve que P est inversible et que $\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

9.b. Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{A}^n = \mathrm{PT}^n\mathrm{P}^{-1}$.

Par récurrence...

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
  $\mathrm{PT}^0\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{PI}_2\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{PP}^{-1} = \mathrm{I}_2 = \mathrm{A}^0$: l'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathrm{A}^n = \mathrm{PT}^n\mathrm{P}^{-1}$ et montrons que $\mathrm{A}^{n+1} = \mathrm{PT}^{n+1}\mathrm{P}^{-1}$.
  On a :
  $$\begin{aligned} \mathrm{A}^{n+1} &= \mathrm{A}^n \times \mathrm{A} \\ &= \mathrm{PT}^n\mathrm{P}^{-1}\mathrm{PTP}^{-1} && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \mathrm{PT}^n\mathrm{I}_2\mathrm{TP}^{-1} \\ &= \mathrm{PT}^{n+1}\mathrm{P}^{-1} \end{aligned}$$
  L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{A}^n = \mathrm{PT}^n\mathrm{P}^{-1}$.

9.c. Posons $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ de sorte que $\mathrm{T} = \mathrm{D} + \mathrm{N}$. En utilisant la formule du binôme de Newton, déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de T^n.

- Commençons par remarquer que :
  - $\mathrm{N}^2 = 0_3$; ainsi, pour tout $k \in [\![2;+\infty[\![$, $\mathrm{N}^k = 0_3$.
  - $\mathrm{DN} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{ND}$: les matrices D et N commutent.

> **Petite remarque**
> Il faut le vérifier ici, puisque D n'est pas un multiple de la matrice I_3, ce n'est donc pas "évident".

- Soit ensuite $n \in \mathbb{N}$. Distinguons deux cas :
  - Si $n \geq 2$:
    $$\begin{aligned} \mathrm{T}^n &= (\mathrm{D}+\mathrm{N})^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{D}^{n-k}\mathrm{N}^k && \text{formule du binôme de Newton, puisque D et N commutent} \\ &= \binom{n}{0}\mathrm{D}^n\mathrm{N}^0 + \binom{n}{1}\mathrm{D}^{n-1}\mathrm{N} + \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{D}^{n-k}\mathrm{N}^k && \text{relation de Chasles, licite car } n \geq 2 \\ &= \mathrm{D}^n + n\mathrm{D}^{n-1}\mathrm{N} && \forall k \in [\![2;+\infty[\![,\ \mathrm{N}^k = 0_3 \end{aligned}$$
  - Si $n \in \{0;1\}$.
    - Si $n = 0$:
      On a :
      $$\mathrm{D}^0 + 0\mathrm{D}^{0-1}\mathrm{N} = \mathrm{I}_3 = \mathrm{T}^0$$
    - Si $n = 1$:
      On a :
      $$\mathrm{D}^1 + 1\mathrm{D}^{1-1}\mathrm{N} = \mathrm{D} + \mathrm{N} = \mathrm{T}$$

> **Petite remarque**
> J'ai procédé un peu différemment... Habituellement, je distingue les cas "$n \geq 1$" et "$n = 0$" ; la relation de Chasles étant licite quand $n \geq 1$, puisque la somme de droite serait nulle (car indexée sur un ensemble vide).
> Mais... étant donné que vous êtes peu nombreux à y penser, que c'est parfois perturbant de l'écrire et que ce n'est pas très coûteux ensuite de vérifier les cas "$n = 0$" et "$n = 1$" à part, je décide de faire ainsi à présent.

> **♡ Astuce du chef ! ♡**
> Autant faire les vérifications des autres cas sur l'expression la plus élémentaire "$\mathrm{T}^n = \mathrm{D}^n + n\mathrm{D}^{-1}\mathrm{N}$", plutôt que sur l'expression finale...

  On a donc toujours :
  $$\mathrm{T}^n = \mathrm{D}^n + n\mathrm{D}^{n-1}\mathrm{N}$$
  Or, D étant diagonale, on a : $\mathrm{D}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

  Et : $\mathrm{D}^{n-1}\mathrm{N} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

  On a ainsi :
  $$\mathrm{T}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\mathrm{T}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

9.d. Soit $n \in \mathbb{N}$. Conclure sur l'expression de A^n.

En utilisant les résultats des questions précédentes :

$$\begin{aligned} \mathrm{A}^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4+(n-3)2^n & -4+2^{n+2}-3n2^{n-1} & 1-2^n+n2^{n-1} \\ 4+(n-2)2^{n+1} & -4+2^{n+3}-3(n+1)2^n & 1+(n-1)2^n \\ 4+(n-1)2^{n+2} & -4+2^{2n+4}-3(n+2)2^{n+1} & 1+n2^{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

> **Vérification**
> On peut rapidement vérifier que l'expression donne I_3 pour $n = 0$ (A étant inversible) et A pour $n = 1$...

Partie II. Application à l'étude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 3.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1, \ u_1 = 1, \ u_2 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+3} = 5u_{n+2} - 8u_{n+1} + 4u_n \end{cases}$.

10. Écrire une fonction Python qui prend en argument d'entrée un entier naturel n et qui renvoie la valeur de u_n en sortie.

```
#Avec une fonction récursive :
def u(n):
    if n==0:
        return 1
    elif n==1:
        return 1
    elif n==2:
        return 4
    else :
        return 5*u(n-1)-8*u(n-2)+4*u(n-3)

#Avec une boucle for :
def ubis(n):
    if n==0:
        return 1
    elif n==1:
        return 1
    elif n==2:
        return 4
    else :
        U,V,W=1,1,4
        for k in range(3,n+1):
            U,V,W=V,W,5*W-8*V+4*U
        return W
```

11. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \ X_n = A^n X_0$.

- Commençons déjà par remarquer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$...
- Démontrons ensuite le résultat par récurrence.
  - **Initialisation.** Pour $n = 0$:
    $A^0 X_0 = I_3 X_0 = X_0$: l'initialisation est vérifiée.
  - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $X_n = A^n X_0$ et montrons que $X_{n+1} = A^{n+1} X_0$.
    On a, en utilisant le point précédent :

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= AX_n \\ &= A \times A^n X_0 \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= A^{n+1} X_0 \end{aligned}$$

L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : par récurrence, on a démontré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

12. En utilisant les résultats de la partie I, conclure sur le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, on a $X_n = A^n X_0$. En utilisant le résultat de la question **9.d.**, on obtient :
Ainsi :

$$X_n = \begin{pmatrix} 4 + (n-3)2^n & -4 + 2^{n+2} - 3n2^{n-1} & 1 - 2^n + n2^{n-1} \\ 4 + (n-2)2^{n+1} & -4 + 2^{n+3} - 3(n+1)2^n & 1 - 2^{n+1} + (n+1)2^n \\ 4 + (n-1)2^{n+2} & -4 + 2^{2n+4} - 3(n+2)2^{n+1} & 1 - 2^{n+2} + (n+2)2^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Or $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$...

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}, \ u_n = 4 + 2^{n-1}(3n - 6)$.

★★★★★★★

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0;+\infty[,\ f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$$

On considère également la suit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. **1.a.** Dresser le tableau de variations complet de f.

- f est le quotient de deux fonctions usuelles dérivables sur $]0;+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0;+\infty[$; par conséquent, f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et, pour tout $x \in]0;+\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-xe^{-x} - e^{-x}}{x^2} \\ &= \frac{-e^{-x}(x+1)}{x^2} \end{aligned}$$

- Limites :
Par opérations, on a :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$$

et :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

- D'où :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	‖ $\qquad$ $-$
f	‖ $+\infty$ $\searrow$ 0

1.b. Vérifier que chaque terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est correctement défini et strictement positif.

Démontrons par récurrence que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 0$.

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
u_0 existe et $u_0 > 0$: l'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que "u_n existe et $u_n > 0$" et montrons que "u_{n+1} existe et $u_{n+1} > 0$".
  - Par hypothèse de récurrence, u_n existe et $u_n > 0$, donc $f(u_n)$ existe. Autrement dit, u_{n+1} existe.
  - Et, on a aussi : $u_{n+1} > 0$, comme quotient de deux nombre strictement positifs.

L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 0$.
Autrement dit, chaque terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est correctement défini et strictement positif.

2. **2.a.** Écrire une fonction `Python` telle que, pour tout réel strictement positif a, l'appel de `CB_1(a)` renvoie le plus petit entier naturel n tel que $u_n > a$.

```python
import numpy as np

def CB_1(a):
    u=1
    n=0
    while u<a:
        u=np.exp(-u)/u
        n=n+1
    return n
```

2.b. On admet que l'on a également défini une fonction `Python` tel que, pour tout réel strictement positif a, l'appel de `CB_2(a)` renvoie le plus petit entier naturel n tel que $u_n < a$.
Les appels `CB_1(10**6)` et `CB_2(10**(-6))` renvoient respectivement 6 et 5.
Qu'en déduire sur u_5 et u_6 ? Commenter le résultat en une ligne.

- On en déduit que $u_5 < 10^{-6}$ et $u_6 > 10^6$.
- L'écart entre u_5 et u_6 est considérable... la suite (u_n) serait-elle divergente ?

3. On définit maintenant la fonction g sur $[0;+\infty[$ par : $\forall x \in [0;+\infty[$, $g(x) = e^{-x} - x^2$.

3.a. Démontrer que g réalise une bijection de $[0;+\infty[$ dans $]-\infty;1]$.

- La fonction carrée est strictement croissante sur $[0;+\infty[$, donc la fonction $x \longmapsto -x^2$ est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.
La fonction g est donc la somme de deux fonctions strictement décroissantes sur $[0;+\infty[$. Par conséquent : g est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.
- Ensuite :

$$g(0) = 1$$

et, par opérations :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

- Pour finir :
  - g est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$,
  - g est continue sur $[0;+\infty[$, comme somme de telles fonctions.

Ainsi, par théorème de bijection, g est bijective de $[0;+\infty[$ dans $g([0;+\infty[) =]-\infty;1]$.

Conclusion : g réalise une bijection de $[0;+\infty[$ dans $]-\infty;1]$.

3.b. En déduire que l'équation $f(x)=x$ possède une unique solution dans $]0;+\infty[$, que l'on notera α.

Commençons par remarquer que, pour tout $x\in]0;+\infty[$:

$$\begin{aligned} f(x)=x &\iff \frac{e^{-x}}{x}-x=0 \\ &\iff \frac{e^{-x}-x^2}{x}=0 \\ &\iff e^{-x}-x^2=0 \quad \text{car } x\neq 0 \\ &\iff g(x)=0 \end{aligned}$$

Or, puisque g est bijective de $[0;+\infty[$ dans $]-\infty;1]$ et que $0\in]-\infty;1]$, l'équation $g(x)=0$ possède une unique solution dans $[0;+\infty[$, notée α.
Mais, comme $g(0)\neq 0$, on a même $\alpha\in]0;+\infty[$.

Conclusion : l'équation $f(x)=x$ possède une unique solution dans $]0;+\infty[$, que l'on notera α.

3.c. Justifier : $e^{-1}<\alpha<1$.

On a :

- $g(1)=e^{-1}-1$.
  Or $-1<0$, et donc, par stricte croissance de exp sur $\mathbb{R}$:
  $$e^{-1}<1$$
  Ainsi :
  $$g(1)<0$$
- $g(e^{-1})=e^{-e^{-1}}-e^{-2}$.
  Or : $e^{-1}<1<2$, d'où :
  $$-e^{-1}>-2$$
  Et, par stricte croissance de exp sur $\mathbb{R}$:
  $$e^{-e^{-1}}>e^{-2}$$
  Ainsi :
  $$g(e^{-1})>0$$

Par conséquent :
$$g(e^{-1})>g(\alpha)>g(1)$$
Et donc, par stricte décroissance de g sur $[0;+\infty[$:
$$e^{-1}<\alpha<1$$

Petite remarque
On peut également raisonner par équivalences en partant de $g(e^{-1})>0$ pour arriver à une "trivialité".

Conclusion : $e^{-1}<\alpha<1$.

4. 4.a. Démontrer que l'on a : $u_2>u_0$.

On sait que $u_0=1$ et ainsi, $u_1=e^{-1}$ puis :
$$u_2=\frac{e^{-e^{-1}}}{e^{-1}}=e^{1-e^{-1}}$$
Or : $e^{-1}<1$, donc :
$$1-e^{-1}>0$$
Et, par stricte croissance de exp sur $\mathbb{R}$:
$$e^{1-e^{-1}}>1$$
Autrement dit :
$$u_2>u_0$$

Conclusion : $u_2>u_0$.

4.b. En déduire que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Démontrons, par récurrence : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{2n}<u_{2n+2}$.

- **Initialisation.** Pour $n=0$:
  Fait dans la question précédente.
- **Hérédité.** Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que $u_{2n}<u_{2n+2}$ et montrons que $u_{2n+2}<u_{2n+4}$.
  D'après l'hypothèse de récurrence, on a :
  $$u_{2n}<u_{2n+2}$$
  Puis, en appliquant f, strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ ($(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes strictement positifs) :
  $$f(u_{2n})>f(u_{2n+2})$$
  Autrement dit :
  $$u_{2n+1}>u_{2n+3}$$
  Puis, en appliquant à nouveau f, toujours strictement décroissante sur $\mathbb{R}_*^+$, on obtient finalement :
  $$u_{2n+2}<u_{2n+4}$$
  L'hérédité est ainsi établie.

☞ Pour info...
On peut aller un peu plus vite en appliquant directement $f\circ f$, strictement croissante sur $\mathbb{R}_*^+$...
Au passage, puisque l'intervalle $]0;+\infty[$ est stable par f, la fonction $f\circ f$ est bien également définie sur $]0;+\infty[$.

Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{2n}<u_{2n+2}$.
Autrement dit : la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

4.c. Justifier que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante puis qu'elle converge vers un réel ℓ appartenant à $[0;e^{-1}]$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.
D'après la question précédente :
$$u_{2n} < u_{2n+2}$$
D'où, en appliquant f, strictement décroissante sur $]0;+\infty[$, on obtient :
$$u_{2n+1} > u_{2n+3}$$
Conclusion : la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
- Or, d'après la question **1.b.**, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0 ; c'est donc également le cas de la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
Conclusion : par théorème de convergence monotone, la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell \geq 0$.
Et comme $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on a $\ell \leq u_1$.

Conclusion : la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et converge vers un réel ℓ appartenant à $[0;e^{-1}]$.

5. Pour $x \in]0;+\infty[$, on pose $h(x) = f \circ f(x)$. On pose également $h(0) = 0$.

5.a. Justifier que la fonction h est continue sur $[0;+\infty[$.

- La fonction f est continue sur $]0;+\infty[$ et à valeurs dans $]0;+\infty[$; ainsi, par composition, la fonction h est continue sur $]0;+\infty[$.
- Ensuite :
  - $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$
  - $\lim\limits_{X\to+\infty} f(X) = 0$

  D'où, par composition :
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f\circ f(x) = 0$$
  Ainsi :
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} h(x) = h(0)$$
  La fonction h est donc continue en 0.

Conclusion : la fonction h est continue sur $[0;+\infty[$.

5.b. Déterminer, pour tout $x \in]0;+\infty[$, une expression de $h(x)$ en fonction de $g(x)$.

Soit $x \in]0;+\infty[$. On a :
$$\begin{aligned} h(x) &= f\circ f(x) \\ &= f\left(\frac{e^{-x}}{x}\right) \\ &= \frac{\exp\left(-\frac{e^{-x}}{x}\right)}{\frac{e^{-x}}{x}} \\ &= x\exp\left(-\frac{e^{-x}}{x}+x\right) \\ &= x\exp\left(-\frac{g(x)}{x}\right) \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall x \in]0;+\infty[,\ h(x) = x\exp\left(-\frac{g(x)}{x}\right)$.

5.c. Résoudre alors l'équation $h(x) = x$ d'inconnue $x \in [0;+\infty[$.

- Remarquons déjà que $h(0) = 0$, donc 0 est solution de cette équation.
- Soit ensuite $x \in]0;+\infty[$. On a, en commençant par la question précédente :

$$\begin{aligned} h(x) = x &\iff x\exp\left(-\frac{g(x)}{x}\right) && x \neq 0 \\ &\iff \exp\left(-\frac{g(x)}{x}\right) = 1 && \text{injectivité de exp sur } \mathbb{R} \\ &\iff -\frac{g(x)}{x} = 0 && x \neq 0 \\ &\iff g(x) = 0 && x \neq 0 \text{ et travail fait en question 3.b.} \\ &\iff x = \alpha \end{aligned}$$

Conclusion : les solutions de l'équation $h(x) = x$ sur $[0;+\infty[$ sont 0 et α.

5.d. En déduire que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 puis déterminer la limite de la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$.

- On sait, d'après **4.c.**, que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell \in [0;e^{-1}]$.
Or, on a :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n+3} = h(u_{2n+1})$$
D'où, par continuité de h en ℓ (car continue sur $[0;+\infty[$ et que $\ell \in [0;+\infty[$) et unicité de la limite :
$$\ell = h(\ell)$$
D'après la question précédente, on a donc :
$$\ell = 0 \quad \text{ou} \quad \ell = \alpha$$
Mais on sait que $\ell \in [0;e^{-1}]$ et que (question **3.c.**) $\alpha > e^{-1}$.
Par conséquent $\ell \neq \alpha$ et donc :
$$\ell = 0$$

Conclusion : la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

- On a aussi :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n+2} = f(u_{2n+1})$$

Or :

◇ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{2n+1} = 0$

◇ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$

Donc, par composition :

$$\lim_{n \to +\infty} f(u_{2n+1}) = +\infty$$

Autrement dit :

$$\lim_{n \to +\infty} u_{2n+2} = +\infty$$

Conclusion : la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

6. Qu'en déduire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

D'après la question précédente :

$$\lim_{n \to +\infty} u_{2n} = +\infty \quad ; \quad \lim_{n \to +\infty} u_{2n+1} = 0$$

Conclusion : par propriété de recouvrement, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge sans avoir de limite.

★★★★★★★

Exercice 3

Une gare dispose de deux guichets. Trois clients notés C_1, C_2, C_3 arrivent en même temps. Les clients C_1 et C_2 se font servir tandis que le client C_3 attend puis effectue son opération dès que l'un des deux guichets se libère.
On définit X_1 etX_2 les variables aléatoires égales aux durées respectives des opérations des clients C_1 et C_2. Ces durées sont mesurées en minutes et arrondies à l'unité supérieure ou égale. On suppose que les variables aléatoires X_1 et X_2 suivent la loi géométrique de paramètre p, avec $p \in]0;1[$ et qu'elles sont indépendantes. On note $q = 1 - p$.
Toutes les variables aléatoires de l'exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. **1.a.** Rappeler la loi de la variable aléatoire X_1 ainsi que son espérance et sa variance.

Conclusion : $X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$; $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X_1 = k]) = q^{k-1}p$; $\mathbb{E}(X_1) = \dfrac{1}{p}$; $\mathbb{V}(X_1) = \dfrac{q}{p^2}$.

1.b. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X_1 \leq n]) = 1 - q^n$. Cette relation est-elle encore valable quand $n = 0$?

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_1 \leq n]) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_1 = k]) \\
&= \sum_{k=1}^{n} q^{k-1}p && \text{changement d'indice } i = k-1 \\
&= p\sum_{i=0}^{n-1} q^i && q \neq 1 \text{ car } p \neq 0 \\
&= p\,\frac{1-q^n}{1-q} && p = 1-q \\
&= 1 - q^n
\end{aligned}$$

Petite remarque

On peut également faire ainsi :
- Puisque $X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on a : $[X_1 \leq n] = \bigcup_{k=1}^{n} [X_1 = k]$
- par incompatibilité, on obtient...

- Ensuite, on sait que $X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$, donc $\mathbb{P}([X_1 \leq 0]) = 0$. Et $1 - q^0 = 0$. La relation est donc encore valable quand $n = 0$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X_1 \leq n]) = 1 - q^n$.

2. On note T la variable aléatoire égale au temps d'attente du client C_3 avant de pouvoir se présenter à un guichet. De cette façon, $T = \min(X_1, X_2)$.

2.a. Sans utiliser la commande `min`, écrire une fonction `Python` telle que l'exécution de `simulT(p)` renvoie une réalisation de la variable aléatoire T dans le cas où X_1 et X_2 suivent des lois géométriques de paramètre p.

```
import numpy.random as rd

def simulT(p):
    X1=rd.geometric(p)
    X2=rd.geometric(p)
    if X1<X2:
        return X1
    else:
        return X2
```

2.b. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la probabilité $\mathbb{P}([T > n])$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([T > n]) &= \mathbb{P}([\min(X_1, X_2) > n]) \\
&= \mathbb{P}\Big([X_1 > n] \cap [X_2 > n]\Big) && \text{indépendance de } X_1 \text{ et } X_2 \\
&= \mathbb{P}([X_1 > n]) \times \mathbb{P}([X_2 > n]) \\
&= \Big(1 - \mathbb{P}([X_1 \leq n])\Big)\Big(1 - \mathbb{P}([X_2 \leq n])\Big) && \text{question 2.a., et } X_1 \text{ et } X_2 \text{ ont même loi} \\
&= \Big(1 - (1 - q^n)\Big)^2 \\
&= q^{2n}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([T > n]) = q^{2n}$.

2.c. En déduire que T suit la loi géométrique de paramètre $1 - q^2$.

- Puisque X_1 et X_2 suivent des lois géométriques, on a déjà $T(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On a :
$$[T \geq n] = [T = n] \cup [T > n]$$
Or, les évènements $[T = n]$ et $[T > n]$ sont incompatibles, d'où :
$$\mathbb{P}([T \geq n]) = \mathbb{P}([T = n]) + \mathbb{P}([T > n])$$
Et ainsi :
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([T = n]) &= \mathbb{P}([T \geq n]) - \mathbb{P}([T > n]) && T(\Omega) \subset \mathbb{N}^* \\
&= \mathbb{P}([T > n-1]) - \mathbb{P}([T > n]) && \text{question précédente, licite car } n-1, n \in \mathbb{N} \\
&= q^{2n-2} - q^{2n} \\
&= q^{2n-2}(1 - q^2) \\
&= \Big(1 - (1 - q^2)\Big)^{n-1}(1 - q^2)
\end{aligned}$$

♣ Méthode !

Si $Z = \max(X, Y)$, on travaille sur $\mathbb{P}([T \leq x])$ (la fonction de répartition) pour ensuite avoir la loi de T.
Si $Z = \min(X, Y)$, on travaille sur $\mathbb{P}([T > x])$ (ou $\mathbb{P}([T \geq x])$) pour ensuite avoir la loi de T (ou reconnaître sa fonction de répartition).
C'est bien ce que demande l'énoncé dans cet enchaînement de questions.

Conclusion : T suit la loi géométrique de paramètre $1-q^2$.

3. On définit maintenant la variable aléatoire Δ par $\Delta = |X_1 - X_2|$.

3.a. Calculer la probabilité $\mathbb{P}([\Delta = 0])$.

$[\Delta = 0]$ est réalisé	si, et seulement si,	$[|X_1 - X_2| = 0]$ est réalisé
	si, et seulement si,	$[X_1 = X_2]$ est réalisé
	si, et seulement si,	il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $[X_1 = k]$ et $[X_2 = k]$ sont simultanément réalisés

D'où :

$$[\Delta = 0] = \bigcup_{k=1}^{+\infty} [X_1 = k] \cap [X_2 = k]$$

Par incompatibilité des évènements de la famille $\left([X_1 = k]\cap[X_2 = k]\right)_{k\in \mathbb{N}^*}$, la série $\sum_{k\geq 1} \mathbb{P}\left([X_1 = k]\cap[X_2 = k]\right)$ est convergente et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([\Delta = 0]) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left([X_1 = k]\cap[X_2 = k]\right) && \text{indépendance de } X_1 \text{ et } X_2\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = k]) \times \mathbb{P}([X_2 = k]) && X_1 \text{ et } X_2 \text{ suivent des lois géométriques de paramètre } p\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{2k-2} p^2\\
&= p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \left(q^2\right)^{k-1} && \text{changement d'infice } i = k-1\\
&= p^2 \sum_{i=0}^{+\infty} \left(q^2\right)^{i}\\
&= p^2 \frac{1}{1-q^2}\\
&= \frac{p^2}{(1-q)(1+q)} && p = 1-q\\
&= \frac{p}{1+q}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{P}([\Delta = 0]) = \dfrac{p}{1+q}$.

3.b. Soit n un entier naturel non nul. Établir :

$$\mathbb{P}([\Delta = n]) = 2\frac{pq^n}{1+q}$$

On a :

$$\begin{aligned}
[\Delta = n] &= [|X_1 - X_2| = n]\\
&= [X_1 - X_2 = n] \cup [X_2 - X_1 = n]
\end{aligned}$$

Or $n \neq 0$, donc les évènements $[X_1 - X_2 = n]$ et $[X_2 - X_1 = n]$ sont incompatibles, d'où :

$$\mathbb{P}([\Delta = n]) = \mathbb{P}([X_1 - X_2 = n]) + \mathbb{P}([X_2 - X_1 = n])$$

Mais X_1 et X_2 suivent toutes deux la même loi, donc $X_1 - X_2$ et $X_2 - X_1$ également et ainsi : $\mathbb{P}([X_2 - X_1 = n]) = \mathbb{P}([X_1 - X_2 = n])$.
Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([\Delta = n]) &= 2\mathbb{P}([X_1 = X_2 + n]) && \text{formule des probabilités totales avec } \left([X_2 = k]\right)_{k\in\mathbb{N}^*} \text{ comme sce}\\
&= 2\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left([X_2 = k]\cap[X_1 = X_2 + n]\right)\\
&= 2\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left([X_2 = k]\cap[X_1 = k + n]\right) && \text{indépendance de } X_1 \text{ et } X_2\\
&= 2\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = k])\mathbb{P}([X_1 = k + n]) && k \in X_2(\Omega) \text{ et } k+n \in X_1(\Omega)\\
&= 2\sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} p q^{k+n-1} p\\
&= 2p^2 q^k \sum_{k=1}^{+\infty} q^{2k-2}\\
&= 2p^2 q^n \sum_{k=1}^{+\infty} \left(q^2\right)^{k-1} && \text{calcul fait en question précédente}\\
&= 2p^2 q^n \frac{1}{1-q^2}\\
&= \frac{2pq^n k}{1+q}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([\Delta = k]) = 2\dfrac{pq^n}{1+q}$.

3.c. Justifier alors que $\Delta(\Omega) = \mathbb{N}$.

Par double-inclusion...

$\boxed{\subset}$ Immédiat X_1 et X_2 sont à valeurs entières et que $\Delta = |X_1 - X_2|$.

$\boxed{\supset}$ Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après les deux questions précédentes, on a $\mathbb{P}([\Delta = n]) \neq 0$, donc $[\Delta = n] \neq \varnothing$. Ainsi, $n \in \Delta(\Omega)$.

Conclusion : $\Delta(\Omega) = \mathbb{N}$.

3.d. Montrer que Δ admet une espérance et la calculer.

- On sait que :

Δ admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum\limits_{n \in \Delta(\Omega)} n\mathbb{P}([X = n])$ est absolument convergente

si, et seulement si, la série $\sum\limits_{n \geq 0} n\mathbb{P}([\Delta = n])$ est convergente, car il s'agit d'une série à terme général positif

- Soit $N \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N} n\mathbb{P}([\Delta = n]) &= \sum_{n=0}^{N} n \frac{2pq^n}{1+q} \\ &= \frac{2pq}{1+q} \sum_{n=0}^{N} nq^{n-1} \end{aligned}$$

Or $q \in]-1;1[$, donc la série $\sum\limits_{n \geq 0} nq^{n-1}$ est une série géométrique convergente. Par conséquent, la série $\sum\limits_{n \geq 0} n\mathbb{P}([\Delta = n])$ est convergente.

- On en déduit que Δ admet une espérance et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\Delta) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n\mathbb{P}([\Delta = n]) \\ &= \frac{2pq}{1+q} \sum_{n=0}^{+\infty} nq^{n-1} \\ &= \frac{2pq}{1+q} \frac{1}{(1-q)^2} \qquad p = 1-q \\ &= \frac{2q}{1-q^2} \end{aligned}$$

Conclusion : Δ admet une espérance et $\mathbb{E}(\Delta) = \dfrac{2q}{1-q^2}$.

4. Dans cette question, on suppose que $p = \dfrac{1}{2}$. Ainsi, d'après le résultat de la question 2.c. la variable aléatoire T suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{3}{4}$. Afin de compenser son attente, le client C_3 se voit proposer une réduction sur son prochain billet de train.

Si $n \in \mathbb{N}^*$ désigne l'attente subie par C_3 (représentée par la variable aléatoire T), alors celui-ci pioche au hasard un jeton dans une urne composée de n jetons numérotés de 1 à n.

Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, le tirage du jeton numéro k entraînera une réduction de k euros. On note R la variable aléatoire égale au montant de la réduction obtenue par le client C_3.

4.a. Soient $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Déterminer $\mathbb{P}_{[T=n]}([R = k])$. *On distinguera les cas $k > n$ et $k \leq n$.*

Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

Supposons l'évènement $[T = n]$ réalisé. Dans ce cas, l'urne est composée de n jetons numérotés de 1 à k.

- Si $k > n$:
  Puisque $k > n$, il est impossible de tirer un jeton dont le numéro est k. D'où :

$$\mathbb{P}_{[T=n]}([R = k]) = 0$$

- Si $k \leq n$:
  L'évènement $[R = k]$ est ainsi réalisé si, et seulement si, on tire le jeton numéro k parmi les n jetons possibles.
  Par équiprobabilité du choix des jetons dans l'urne, on a alors :

$$\mathbb{P}_{[T=n]}([R = k]) = \frac{1}{n}$$

Conclusion : pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}_{[T=n]}([R = k]) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > n \\ \dfrac{1}{n} & \text{si } k \leq n \end{cases}$.

4.b. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([R = k]) = 3\sum\limits_{n=k}^{+\infty} \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule des probabilités totales, avec $\big([T = n]\big)_{n \in \mathbb{N}^*}$ comme système complet d'évènements, la série $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\big([T=n]\cap[R=k]\big)$ est convergente et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([R=k]) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([T=n]\cap[R=k]\big) && \forall k\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([T=n])\neq 0\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([T=n])\mathbb{P}_{[T=n]}([R=k]) && \mathbb{P}_{[T=n]}([R=k])=0 \text{ si } n<k\\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}([T=n])\mathbb{P}_{[T=n]}([R=k]) && \text{question précédente}\\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{3}{4}\left(\frac{1}{1}\right)^{n-1}\frac{1}{n}\\
&= 3\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}
\end{aligned}$$

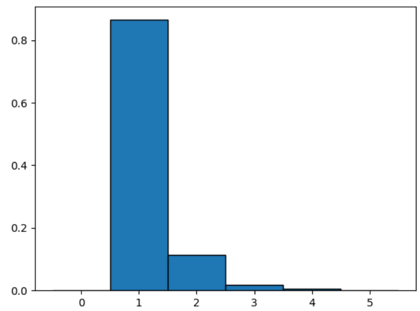
Conclusion : pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([R=k]) = 3\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

4.c. Écrire une fonction `Python` telle que l'exécution de `simulR()` renvoie une réalisation de la variable aléatoire R.

```python
import numpy.random as rd

def simulR():
    T=simulT(1/2)
    return rd.randint(1,T+1)
```

4.d. Écrire un programme `Python` dont l'exécution permettrait d'obtenir le graphique ci-dessous, représentant l'histogramme des fréquences sur 10000 réalisations de la variable aléatoire R.



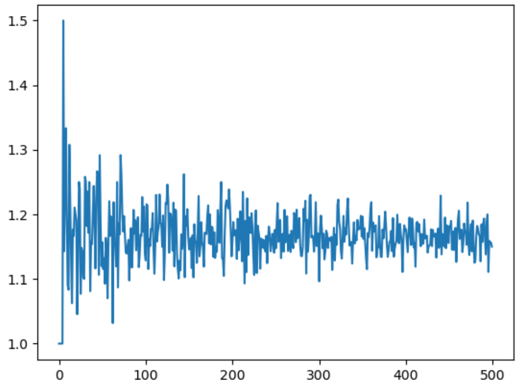

```python
import numpy.random as rd

LR=[simulR() for k in range(10000)]
Labs=[-0.5+k for k in range(0,7)]
plt.hist(LR,Labs,edgecolor='k',density=True)
plt.show()
```

4.e. On considère la fonction `mystere` écrite en `Python` :

```python
def mystere():
    LE=[]
    for n in range(1,501):
        LR=[simulR() for k in range(n)]
        E=sum(LR)/n
        LE.append(E)
    plt.plot(range(500),LE)
    plt.show()
```

L'exécution de `mystere()` affiche le graphique ci-dessous :



Interpréter ce graphique. On veillera en particulier à décrire le contenu de la liste `LE` après l'exécution de `mystere()`.

- Ici, n parcourt $[\![1;1000]\!]$. Pour chaque $n \in [\![1;1000]\!]$, `LR` sera une liste de n réalisations de la variable aléatoire R ; et `E` sera la moyenne des valeurs de R sur ces n réalisations.
- Ainsi, la liste `LE` contient 1000 moyennes de réalisations de R sur des répétitions de plus en plus nombreuses.

Le graphique permet alors d'observer que la *moyenne empirique* semble se stabiliser autour de 1,15. D'après la loi faible des grands nombres, on peut donc penser que X possède une espérance environ égale à 1,15.

Petite remarque
Ni l'expression *moyenne empirique*, ni la mention de la *loi faible des grands nombres* ne sont exigées ici.

☞ Pour info...
On trouve $\mathbb{E}(\mathrm{R}) = \frac{7}{6}$ calcul qui peut être fait d'ailleurs, en admettant simplement la permutation des sommes nécessaire... après avoir justifié l'existence de l'espérance de R bien entendu...

4.f. **4.f.i.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Écrire explicitement en fonction de x et n la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^{k-1}$.

On a, en commençant par le changement d'indice $i = k-1$:

$$\sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = \sum_{i=0}^{n-1} x^i \underset{x \neq 1}{=} \frac{1-x^n}{1-x}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$.

4.f.ii. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k = \ln(4) - \ln(3) - \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{x^n}{1-x}\,dx$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :

$$\forall x \in \left[0; \frac{1}{4}\right], \ \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$$

D'où, en intégrant de 0 à $\frac{1}{4}$:

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \sum_{k=1}^{n} x^{k-1}\,dx = \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1-x^n}{1-x}\,dx$$

Par linéarité de l'intégrale, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} \int_0^{\frac{1}{4}} x^{k-1}\,dx = \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{1-x}\,dx - \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{x^n}{1-x}\,dx$$

Autrement dit :

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{x^k}{k}\right]_0^{\frac{1}{4}} = \Big[-\ln(1-x)\Big]_0^{\frac{1}{4}} - \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{x^n}{1-x}\,dx$$

Et ainsi :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k = -\ln\left(\frac{3}{4}\right) - \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{x^n}{1-x}\,dx$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k = \ln(4) - \ln(3) - \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{x^n}{1-x}\,dx$.

4.f.iii. Démontrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{x^n}{1-x}\,dx = 0$.

➠ Réflexe !
L'intégrande est positive... On cherche donc à encadrer l'intégrale (et donc l'intégrande auparavant) par une expression de limite nulle quand $n \to +\infty$... Ce x^n nous fait de l'œil !

- Soit $n \in \mathbb{N}$.
  - Soit $x \in \left[0; \frac{1}{4}\right]$. On a ainsi :

$$\frac{3}{4} \leq 1 - x \leq 1$$

D'où, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_*^+$:

$$\frac{4}{3} \geq \frac{1}{1-x} \geq 1$$

Puis, comme $x^n \geq 0$:

$$\frac{4}{3}x^n \geq \frac{x^n}{1-x} \geq x^n$$

On a donc établi, par transitivité :

$$\forall x \in \left[0; \frac{1}{4}\right],\ 0 \leq \frac{x^n}{1-x} \leq \frac{4}{3}x^n$$

◇ Par croissance de l'intégrale, puisque $\frac{1}{4} \geq 0$:

$$0 \leq \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{x^n}{1-x}dx \leq \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{4}{3}x^n dx$$

Or :

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{4}{3}x^n dx = \frac{4}{3(n+1)}$$

- On a ainsi démontré :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{x^n}{1-x}dx \leq \frac{4}{3(n+1)}$$

Or :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{4}{3(n+1)} = 0$$

Conclusion : par théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{x^n}{1-x}dx = 0$.

4.f.iv. Établir alors que $\mathbb{P}([R=1]) = 3\big(\ln(4)-\ln(3)\big)$ puis donner la valeur de $\mathbb{P}([R=2])$.

- D'après la question **4.b.** :

$$\mathbb{P}([R=1]) = 3\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Mais, d'après les deux questions précédentes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \ln(4)-\ln(3)$$

Conclusion : $\mathbb{P}([R=1]) = 3\big(\ln(4)-\ln(3)\big)$.

- De la même façon :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([R=2]) &= 3\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ &= 3\left(3\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^n - \frac{1}{4}\right) \\ &= 3\mathbb{P}([R=1]) - \frac{3}{4} \\ &= 3\big(\ln(4)-\ln(3)\big) - \frac{3}{4}\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{P}([R=2]) = 3\mathbb{P}([R=1]) - \frac{3}{4} = 3\big(\ln(4)-\ln(3)\big) - \frac{3}{4}$.

4.f.v. Utiliser les résultats précédents pour donner une valeur approchée de $\mathbb{P}([R \geq 3])$. *On donne :* $\mathbb{P}([R=1]) \simeq 0,86$.

Puisque $R(\Omega) = \mathbb{N}^*$ on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([R \geq 3]) &= 1 - \big(\mathbb{P}([R=1]) + \mathbb{P}([R=2])\big) \\ &= 1 - \left(2\mathbb{P}([R=1]) - \frac{3}{4}\right) \\ &= \frac{7}{4} - 2\mathbb{P}([R=1]) \\ &\simeq 1,75 - 2\times 0,86\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{P}([R \geq 3]) \simeq 0,03$.

Petite remarque

Vous pensiez vraiment pouvoir obtenir une grosse réduction à la SNCF ?!